

II-24

壁面近傍の乱れの中に見いだされる
組織的運動に関する研究

北海道大学工学部 正会員 山田 正

北海道大学工学部 学生員 嶋田啓一

1. はじめに 今日壁面せん断流れにおいては組織的運動あるいはコヒーレント運動と呼ばれているものが存在しており、この運動は壁面の粗滑、形状にそれほど影響を受けずに普遍的に存在することが知られている。本研究はこのような考え方のもとに壁面せん断流（特に滑面）においてレイノルズ応力の発生において重要な働きをしている壁面近傍の縦渦、縦渦の発生に関しこれを解析的に明らかにし、かつ壁面近傍の乱れの構造に関して実験的及び理論的に検討を行ったものである。

2. 渦糸の測定 本研究では十分発達した乱流中に見いだされる組織的構造に着目しているが、ここでは層流あるいは比較的レイノルズ数の小さい開水路流れに人工的あるいは自然発生的に見いだされる渦糸の可視化を通して乱流現象の理解を深めることにした。2.1) 渦糸の可視化方法 渦糸の可視化に関してここでは開水路底面に染料（過マンガン酸カリウム）をあらかじめ敷き詰めておき、この状態に静かに通水し、流すことによりこのとき発生する渦糸を水路側面あるいは上部より観察測定した。2.2) 渦糸の発生 a) 人工的に発生させる場合：1) 水面に波を立てる方法、2) 底に 2 mm の角材を設置しこれを壁面に平行に流れ方向に振動させる。2) 自然発生的な渦糸：ある程度流速が大きいときには上記の角材が粗度となりその角部から渦糸が舞い上がる。あるいは水路に適当な高さの直角段落ちを作るとその段落ち部から渦糸が捲れ上がるようにほぼ周期的に発生する等の方法があり、著者らはそのどれについても実験を行ったが、本論文では紙面の制限から開水路底面に角材を静置した場合の結果のみを記す。図1は滑面水路における流速分布の1例である。この図より流れはポアズイユ流れを示す層流ではなく、乱流の対数分布をしているが、実際には乱れの程度は極めて弱く、目視では層流に見える程度の流れである。写真1はこのとき得られた水路上方から撮った写真である。この写真には水路の横断方向に数本の渦糸が存在しており、次第に変形しつつ乱流の様子を示していることが分かる。写真2はこのときの水路横から撮った写真である。これらの写真から渦糸の発生、変形を模式的に示すと図2のようになる。これらの写真や図より角材に平行に発生した渦糸は下流に流されるに連れて2—5 cm程度の波長をもって波うちながらしだいに引き延ばされ3角形あるいは馬蹄形になる。さらにこのとき馬蹄形の先端は少し上に持ち上げらる。この渦糸の挙動は発生方法を上記のように様々に変えてみてもほぼ同様であった。図3はこのときの水路平均流速と用いた角材の辺の長さに対する発生周期の関係を示すものである。この図より渦糸の発生周期は平均流速に対して線形に増大していることが分かる。

