

II-23 非線形性を考慮した波の屈折、回折 及び減衰に関する研究

北海道大学工学部 正会員 山 田 正
北海道大学工学部 学生員 洪 延 芳

1. 緒言 従来の波の屈折、変形計算理論ではある種の海底地形の場合（暗礁や局所的な浅瀬がある場合）には波向線（波の向きを示すベクトル）が互いに一点に集中し焦点や焦線（caustics）を形成し計算上この点で波高が無限大になるといういわゆる波向線交差問題が存在していた。また流れがある場合についても従来の理論では解析が困難であった。このような実状より本研究では以下に示す2つの方法により上記の問題を解決することを試みた。（1）山田、渡辺、小森らの研究（3）でその特性が明らかにされた非線形幾何光学理論に基づく手法をさらに押し進め、より精度の高い解析法を考案し、同時により一般的な条件の基での電算機処理アルゴリズムを開発する。（2）Berkhoff（1972）やSchonfeld（1972）らに始まるMild Slope 方程式と同様な方程式を導き、これに関しても一般的な境界条件の基での電算機処理アルゴリズムを開発する。

2. 従来の研究 上述の波向線交差の問題に関して伊藤、谷本らはいわゆる数値波動解析法を提案した（1、2）ことは周知のことである。これは運動方程式を線形化して屈折による回折効果を取り入れることにより波向線交差の問題を解決した。その後この方程式の延長上の方程式としていわゆるMild Slope 方程式がBerkhoff（1972）とSchonfeld（1972）により独立に導き出された。さらに渡辺、丸山ら（1984）によつて異なる方法によつて、かつより簡便に同様の方程式が導き出された。Mild Slope 方程式とは以下の式で表されるものであり、微小振幅波が穏やかに変化する海底上を進行する場合の水面波を支配する方程式として提案されたものである。

$$\nabla \cdot C C_g \nabla \cdot \varphi + \sigma^2 \varphi \frac{C_g}{C} = 0 \quad (1)$$

ところでこの方程式は数学上は楕円型の偏微分方程式であり全周の境界条件が与えられたときのみ解を有し、広い領域についての数値計算には膨大な計算を必要とし実用には不向きである。Radderは(1)式を方物型に変形して解いており、数値計算上も、いくつかの工夫を加えて結果を導いている。さらにこれらとは全く別の手法としてWhitham, Lighthill, Benjaminらによつて提唱された水面波の変調不安定の問題があり、深海波の場合スペクトル法を使ってZakharoffによつて導かれた方物形の方程式がある。

$$i(A_t + \frac{\sigma_0}{2k_0} A_x) - \frac{\sigma_0}{8k_0^2} A_{xx} + \frac{\sigma_0}{4k_0^2} A_{yy} - \frac{1}{2} \sigma_0 k_0^2 |A|^2 A = 0 \quad (2)$$

ここに水表面の式 η と波の複素包絡線 A との関係は $\eta = A(x, y) \exp(i(k_0 x - \sigma_0 t)) + c. c.$ 、 x, y はそれぞれ波の進行方向及びそれと直角方向の座標 k_0, σ_0 はもとの波の波数及び角周波数である。

3. 非線形幾何光学理論による基礎式 本研究では山田、渡辺、小森らの提案している非線形幾何光学理論に基づく波動解析法を採用し、全ての波動現象を支配する基礎式にできるだけ忠実に計算を進めることを目的の1つとしている。

(1)基礎関係式：分散関係式としてはStokesの第3次近似までとつた関係式を使った。

$$\sigma^2 = \sigma_0 \{1 + (ak)^2 F_1(kh)\}, \quad \sigma_0 = gk \tanh(kh) \quad (3)$$

ここに $F_1(kh) = 1 + 1/\sinh^2(kh) + 9/8 \sinh^4(kh)$ h は水深
流れがあるときの波数の連続式は

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_i} \Big|_{k_i} + k_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \Big|_{k_j} = 0, \quad \sigma_m = \sigma - U_j k_j \quad (4)$$

