

II-25

非平衡浮遊砂の底面境界条件と
その応用に関する研究北海道大学工学部 正会員 山田 正
北海道大学工学部 学会員 水子 龍彦

1. はじめに

本研究は浮遊砂の分布に関してその濃度がその地点の水理量で決まる平衡濃度になっていない、いわゆる非平衡濃度分布とその底面境界条件について考察したものである。ここでは数学的には底面濃度を与えるDirichlet問題としての解析解と濃度フラックスを指定するNeumann問題としての数値解の比較、実験との比較を行う。次にここで提案する境界条件を高水敷、低水路をもつ複断面水路に適用し高水敷における鉛直方向に平均した浮遊砂濃度の横断方向分布に関して簡便な推定式を求めている。

2. 基礎方程式

浮遊砂濃度を支配する基礎式は(1)式で与えられる。ここに x は流れ方向、 z は鉛直方向座標、 f は浮遊砂濃度、 v は流れ方向平均流速、 w は砂粒子の沈降速度、 D は濃度の鉛直方向拡散係数である。本研究では定常状態の場合を考えていることより、(1)式は(2)式となる。ここで以下の便を考えて(3)式の置き換えを行い(4)式を基礎式とする。

2.1 境界条件として底面濃度を与える場合：この場合境界条件は(5)式で与えられる。ところで一般に粒子径オーダーの底面近傍には掃流砂の層がある。本節の境界条件は浮遊砂濃度を $z=0$ での掃流層の平均濃度に一致させるものであるが、その背景には浮遊砂にとって非平衡状態でも掃流砂濃度はその場の水理量で決まる平衡流砂量に容易に追従するのでサルテーションのステップ長程度の非平衡性しかもたない掃流砂は局所平衡近似が成立しているという考え方があり。このような場合に対して本解析の結果とは異なる解析結果が Kalinske, Mei, Hjelmfelt and Lenau, 合田らによつて与えられているが、それらの解の適用性については未だ十分な検討はなされていない。ところで(4)式はその式形が線形の移流拡散方程式と同型であるが、その解析解を導くことは予想外に困難である。ここでは Chandrasekhar による(6)式に示す従属変数の変換を行う。このとき未知関数は $F(x, y)$ となり、(7)式を得る。 $F(x, y)$ に関する境界条件は(8)式となる。ところで我々が問題にしているのは開水路流れであり、底面での境界条件の他に自由水面でも境界条件を必要とするが、このときは2点境界値問題となり取り扱う問題を不必要に複雑なものにしてしまう。よつてここではより簡単な計算条件である(9)式を設定する。このとき解くべき基本式は(7)式、境界条件は(8)、(9)式となる。(7)式はDirichlet形の境界条件を持つ熱伝導型の方程式であることから x に関してLaplace変換の手法が使用でき、若干の計算の後に(10)式あるいは(11)式の積分形で解を得る。さらに(12)式に示す積分公式を用いると(11)式は(13)式の陽な形で表現できる。次に(13)式の無次元化を行うと(14)式を得る。ここに Rv は渦拡散係数で定義される流れのレイノルズ数、 $R\omega$ は沈降速度と渦拡散係数で定義されるレイノルズ数である。(14)式は底面での濃度 f_0 、 Rv 、 $R\omega$ をパラメータとしている。なお(14)式中には誤差関数を含んでいるが、この関数には5次式で表される近似公式があるためパソコン等での計算に何等の困難はない。ここで十分に下流では(15)式が成立し、このときLane-Kalinske式に漸近することがわかる。次に河床波や床固め等があり、底面濃度 f_0 が x 方向に変動する場合を考える。このときには解の重ね合わせが成立し、Duhamelの定理を用いると、非平衡浮遊砂濃度 $c(x, z)$ に関して一般的に(17)式を得る。ここに $f_0(x)$ は流れ方向に水理条件と共に変化する底面濃度である。流れ方向への水理条件の変化が計算によつて得られるならば、それを用いて底面せん断応力を算定し、これから掃流層の平均濃度を算出し、これをもつて浮遊砂の底面境界条件とする。