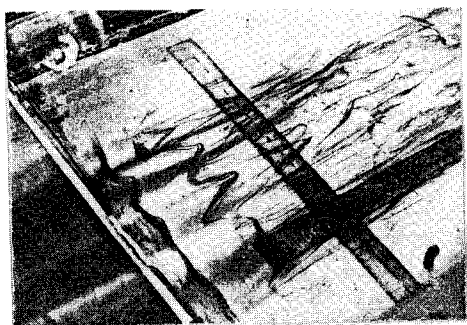


写真1 水路上方から撮った渦糸の挙動

写真2 水路側面から撮った渦糸の挙動

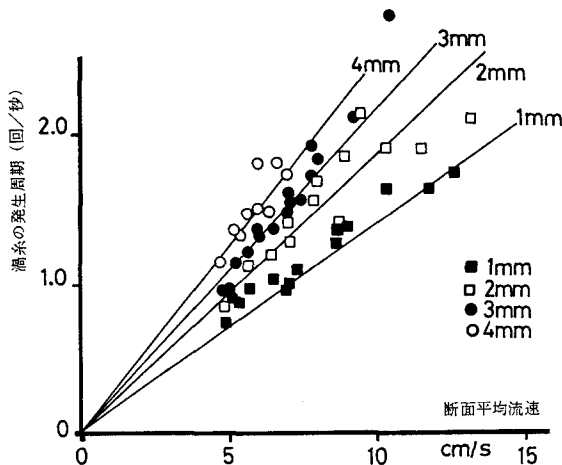


図3 渦糸の発生周期に及ぼす平均流速の影響

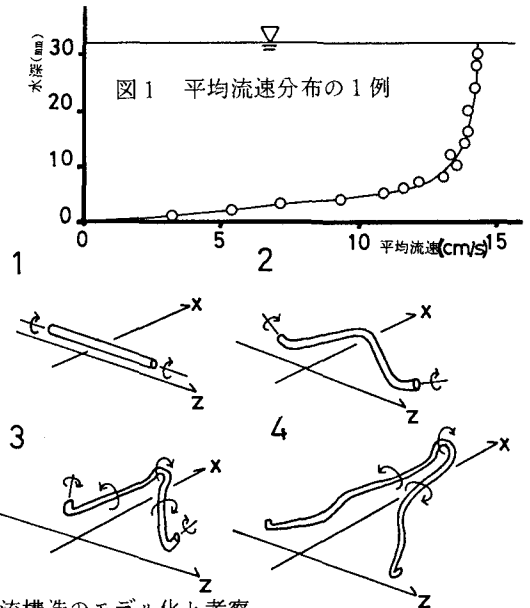


図2 渦糸の発生、変形の模式図

2. 壁面せん断流の粘性底層近傍にみられる縦渦及び乱流構造のモデル化と考察

(a) 乱流の不安定問題としての壁面近傍に発生する縦渦に関して：壁面近傍の縦縞、縦渦 (streak構造) がバースティング現象と密接な関連性を有していることが今日までに知られており縦縞の間隔は $y^+ = 100$ 前後になることが多くの研究者によって確認されている。本節は上記の現象を縦渦の不安定発生理論の観点から明らかにする。まずバースティング現象は流れ方向に $x^+ = 400$ 前後のスケールの構造をしていることから壁面近傍の流れは横断方向に比べて流れ方向の変化率は小さいことが考えられる。さらに流れは平均流 U 、他の場所から流れ込んできたスケールの小さい乱れ (background turbulence) u' 、そして組織的運動 u から構成されているとする。このとき u を支配する基礎式としてはかつて著者の一人 (山田) が開水路の縦渦の発生理論で導いたもの⁵⁾と形式上同じものであり、(1)式以降に示される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1) \quad u_i = \bar{u}_i + \tilde{u}_i + u'_i \quad p = \bar{p} + \tilde{p} + p' \quad (2)$$

$$\langle f' \rangle = 0, \quad \overline{\tilde{f}} = 0, \quad \overline{f'} = 0, \quad \overline{f'g} = \overline{f'g}, \quad \langle \tilde{f}g \rangle = \tilde{f} \langle g \rangle \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\langle \tilde{f}g \rangle = \overline{\tilde{f}g}, \quad \langle f' \rangle = \bar{f}, \quad \langle f' \rangle = \bar{f}, \quad \langle \tilde{f}g' \rangle = \langle \tilde{f}g' \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{r}_{23} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\tilde{r}_{33} - \tilde{r}_{22}) = \nu \nabla_x^2 \omega_x \quad (6) \quad \tilde{\omega}_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \quad \tilde{r}_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j}$$

$$\tilde{r}_{ij} = -2\varepsilon_t \tilde{S}_{ij}, \quad \tilde{S}_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_x = \nabla_x^2 \phi, \quad \varepsilon = \nu + \varepsilon_t \quad (7) \quad \phi = \phi_0(z) e^{ikx + ft} \quad (8)$$

$$\varepsilon \phi_0'' - (f + 2k^2 \varepsilon - \varepsilon_{zz}) \phi_0'' + k^2 (f + k^2 \varepsilon + \varepsilon_{zz}) \phi_0 = 0 \quad (9)$$

$$\phi_0(0) = \phi_0'(\infty) = \phi_0''(\infty) = \phi_0'''(\infty) = 0 \quad (9)^*$$