ここに k_i は i 方向の波数、 σ は周波数、 U_j は j 方向の流速である。次に波束の中心部の移動速度は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_i} = C_{gi}, \quad \frac{dx_i}{dt} = C_{gi} + U_i \quad (5)$$

流れがあるときの波の保存量としては波作用量 (wave action) があり、次式の保存形で表現される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\sigma_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{E}{\sigma_m} (C_{gi} + U_i) \right\} = 0 \quad (6)$$

ここに E は波のエネルギー密度である。

(2) 基礎方程式の変形：上記の式群を変形し、より具体的な形で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dt} = - \left\{ \left\{ 1 + \beta (ak)^2 \right\} \frac{gk^2}{2\sigma_0 \cosh^2(kh)} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} + \sigma_0^2 k^2 \beta \frac{\partial a^2}{\partial x_i} \right\} \Big|_k \\ - \sigma_0 k^3 a^2 \left(\frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} + \frac{9}{4} \frac{\cosh(kh)}{\sinh^5(kh)} \right) \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_k - k_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \Big|_k \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \left\{ 1 + \beta (ak)^2 \right\} C_{gi} \frac{k_i}{k} + a^2 \sigma_0 k_i \left\{ -kh \left(\frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} + \frac{9}{4} \frac{\cosh(kh)}{\sinh^5(kh)} \right) + 2\beta + \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{\beta k^2}{a^2 k_i} \frac{\partial a^2}{\partial k_i} \right\} + U_i \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2}{\sigma_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{a^2}{\sigma_m} (C_{gi} + U_i) \right\} = 0 \quad (9)$$

4. 数値計算

本研究では以下に示す方法により上記の式群の計算をおこなった。まず上記基礎方程式をマトリックス表示すると次のように表示され、

$$U_y = -AU_x + b, \quad U_y = \left(\frac{\partial k_x}{\partial y}, \frac{\partial k_y}{\partial y}, \frac{\partial a^2}{\partial y} \right), \quad U_x = \left(\frac{\partial k_x}{\partial x}, \frac{\partial k_y}{\partial x}, \frac{\partial a^2}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} -C_{gx}/C_{gy}, & 0, & -S \\ 0, & -C_{gx}/C_{gy}, & C_{gx}S/C_{gy}^2 \\ 0, & 0, & -C_{gx}/C_{gy} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$B = \begin{pmatrix} -B/C_y \frac{\partial h}{\partial x} \\ -B/C_y + \sigma_m a^2 S/C_y^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C_y}{\sigma_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_x}{\sigma_m} \right) \right\} \\ -a^2 \sigma_m / C_y \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C_y}{\sigma_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_x}{\sigma_m} \right) \right\} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$S = \sigma_0^2 k^2 \beta, \quad B = \left\{ 1 + \beta (ak)^2 \right\} \frac{gk^2}{2\sigma_0^2 \cosh^2(kh)} - \sigma_0 k^3 a^2 \left\{ \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} + \frac{9}{4} \frac{\cosh(kh)}{\sinh^5(kh)} \right\} \quad (13)$$

すなわち(10)式に示す三元連立偏微分方程式を解くことになる。差分法としてはLax-Wendroff schemeを採用した。以下に上記の基礎式に基づき海底地形が球面浅瀬をしているときの水面波の変形に関する計算結果を示す。ここで本研究で言及する球面浅瀬の概念図を図-1に示す。

(1)初期条件 領域 (XL, YL)の $y=0$ のライン上の波のデータ k_x, k_y, a^2 を与える。(2)境界条件 $x=0, y=xL$ の境界条件については完全反射あるいは透過条件等があるがここではすべて周期境界条件を採用した。(3)水底条件 緩やかな海底地形の変化を考えていることより静水状態での各地点の水深を与える。

