

II-18 ゆるやかな形状をもつ 河床波上の流れの解析

北海道大学工学部 正 員 山田 正
北海道大学工学部 学生員 大前 智敬

1. はじめに

河床波上の流れにおいては壁面せん断応力と波面との間に位相差 ϕ が生じることが知られている。このことは河床波の発生を考えるうえで重要であり、Kennedy⁽¹⁾、林⁽²⁾らの研究によって初めて明らかにされた。その後著者ら^(3,4)も河床波の発生に及ぼすせん断応力の分布に関して実験的、理論的研究を進めており、小規模河床波の発達を記述する方程式を導いている。ところで、上記の位相差を解析的に導いたものとして Miles⁽⁵⁾、Benjamin⁽⁶⁾、Stewart⁽⁷⁾、Davis^(8,9)、Hsu⁽¹⁰⁾、日野⁽¹¹⁾、岩佐⁽¹²⁾らの研究があり、数値計算により層流の場合を計算したものとして J. S. Lee、Y. C. Fung⁽¹³⁾の研究がある。本研究は松信⁽¹⁴⁾の示した解析方法に準じ、上記の位相差に関し層流中における河床波上の流れをより精度よく解析的に明らかにすることを目的としたものである。本研究では数式処理言語である REDUCE を用い、高次摂動解を何らの省略も行わずにコンピュータ上で求めている。

2. 基礎式および計算手法

2-1 問題設定および基礎方程式

図-1(a)のような x 軸に関して対称なゆるやかな波状境界面をもつ流れを考える。壁面は、 $y = Hh(kx)$ で与え、流れは2次元定常流とする。ここで、 H ：流路の半幅、 L ：河床波の周期、 k ：断面が非一様である領域の特性的長さの逆数 ($k = 1/L$)、 $h(kx)$ ：境界断面の形状を与える関数 (x について任意回微分可能)、 κ ：断面の空間的变化のゆるやかさを表す無次元パラメータ ($\kappa = kH = H/L$)、 a ：河床波振幅、 ℓ ：河床波振幅間の距離とする。 $\kappa = 0$ の極限では断面は一様となり、流れは平面 Poiseuille 流に帰する。次に空間座標 (x, y) の無次元化を行うと、 x 方向、 y 方向は、それぞれ

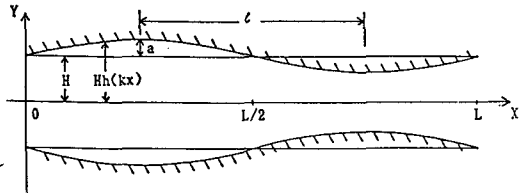


図-1(a) 境界断面形状(SIN形)

$$\xi = kx = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{Hh(kx)} = \frac{y}{Hh(\xi)} \quad \dots (1)$$

となり、流れの領域は、 $-1 \leq \eta \leq 1$ で表される真つすぐな平行断面内部に写像される。2次元の Navier-Stokes の方程式より次式を得る。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad \dots (2)$$

ここに、 ψ ：流れ関数、 ω ：渦度、 ν ：動粘性係数である。(1)式を用いて(2)式の独立変数を (ξ, η) に変換すると、

$$\frac{\kappa}{h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = \frac{\nu}{h^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \kappa^2 h^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{h'}{h} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \omega \right] \quad \dots (3)$$

となる。

解析するにあたっては次の3つの条件を考慮する。

① ξ 軸に関して対称となる解、すなわち、

$$\phi(\xi, -\eta) = -\phi(\xi, \eta)$$

② $\eta = \pm 1$ において $u=0$ 、すなわち、

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_{\eta=\pm 1} = 0$$

③ $\eta = \pm 1$ において $v=0$ 、すなわち、

$$\psi_{\eta=\pm 1} = \text{const}$$

本研究の解析で用いる波状境界面形を示しておくと、図-1(a)に示すようなSIN形および図-1(b)、(c)で示すようなDUNE-1形、DUNE-2形である。

2-2 基礎方程式の展開

流れの諸量を直交関数である超球多項式（または Gegenbauer 多項式） $C_n^q(\eta)$ を用いて展開する。流れ関数 ψ の展開は、

$$\psi = -\frac{1}{3}HU \sum_{n=1}^{\infty} h(\xi) A_{2n}(\xi) C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \dots (4)$$