これを(3)と(4)式のもとに u_i に関して整理すると(5)式を得る。(5)式から流れ方向渦度 ω_x を求めると(6)式を得る。さらにこれを(7)式のNewtonian eddy modelを用い、次に(8)式に示す流れ関数を仮定すると、組織的運動を表す基本式として(9)式を得る。ここに z は鉛直方向座標、方向微分、 k は計算に与える流れの横断方向の波数、 f はその正負が攪乱の増大、減衰を表す。ここに ϵ は縦渦に関する流れ関数であり座標および各諸量は摩擦速度 u_* 、粘性底層厚 $\delta (= 10\nu/u_*)$ で無次元化されている。このとき(9)式を(9)*式に示す境界条件のもとに解き、縦渦の発達を示す固有値($f > 0$ で発達)と縦渦の横方向波数 k との関係を求めた。(7)式中の ϵ (動粘性係数+渦動粘性係数)としては壁面極めて近傍から流れのcore領域に至るまで実験結果との適合性が非常に高いといわれているMellor and Herringの与えた関数形を用いた。しかしこのときには全ての k の値に対して f はすべて負であった。さらに ϵ として上記と同形のReichartの提案する関数形を用いたがこのときも f は全て負であった。このことから ϵ として時間平均された関数形を用いる限り縦渦は発生しないと結論されよう(定性的には乱流の流速分布の安定問題として横断方向の2次元攪乱を扱ったHussain and Reynolds, LandahlやBetchovらの結果と同じ結論である)。つぎに ϵ として上記以外の種々の形状を与えて $f > 0$ となる

ϵ を捜してみた。図-4はかつてBetchovが乱流境界層の2次元攪乱に対する安定性を解析したときに用いた ϵ の関数を本解析に適用したものである。すなわち壁面近傍(粘性底層の端)で一度大きな値をとった後急激に降下する形の ϵ である。図-5はこのとき得られた k - f の関係であり $k > 0.5$ ($1/\delta > 200$)で $f > 0$ (縦渦が発生)であることを示している。図-5の中の f には最大値が現れないがGoertler渦の計算においても最大増幅率は現れないことから流れ方向の変化を無視した安定解析に共通の結果のように思われる。図-6はこのとき得られた中立攪乱($f=0$)の場合の固有関数(ここでは横方向流速 v)を示したものである。図-7は図-4の ϵ の分布形に対応する流れ方向流速の鉛直分布を示したものである。この図より壁面近傍の流れ方向流速は小さくなっておりその上に高速流体が乗っている状況になっていることがわかる。なお上記の固有値問題の解法には不変埋込み法の一種であるCompound Matrix法(7)を用いている。

(b) 壁面近傍の組織的運動のモデル化(特にレイノルズ応力に着目して)：本節は壁面近傍に縦渦が十分に発達して存在しているときのレイノルズ応力の時空間変化を調べたものである。ここでも上記と同様の仮定のもとに展開を行うと $i=1$, U に関して(10)式を得る。次に u, w として(11)式の形を採用すると $f(z, t)$ に関する方程式を得る。次に鉛直方向流速 w の振幅成分 g として(11)式の形を用いると $f(z, t)$ に関して解析解(15)式を得ることが出来る。ここで f の振動数(バースティング現象の周期 T_b)に関してはKleinらによって実験的に確かめられている(14)式を用いた。図-8

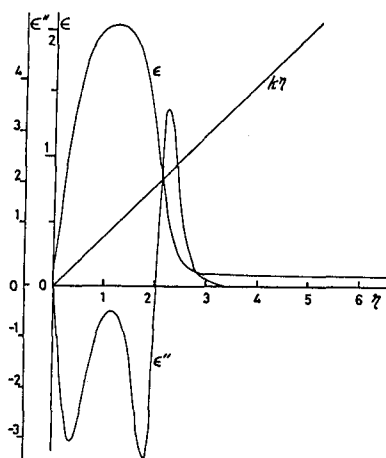


図4 不安定性を示す ϵ の分布

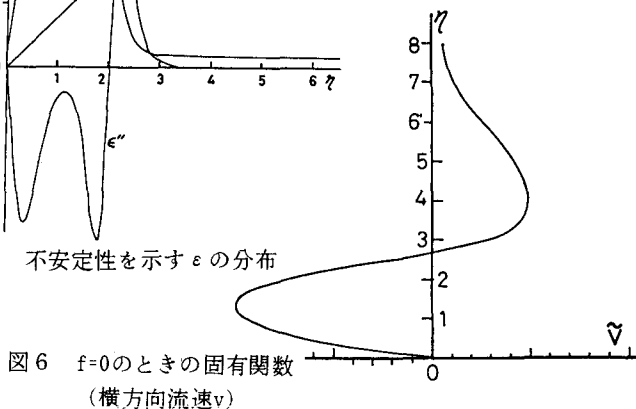


図6 $f=0$ のときの固有関数
(横方向流速 v)