(i) 固定床から移動床へ変化する場合 図1に示す状況を考える。このとき底面濃度は $x < 0$ で0、 $x > 0$ で f_0 とする。この場合の解が(14)式である。図2は $R\omega=2$ 、 $Rv=100$ のときの浮遊砂濃度分布の発展を示す。図3は実験室規模の具体的な例として、使用する砂として豊浦産砂($d_{50}=0.2\text{mm}$)、水深 $h=0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - w \frac{\partial f}{\partial z} = D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{w}{v} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{v} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2) \quad \frac{w}{v} = \omega_0, \quad \frac{D}{v} = D_0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \omega_0 \frac{\partial f}{\partial z} = D_0 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (4) \quad \begin{matrix} x=0 \cdots \cdots f=0 \\ z=0 \cdots \cdots f=f_0 \end{matrix} \quad (5) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = D_0 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (7)$$

$$f(x, z) = F(x, z) \exp\left[-\frac{\omega_0 z}{2 D_0} - \frac{\omega_0^2 x}{4 D_0}\right] \quad (6) \quad z=0 \cdots F(x, 0) = f_0 \exp\left(\frac{\omega_0^2 x}{4 D_0}\right)$$

$$x=0 \cdots F(0, z) = 0 \quad z=\infty \cdots F(x, \infty) = 0 \quad (8), (9)$$

$$F(x, z) = \frac{f_0 z}{2 \sqrt{\pi D_0}} \int_0^x \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\left\{\frac{\omega_0^2 (x-\tau)}{4 D_0} - \frac{z^2}{4 D_0}\right\} d\tau \quad (10)$$

$$f(x, z) = \exp\left[-\frac{\omega_0 z}{2 D_0} - \frac{\omega_0^2 x}{4 D_0}\right] \frac{f_0 z}{2 \sqrt{\pi D_0}} \int_0^x \frac{1}{\tau^{3/2}} \exp\left\{\frac{\omega_0^2 (x-\tau)}{4 D_0} - \frac{z^2}{4 D_0}\right\} d\tau \quad (11)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\tau}} \int_{\frac{a}{b}}^{\infty} \exp\left(-\left(\lambda^2 + \frac{a^2}{\lambda^2}\right)\right) d\lambda = \cosh(2a) - \frac{1}{2} \left\{ e^{2a} \operatorname{erf}\left(b + \frac{a}{b}\right) - e^{-2a} \operatorname{erf}\left(b - \frac{a}{b}\right) \right\} \quad (12)$$

$$f(x, z) = f_0 \cdot \exp\left[-\frac{\omega_0 z}{2 D_0}\right] \cdot \left\{ \cosh\left(\frac{\omega_0 z}{2 D_0}\right) - \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(\frac{\omega_0 z}{2 D_0}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{x}{D_0}} + \frac{z}{2 \sqrt{D_0 x}}\right) \right. \right. \\ \left. \left. \exp\left(-\frac{\omega_0 z}{2 D_0}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{x}{D_0}} - \frac{z}{2 \sqrt{D_0 x}}\right) \right\} \right\} \quad (13)$$

$$R_v = v h / D, \quad R_\omega = \omega h / D, \quad \xi = x / h, \quad \eta = z / h$$

$$f(\xi, \eta) = f_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} R_\omega \cdot \eta\right) \cdot \left\{ \cosh\left(\frac{1}{2} R_\omega \cdot \eta\right) - \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(\frac{1}{2} R_\omega \cdot \eta\right) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \frac{R_\omega}{R_v} \sqrt{R_v \xi} + \frac{1}{2} \sqrt{R_v \eta^2 / \xi}\right) \right. \right. \\ \left. \left. \exp\left(-\frac{1}{2} R_\omega \cdot \eta\right) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \frac{R_\omega}{R_v} \sqrt{R_v \xi} - \frac{1}{2} \sqrt{R_v \eta^2 / \xi}\right) \right\} \right\} \quad (14)$$