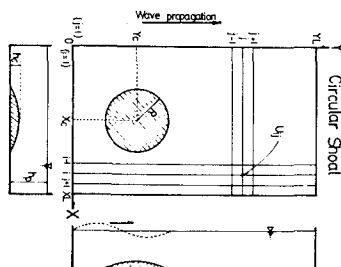


図-1 球面浅瀬の概要

5. 計算結果と考察 数値計算によって得られた結果

の一部を図-2から図-4に示す。これらの図は波高比を立体的にながめた場合の図である。 図-2は初

期波の進行方向が y 軸に平行で領域は(600, 1000m), 水深20m, $h_c=12$ m, $R=80$ mの球面上を初期波長40m, 初期波高2.5mの波が進行する場合である。図-3は同じ領域で図の左側に示すような三角形分布の x 方向流速があるとときの波高比の様子である。図-4は水底に多数の球面を配置して計算を行った例で、このように複雑な海底地形の場合でも安定に計算できることが分かった。このほか今回の計算では波数ベクトル図、等位相線図、等波高比図を計算機で図形処理し解析した(図-5から図-7参照)。図-8は2つの球面浅瀬によるそれぞれの波高比の変化が互いに交差する場合に、それらの波高比変化が交差後もその形を変えずに進行することが示されている。この現象は2つの衝撃波が交差するときの様子と類似している。さらに2つのソリトンが衝突するときの現象にも似ている。このことは本研究で採用している基本式群からソリトン解をもつZakharoff方程式が導かれることから、ソリトン的な解が得られてもなんら不思議ではないであろう。

6. 波浪変形に関する基本式の導出と現地海岸への適用一緩勾配方程式の導出

前節に示した解析方法は流れがある場や屈折の効果を良く表現しており沖波のshoalingに伴う波浪の変形計算には十分に使えるのに対して、障害物周辺への波の回り込み即ち回折効果を精度良く表現できないと言う欠点を有している。これを克服するために新たに検討を行った。まず波浪変形を支配する緩勾配式を導出するにあたって用いる基礎式は、線形化したオイラーの運動方程式並びに連続方程式である。すなわち、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)$$

(14)、(15)、(16)

ここに、 U, V は水粒子速度の水平方向成分、 η は水面変位、 P は圧力であり微小振幅波理論に基づくものである。また $\mathbf{Q}$ は (Q_x, Q_y) で $Q_x = \int_{-h}^0 u dz$, $Q_y = \int_{-h}^0 v dz$ である。(14、5)式について各瞬間瞬間における運動量フラックスが保存されるようにそれぞれの式に流速成分 U, V を乗じ、次にこれを海底から水面まで積分してこれを線流量 Q_x, Q_y で割る。これは水理学における運動量補正係数を導入する考え方に相当している。この結果得られた式と(16)式を用いて、 Q_x, Q_y を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left\{ \frac{c^2}{n} \nabla \cdot (n \eta) + g \eta \left\{ 1 - \frac{1}{n \cosh^2(kh)} - \frac{1}{2n} \tanh^2(kh) \nabla \cdot \mathbf{h} \right\} \right\} \quad (17)$$

ここに k は波数、 h は水深、 $n=1/2(1+2kh/\sinh(2kh))$ である。ただしこの式変形を行う途中で波高 H を含む微分項がでてくるが、ここでは他の項に比較して微小として扱い、省略している。(17)式の精度を検討するためにここでは微小振幅波理論の浅水係数と(17)式の数値計算の結果とを比較した。図-9の実線が微小振幅波理論を、点線が(17)式の数値計算の結果を示す。また(17)式の右辺第一項のみを用いて計算した結果を一点鎖線で同時に示している。この図から(17)式をそのまま使用して計算すると、微小振幅波理論の浅水係数よりも大きめの値を示すことがわかる。これに対して、左辺第一項のみ

を用いて計算した結果は微小振幅波理論の結果に非常に近い値を取っていることがわかる。このことから以後の計算では(17)式で右辺第二項を省略した以下の(18)式を基本式とする。この式は渡辺らが波浪変形の計算において提案している連立方程式と等価の方程式になっている。ここで(18)式の右辺の $1/n$ 及び n をそれぞれ一つづつ()の外に出すと次のようにBerkhoff形の方程式になる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{n} \nabla \cdot n c^2 \nabla \cdot \eta, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left\{ \frac{c^2}{n} \nabla \cdot (n \eta) \right\} \quad (18), (19)$$