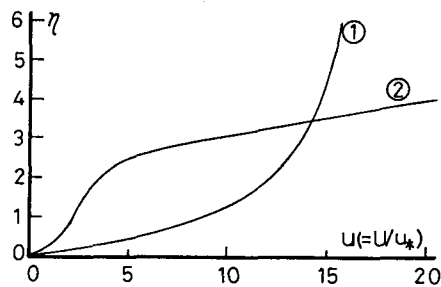


図7 図4に対する流速分布

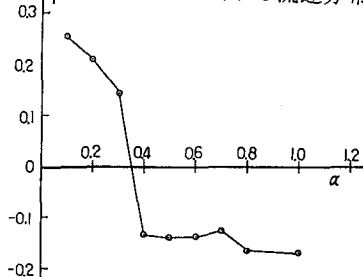


図5 縦渦の発生を示す f - k 関係

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{w} \frac{dU}{dz} - \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) = \nu \nabla_{\perp}^2 \tilde{u}_i, \quad i = 1 \quad (10) \quad z = \delta \eta, \quad t = \tau \delta / u_*$$

$$\tilde{u} = f(z, t) e^{i\alpha y} \quad \tilde{w} = g(z, t) e^{i\alpha y}$$

図8 uの時間変化とz方向分布

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{\partial f}{\partial z} = -\varepsilon \alpha^2 f + \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - g(z, t) \frac{dU}{dz} \quad (12)$$

$$g(z, t) = a \cdot \cos(\alpha \xi) \{ e^{-\beta \eta} - e^{-\gamma \eta} \} \sin(\omega \tau) \quad (11)$$

$$f = \exp(-\beta \eta) \left\{ \frac{\tau}{H^2 + \omega^2} (H \sin(\omega \tau) + \omega \cos(\omega \tau) - \omega e^{H\tau}) \right\}$$

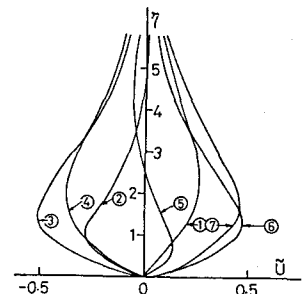
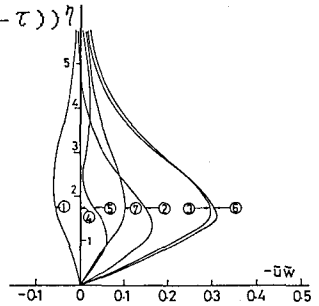


図9 レイノルズ応力の分布

$$- \exp(A\eta/2/B) \int_0^t \frac{\tau}{H^2 + \omega^2} (H \sin(\omega(t-\tau)) + \omega \cos(\omega(t-\tau))) d\tau$$

$$- \omega e^{H(t-\tau)} \cdot \exp(-h\tau - \eta^2/(4B\tau)) \frac{\eta}{2\sqrt{\pi B\tau^3}} d\tau \quad (15)$$

$$\frac{u_*^2 T_B}{\nu} = 0.65 Re \delta^{0.73} \quad (14)$$



$$A = -\frac{d\varepsilon}{d\eta}, \quad B = \varepsilon, \quad C = -\varepsilon \alpha^2,$$

$$h = (A^2 - 4BC)/4B,$$

$$H = B\beta^2 + 4\beta + C \quad (13)$$

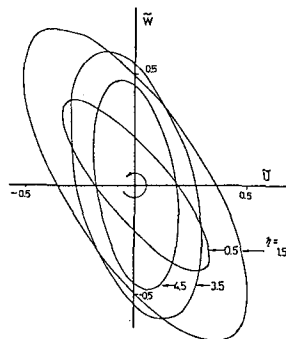
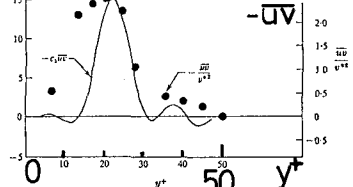