$$\xi \rightarrow \infty \cdots \cdots \operatorname{erf}(\quad) = 1 \quad (15) \quad f(\infty, \eta) = f_0 \cdot \exp(-R_\omega \cdot \eta) \quad (16)$$

$$c(x, y) = \int_0^x f(x-s, y) \cdot f'_0(s) ds + f_0(0) \cdot f(x, y) \quad (17)$$

$$0 < x < 1 \cdots c(x, y) = f(x, y) \quad f'_0(x) = \delta(x) - \delta(x-1)$$

$$x > 1 \cdots \cdots c(x, y) = f(x, y) - f(x-1, y) \quad (18)$$

.3m、平均流速 $v=1\text{m/s}$ 、水路勾配 $i=2/1000$ のとき、図1の条件のもとでの浮遊砂境界層の発達を示すものである。この図より（パラメータによって異なるが） $x/h > 70$ ($x > 20\text{m}$) に至ってはじめて平衡分布に近づいていることが分かる。また図4は浮遊砂濃度の90%値をもって境界層厚と定義したときの境界層厚の発達状況を示すものである。浮遊砂濃度に関する実験的研究では水路の長さが必ずしも十分ではない場合があるが、このような水路において浮遊砂濃度の測定を行い、これを平衡濃度分布とすると拡散係数を小さく見積らなければならない。従来、Rouse分布を実験値や観測値に適用するといわゆるZ値を小さく見積る必要があるが、実験値あるいは観測値の中には未だ十分に平衡状態に至っていないものがあることにも起因しているものと思われる。(ii)移動床から固定床への変化 図5、6は移動床から固定床へと変化する場合の概要図である。このとき固定床の境界条件はいわゆる吸着条件の $f_0=0$ をとっており、このときの解は(18)式に示される。図7は図5、6に示す状況のもとでの浮遊砂境界層の減衰経過を示す。図8はこのときの断面平均濃度の流れ方向の減少を示す。さらに図9はこのときの変化率あるいは平均流速を掛けて単位長さ当りの堆積率(deposit rate)を示すものである。この図より堆積率は $x=0$ の近傍で非常に大きくかつ非常に長い裾を引きつつ減衰することが分かる。

2. 底面で濃度フラックスに関して条件を設定する場合 前節では底面境界条件として簡単な場合を扱うことにより解析解を得ることができた。これに対し本節では以下に示すように、底面において濃度フラックスに関する条件を設定するいわゆるNeumann型で境界条件を考える。浮遊砂濃度を支配する基礎式としては平均流速の断面内分布を考慮した(19)式である。ここで $z=0$ の底面での正味の濃度フラックスは(20)式で与えられる。しかしこのままではフラックスの値を指定したわけではないのでこれに対してなんらかのモデル化が必要である。ところで非平衡状態での条件としてはレオロジーモデルからの類推として一般に(21)式が成立する。ここに k は定数、 $C_\infty(0)$ としては平衡状態における底面濃度を示す。(21)式は平衡濃度に足りない分だけのフラックスが底面からまき上がるという物理的意味を持っている。この考え方自体はかつて芦田・道上によって提案されており、本節は彼らの提案する境界条件を踏襲するものになっている。しかしこの段階では平衡濃度そのものは未だ与えられていないので本研究においては $C_\infty(0)$ として板倉の提案する(22)式を用いる。図10は(22)式で与えられる底面濃度を w_0/U に対して示したものである。このとき(20)=(21)を示す(23)式からNeumann型の境界条件(24)式が成立し、これを基本式の(19)式とともに数値計算を行った。図10は非平衡条件での浮遊砂濃度の分布を精密に測定した岡部の実験(Run5)の条件のもとでの数値計算の結果であり、図11はその比較である。これらの図より、本節で示した考え方は実験値を十分に説明するものであることが分かる。図12は浮遊砂境界層の発達状況を示すものである。図中には(21)式中の w_0 を U におきかえたときの結果も示しているが、実験との比較では w_0 を用いた方が適合度は良いようである。