7. 数値計算の結果 ここでは(18)式を用いて数値計算した結果のいくつかの例を示す。図-10は伊藤・谷本の球面浅瀬に関する実験結果と本計算結果を比較したものであり、実験値と計算値はよく一致している。図-11は離岸堤周辺の波高分布の計算結果を等波高比線図で表したものであり、図-12にはこの計算値とSommerfeldの半無限堤に関する厳密解とを比較したものを示す。この結果より、反射波領域については良くあっているが離岸堤背後での回折波領域では本計算結果は厳密解の値より多少小さめの値を示してはいるものの、全体的には良好な一致を示していることが分かる。図-13は離岸堤が波の進行方向に対して直角でない場合についての計算例であり、離岸堤による波の反射及び遮蔽効果が良く再現されているといえよう。図-14は前節に示した計算方法による結果と(18)式の本節の方法との比較をしたものである。この図より屈折が支配的な場合には両者はともに同一の精度を有していることが解る。なお海底摩擦による、あるいは碎波後の波高減衰を考慮するためには方程式を波動型から電信方程式タイプに修正すれば良いことから、理論展開の細部を省略して結果のみを記すと、(20)式を得る。図-15は(20)式を用いてshoalingに伴う波高の増大の後の碎波による波高減衰に関する計算と実験結果を比較したものである。この図より(20)式は十分の精度で碎波後の波高減衰を記述し得る式であることが解る。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + f \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{n} \nabla \cdot n c^2 \nabla \cdot \eta \quad (20)$$

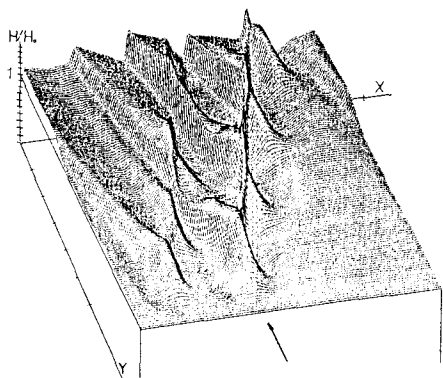
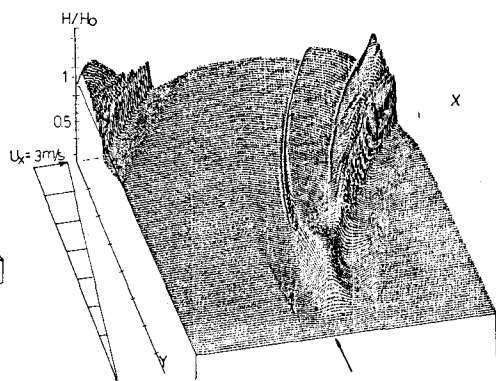
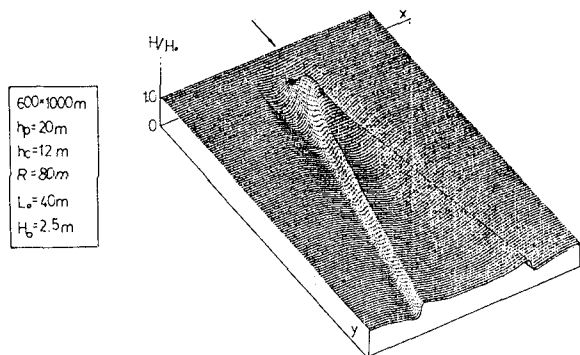