図10 u-wの相関図

図11 バースティング時のレイノルズ応力の分布



はこのとき得られた u の時間経過にともなう z 方向の分布形を示すもので w の最大値に対応して u も粘性底層端で最大値を示している。図-9はレイノルズ応力の分布を図-10は $u-w$ の相関図を示している。これらの結果は上式中のパラメーターの値の違いによって多少の変化を示すものの大略図-8、9、10で表されているものと同様の結果になっていた。図-9に示されるバースティングにともなうレイノルズ応力の分布は Klein らによって実験的に示されているもの（図-11）と同様の形状となっている。本計算では $t=0$ で $w=0$ 、 $t=0$ から突然周期的に変動する w の条件で計算しているが動き始め直後の u もレイノルズ応力ともに定常時のものよりも大きな値を示している。本節の結果を要約すると（1）滑面上の流れの壁近傍で見いだされている組織的運動を壁近傍での乱流境界層の不安定機構に基づき発生、発達する縦渦と関連づける解析方法を提示した。（2）壁近くの縦渦は $1^+ > 200$ で発生する。（3）このときの縦渦は $Z^+ > 100$ で減衰している。（4）縦渦が発生するときの流れ方向流速は壁面近傍で小さくその上方には高速流体がのっている。（5）定常状態の ε を用いる限り縦渦は発生しない。（6） u の位相は w に対して若干遅れるがその最大値を示す高さはほぼ同じである。（7）レイノルズ応力の分布は実験結果と同様に $Z^+ = 10-20$ 前後で最大値をとり $Z^+ > 100$ ではほぼ0となる。（8）本解析の結果壁面近くの組織的運動はほぼ $0 < Z^+ < 100$ の領域内で発生消滅している。

(c)組織的運動の波動論的取扱：本節では組織的運動を波束(wave packet)の運動として捕らえ、ある初期状態から出発した波束がどの様に振舞うかを検討した。ここで用いる方法はかつて著者の一人(山田)が海岸に打ち寄せる波浪の変形計算に用いたいわゆる 幾何光学, WAVE RAY METHOD である。(1)波束の移動速度 幾何光学では波束の移動は群速度に等しい。一方群速度を求めるためには波動の分散関係式を知る必要がある。まず流れの基礎式は線形化したNS方程式、連続式(16)、(17)式であり、これから底面に垂直上向きの速度 v (本節では前節の座標系と異なり鉛直上向きに y をとっている)に関して(18)式を得る。この v として(19)式のように波動タイプを採用し、(18)式に代入すると(20)式を得る。次に群速度の定義を用いると(20)式となり、波束の中心位置 (x, y, z) の移動速度は(22)式で与えられる。(2)波数の変化 波数 (α, β, γ) の変化は波数の保存式(23)式で与えられる。(3)エネルギー密度の変化 流れがあるときの波束の持つエネルギーは Bretherton and Garret によって初めて見いだされた波作用量(wave action, E/σ_m , E はエネルギー密度)の保存則、(24)式がある。これを(25)式を用いて書換えると(26)式となる。以上の(22)、(23)、(26)式が流速分布を持つ流れの中での波束の運動を支配する基礎式である。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} \end{aligned} \quad (16) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right] \nabla^2 v' - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$v' \propto \exp(\sigma t - (\alpha x + \beta y + \gamma z)) \quad (19) \quad \sigma = U \alpha + \frac{\alpha U''}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad (20)$$

$$C_{gi} = \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_i} \quad (21)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial k_i} \quad (22)$$

$$\frac{E}{\sigma - U \alpha} = \text{const.} \quad (24)$$

$$\frac{dk_i}{dt} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad k_i = \alpha, \beta, \gamma \quad (23)$$

$$\frac{dE}{dy} = C(-U' \alpha) \quad (25)$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{2 \alpha \beta U'}{k^2} \quad (26)$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dy} = -\frac{U'}{U''} k^2$$