3. 複断面水路の高水数上の浮遊砂濃度分布

本節では前節で示した境界条件を用いて、図12あるいは図13に示す高水数での浮遊砂の濃度分布を以下に示す2つの条件のもとで求めた。なお、本解析では高水数と低水路の境界 $y=0$ の地点で断面平均濃度を与える。3.1高水数で限界掃流力以下の場合 このときは横断方向の拡散と鉛直方向の沈降が釣り合うことになり、基礎式は(25)式あるいは(26)式となる。高水数での鉛直方向の濃度分布として(27)式に示すexponential形を仮定すると断面平均濃度は(28)式で与えられる。これを用いると基礎式中の沈降フラックスは(29)、(30)式で与えられる。これらを用いると、高水数の断面平均濃度の横断方向分布を支配する基礎式は(31)、(32)式となる。境界条件として(33)式を用いると、(34)式の解析解を得る。図12はこのときの解の概略を示している。この図より高水数では低水路の高濃度からexponential的に浮遊砂濃度は低減していることが分かる。3.2高水数で限界掃流力以上のとき このとき底面境界条件としてNeumann型の(35)式を用い、基本式は(36)式が成立している。これを前節と同様に横断方向の境界条件(33)式を用いると(37)式を得る。このときの解の概略は図13に示される。これらの図より高水数での浮遊砂の断面平均濃度が低水路での $0-h$ での平均濃度より大きい小さいかによって2通りの濃度分布のパターンを示すことが分かる。これらの解の実験値との比較や解の妥当性等の詳細は別途報告する予定である。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_m \left(\frac{z}{h} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\partial C}{\partial x} - \omega \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (19) \quad J = -w_0 C(0) - \varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} \quad (20)$$

$$J = K w_0 (C_\infty(0) - C(0)) \quad (21)$$

$$C_\infty(0) = a \left(\frac{w_0}{u_*} \right)^{-3} \left(1 - \frac{w_0}{u_*} \right) \quad K w_0 (C_\infty(0) - C(0)) = -w_0 C(0) - \varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} \quad (22) \quad (23)$$

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} = -w_0 C(0) (1-K) - K w_0 C_\infty(0) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} - w_0 \frac{\partial C}{\partial z} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (24) \quad (25)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{w_0}{v} \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{v} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad c(z) = c_0 e^{-\alpha z} \quad \bar{c} = \frac{c_0}{\alpha h} (1 - e^{-\alpha h}), \quad \alpha = \frac{w_0}{\varepsilon} \quad (26) \quad (27) \quad (28)$$

$$- \frac{1}{h} \int_0^h w_0 \frac{\partial C}{\partial z} dz = - \frac{w_0}{h} [c(h) - c(0)] = \frac{c_0 w_0}{h} [1 - e^{-\alpha h}] = w_0 \alpha \bar{c} \quad (29), (30)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \beta \bar{c} = \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2}, \quad \frac{d^2 \bar{c}(y)}{dy^2} = \frac{\beta}{\varepsilon} \bar{c}(y) \quad \beta = w_0^2 / \varepsilon \quad (31) \quad (32)$$

$$y=0 \dots \dots \bar{c}(0) = c_*, \quad y=b \dots \dots \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = 0 \quad (33) \quad \tau = \frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{w_0^2}{\varepsilon^2}$$

$$\bar{c}(y) = \frac{\cosh(\sqrt{\tau}(b-y))}{\cosh(\sqrt{\tau}b)} \cdot c_* \quad (34)$$