図-2 球面浅瀬通過時の波高比の分布

図-3 球面浅瀬に横からの流れがある場合

図-4 いくつかの球面浅瀬が存在する場合

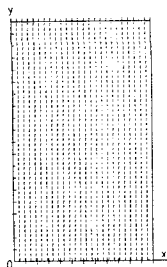


図-5 球面浅瀬通過時の
波数ベクトル図

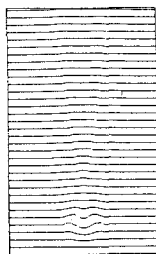


図-6 等位相線図 (球面浅瀬の直上で位相の
ジャンプが見られる)

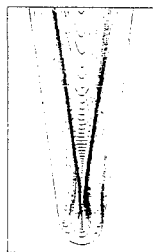


図-7 等波高比線図

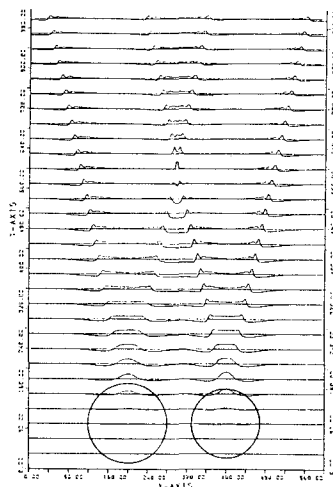


図-8 2つの球面浅瀬通過時の
波高比の交差現象

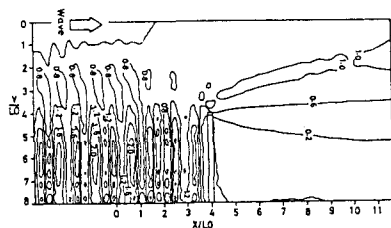


図-11 離岸堤周辺での波高分布 (90°)

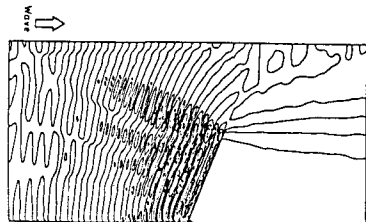


図-13 離岸堤周辺での波高分布 (110°)

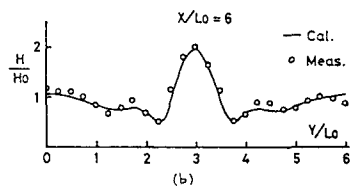
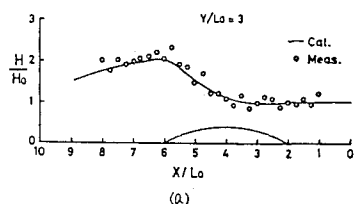