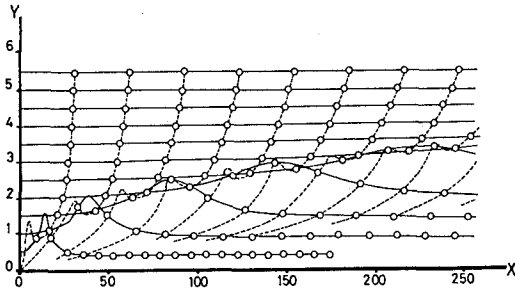


図 1 2 波束の軌跡

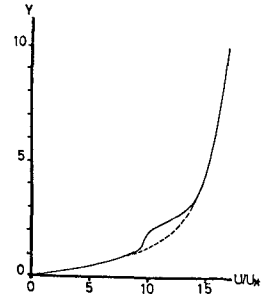


図 1 3 歪んだ平均流速分布

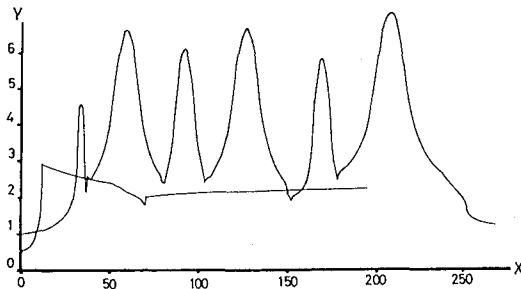


図 1 4 図 1 3 に対する波束の軌跡

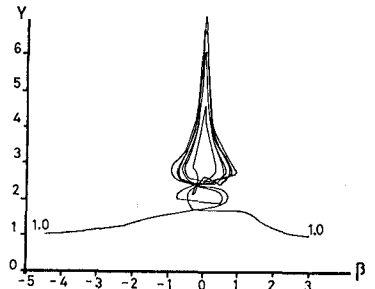


図 1 5 $y-\beta$ 相平面での波束の軌跡

(4) 計算及び計算結果の考察 上記の基礎式は $x, y, z, \alpha, \beta, \tau, E$ の 7 つの未知数からなる 7 元連立常微分方程式である。これを適当な初期条件のもとに Runge-Kutta-Gill 法を用いて差分計算した。図 1 2 はいくつかの高さから波束を放出したときの各波束の軌跡を示している。なおこのとき用いた平均流速 U の分布は通常対数分布である。初期位置としてそれぞれの y 方向の高さから出た波束の全ては必ず y 方向に上昇、伝播している。これは前節の実験において見いだされた渦糸の上昇や、馬蹄形渦の首の持ち上がりに対応しているものと考えられる。さらに上昇するにつれて図には示していないがエネルギー密度は次第に大きくなっている。図中の縦に入っている点線は水素気泡を計算機上で発生させたとしたときの観察される線である。また波束の移動で高い位置にきた所で横に移動し、波束はねじれながら上昇している。これは流れの core 領域においても縦方向の渦が存在することを示している。しかしこれらの波束は上昇しても滑らかに下降しもとの高さになり、大きな乱れは期待できない。

ところで前節において縦渦が発生するためには平均流速の歪が必要であったが、ここにおいても図 1 3 に示す歪んだ流速分布を与えてみた。このときの多くの計算では波束はあたかも流速分布の歪の部分にトラップされたかのようにその中に留まりつつ縦渦様に回転している。しかし計算条件によっては図 1 4 に示すように一見ランダムなあるいはカオス的な動きをする場合がある。図 1 5 はこのときの $y-\beta$ 相平面での挙動を示している。この図よりある期間ある領域に存在していた解はなにかのきっかけで別の領域に移ってしまう。このような挙動とその条件については未だ十分に明かではない。本節の結果を要約すると、(1) 波束は必ず鉛直上方に上昇し、このとき波束のエネルギー密度は増大する一主流からエネルギーをもらう。またいくつかの波束は流れ方向に捻れながら進行する。(2) 流速分布に僅かな変曲点を与えると、波束の移動は大きく変化し、あたかも乱流中の大規模乱れの様な挙動をする。

参考文献 (1) 山田正、渡辺一浩、小森宏：土木学会論文集、N0. 342, pp. 143-152, 1984. (2) 山田正、川端規之、日野幹雄：第 12 回乱流シンポジウム, 1980. (3) 山田正、川端規之：土木学会論文集, pp. 81-91, 1982. (4) 山田正、川端規之：土木学会論文集, pp. 69-80, 1982. (5) 林泰像造、山田正：第 12 回水理講演会論文集, 1977. (6) 山田正：第 3 7 回土木学会年次学術講演会概要集 2, pp. 471-472, 1982.

(7) Ng, B.S. and Reid, W. H., J. computational physics, 30, 1979. (8) Kim, H. T., S. J. Kline and W. C. Reynolds : J. fluid mechanics, vol. 50, 1971. 謝辞 本研究の一部は文部省科研費(代表日野幹雄、東工大教授、及び代表山田正北大)の補助のもとに行われている。