$$\beta \bar{c} = -K w_0 (C_\infty(0) - \bar{c}(y)) \frac{1}{h} \quad \varepsilon \frac{d^2 \bar{c}(y)}{dy^2} = -K w_0 (C_\infty(0) - \bar{c}(y)) \frac{1}{h} \quad (35) \quad (36)$$

$$p = k \left(\frac{w_0}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{1 - \exp(-\alpha h)} \quad \bar{c}(y) = \frac{\cosh(\sqrt{p}(b-y))}{\cosh(\sqrt{p}b)} \cdot (\bar{c}_* - \bar{c}_\infty) + \bar{c}_\infty \quad (37)$$

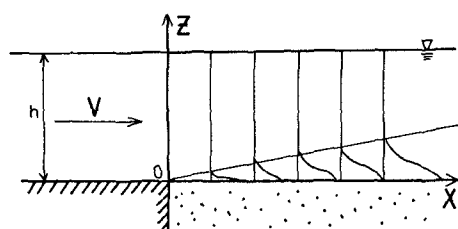


図1 固定床から移動床に移る場合

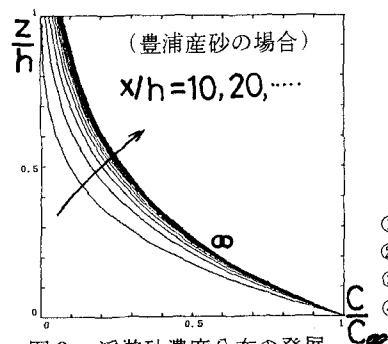


図3 浮遊砂濃度分布の発達

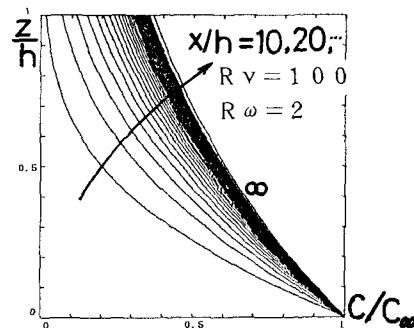


図2 浮遊砂濃度分布の発達

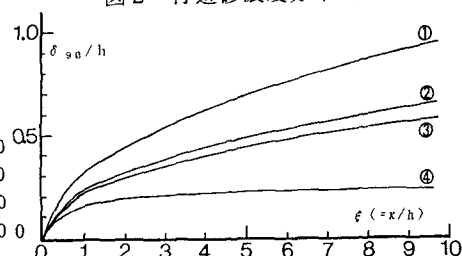


図4 浮遊砂境界層の発達

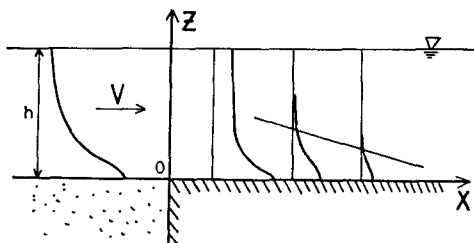


図5 移動床から固定床に移る場合

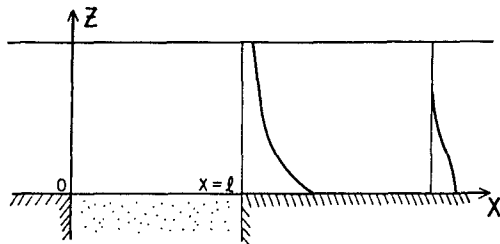


図6 固定床-移動床-固定床の場合

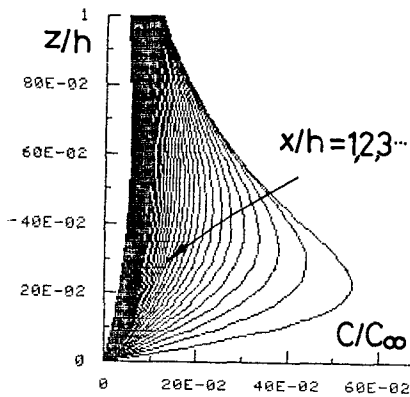


図7 浮遊砂境界層の減衰

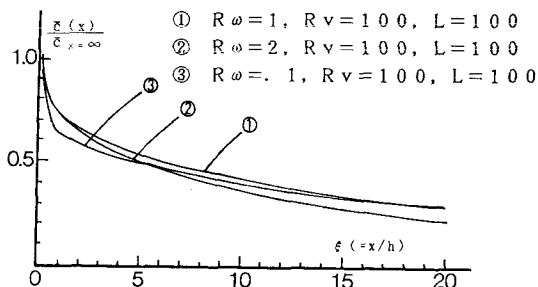


図8 断面平均濃度の減衰

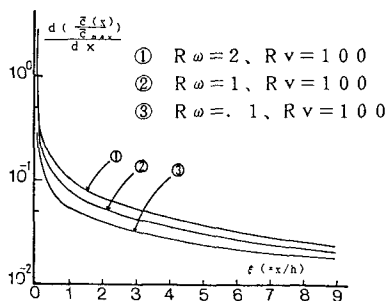


図9 堆積率の変化

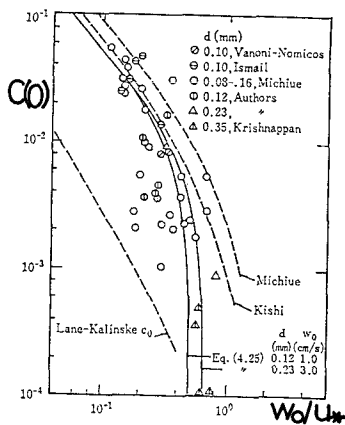


図10 板倉式による底面濃度
(7)より)