図-10 球面浅瀬の計算値と伊藤、谷本らによる
実験値との比較

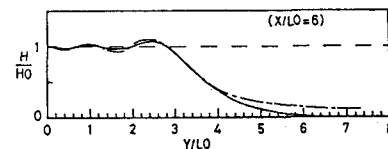
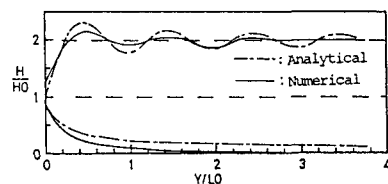
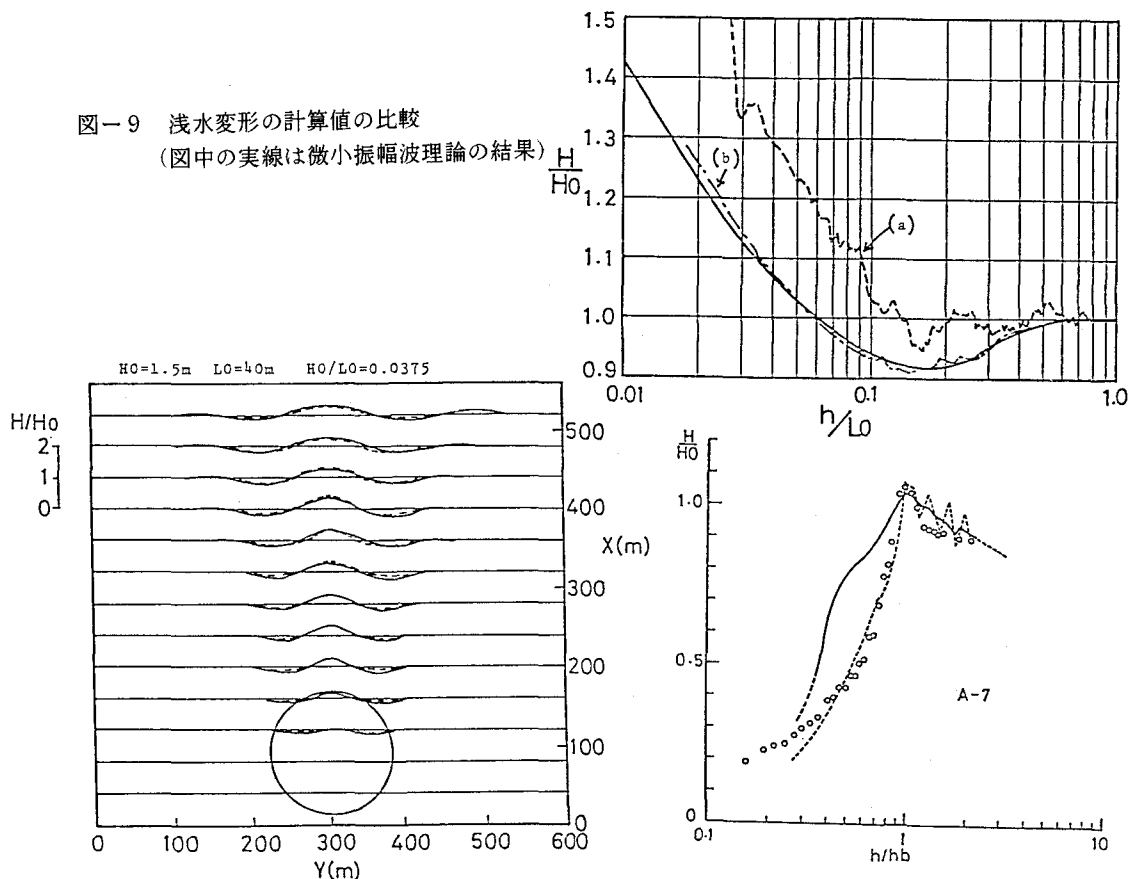


図-12 離岸堤周辺での波高分布の計算値と
厳密解との比較

図一 9 浅水変形の計算値の比較

(図中の実線は微小振幅波理論の結果)



図一 14 式 (10) と式 (18) の計算値の比較

図一 15 SHOALINGにともなう波高増大と
砕波後の波高減衰

9. まとめ

本研究で導出した波浪変形に関する基本式は波の海底地形に起因する屈折や構造物周りの回折、海底摩擦による波高減衰の特長を良く再現していることが分かった。

謝辞 本研究の一部は文部省科研費（代表日野幹雄、東工大教授、及び代表山田正北大）の補助のもとに行われている。

参考文献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利：新しい方法による波動の数値計算、運輸省港湾技術研究所報告第10巻、第2号、PP. 97-111, 1971.
- 2) 伊藤・谷本：波向線交差領域での波の屈折、第19回海岸工学講演会論文集、pp. 325-329、1972.
- 3) 山田正、渡辺一浩、小森宏：非線形性を考慮した水面波の屈折に関する研究、土木学会論文報告集、PP. 143-152, 1983.
- 4) 首藤伸夫：海の波の水理、新体系土木工学24、技報堂出版、1981.
- 5) 井島武士：海岸工学、朝倉書店、1970.
- 6) 富永政英：海洋波動—基礎理論と観測成果—、共立出版、1976.
- 7) 渡辺晃、丸山康樹：屈折回折波浪減衰を含む波浪場の数値解析法、第31回海岸工学講演会論文集、1984、pp. 103-107、1984.
- 8) Berkhoff, J. C. W. : Computation of Combined Refraction-Diffraction, Proc. 13th CEC, pp. 471-490, 1972.