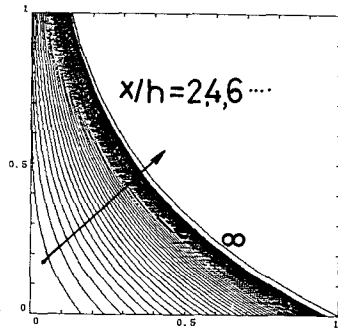


図11(a) 浮遊砂濃度分布の変化

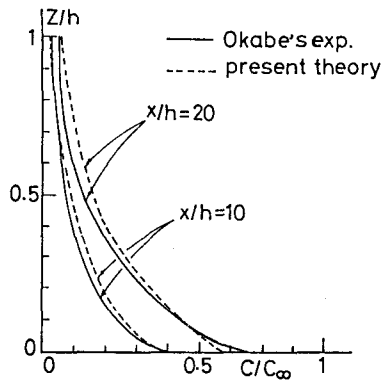


図11(b) 岡部の実験との比較

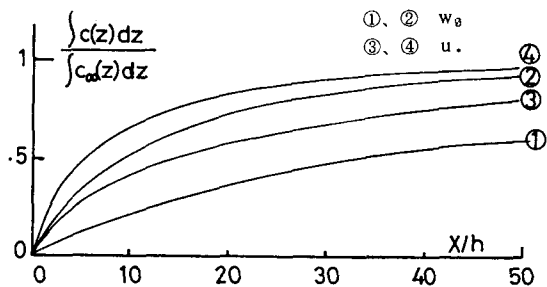


図11(c) 断面平均濃度の変化の一例

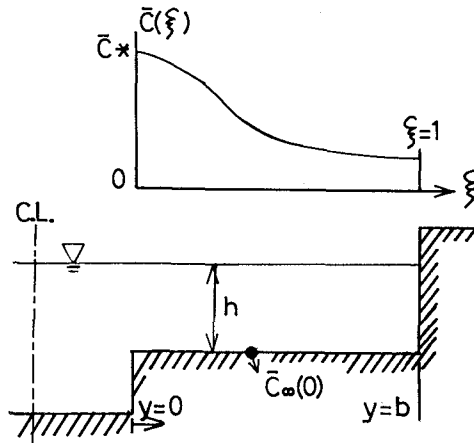


図 1.2 高水敷が限界掃流力以下の場合

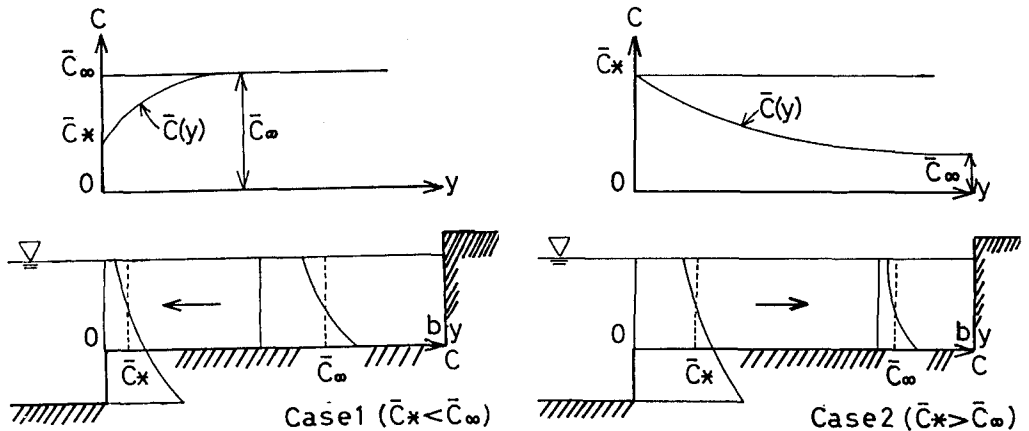


図 1.3(a) 高水敷が限界掃流力以上の場合

図 1.3(b) 高水敷が限界掃流力以上の場合

結論 本研究で得られた結果を要約すると以下のようになる。(1)非平衡浮遊砂分布の流れ方向分布を求めるに際して、底面境界条件として Dirichlet 型と Neumann 型の 2 通りのものを考え、解析解及び数値解を求めた。これらの解の実験値との比較は未だ十分ではないが実用に十分に耐え得る結果を得たといえよう。

(2) 高水敷における断面平均浮遊砂濃度の横断方向の分布を推定する解析解を得た。この結果、高水敷の底面でのせん断応力が限界掃流力をこすか否か、そして低水路での高水敷高さに渡る断面平均濃度が高水敷における断面平均平衡浮遊砂濃度より大きい小さいかで異なった分布をすることが分かった。

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費重点領域研究(1)、及び一般研究 c (代表 山田正)のもとに行われている。また本研究を行うに際して著者らは北海道大学 長谷川和義博士より数々の貴重な助言を頂いている。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献 (1) 芦田和男・道上正規：浮遊砂に関する実験的研究、京都大学防災研究所年報、第10号B、p. 63-79, 1967. (2) Kalinske, A. A.: Suspended Material Transportation under Non-equilibrium Conditions, Trans. A. G. U., 1940. (3) Mei, C. C.: Nonuniform Diffusion of Suspended Sediment, ASCE, Hy. 1, pp. 581-584, 1969. (4) Hjelmfelt, A. T. and C. W. Lenau: Nonequilibrium Transport of suspended Sediment, ASCE, Hy. 7, pp. 1967-1586, 1970. (5) 岡部健士：貯水池における堆砂過程とその予測に関する基礎的研究、京都大学学位論文、1982. (6) Chandrasekhar, S.: Stochastic Problems in Physics and Astronomy, in Selected papers on Noise and Stochastic Process, Dover Publications, 1954. (7) 板倉忠興：河川における乱流拡散現象に関する研究、北海道大学学位論文、1984.