となる。ここで、 U ：代表流速、 $A_{2n}(\xi)$ ： ψ に関する展開式である。このような展開は、超球多項式の直交性のために常に可能である。(4)式を基にして、流れの各諸量の展開形を求め、(3)式に代入すると解くべき基礎式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}(\xi) C_{2n-1}^{5/2}(\eta) \\ &= \frac{1}{3} \kappa \text{Re} \left\{ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega'_{2n}(\xi) C_{2n-1}^{1/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}(\xi) C_{2n}^{-1/2}(\eta) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3h(\xi)} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (h(\xi) A_{2n}(\xi))' C_{2n+1}^{-3/2}(\eta) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2n}(\xi) C_{2n-2}^{3/2}(\eta) \right\} \right\} \\ & \dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 Re ：レイノルズ数、 $\Omega_{2n}(\xi)$ ： ω に関する展開式、 $N_{2n-1}(\xi)$ ： $\nabla^2 \omega$ に関する展開式である。(以後、 $\varepsilon = \kappa * \text{Re}$ とする。)

2-3 摂動法による解

前節で得られた(5)式はパラメータとして $\kappa * \text{Re}$ の形だけが現れている。また、 Ω 、 N の形より全ての未知数は κ^2 のべき級数に展開されることがわかる。計算を行うにあたってはREDUCEによる数式処理を用い、 ε^2 、 κ^2 の項まで求めた。計算手法は、 ε の0次、1次、2次までの各項をまとめ、次に κ の3次以上を0とする。 ε の0次、1次、2次でそれぞれ κ の0次、2次の項をとりだし解を導く。解析途中の結果は200以上の項数を含む膨大な式の羅列であり、人間の手計算で解を求めることはかなり困難なことである。図-2は、ここで述べた摂動解を求めるまでのフローチャートを示した。本研究の特徴は、2つのパラメータ ε 、 κ による2重摂動展開に対して何らの省略を行うことなくコンピュータ上で数式処理を行い解を求めていることである。

3. 解析結果および考察

3-1 SIN形をした河床波上の流れ

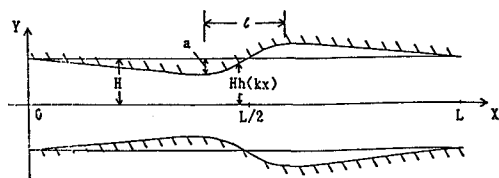


図-1(b) 境界断面形状(DUNE-1形)

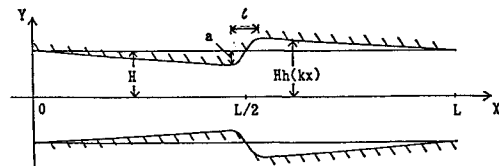


図-1(c) 境界断面形状(DUNE-2形)

基礎式

平行断面への写像

超球多項式による
直交関数表示

微少パラメータ
 $\varepsilon = \kappa * \text{Re}$
による展開

κ による展開

係数の決定

u, v, ω, τ の構成

図-2 数式処理による固有関数展開および2パラメータによる2重摂動展開のフローチャート

本節では2. で求めた解を基にして壁面せん断応力を求めてみた。断面形状は図-1(a)で示したようなSIN形である。図-3は位相差 ϕ と波形パラメータ κ との関係を示したものである。図中の $\rightarrow$ は $\rightarrow$ より $\rightarrow$ の領域では剥離が起きていることを示している。図-3より以下のことがわかる。

- 1) 剥離の発生の有無にかかわらず、位相差 ϕ が生じている。
- 2) κ が同じ値において a/H の値が小さい程位相差 ϕ が大きい。 a/H を小さくしていくと位相差 ϕ 間の差が小さくなっていく。 a/H が十分小さくなれば、 a/H が小さいほど位相差 ϕ は小さくなると思われたが、 $\kappa < 0.5$ では、その傾向はほとんど見られず、図-3(c)のように、位相差 ϕ がある一定の値に収束する。
- 3) 位相差 ϕ はある κ の値において極大値をとる。その値は Re が大きい程大きくなり、ピークも顕著に現れる。
- 4) 剥離が生じたとき、その領域が大きくなる (κ が大きくなるとき) につれ、位相差 ϕ も大きくなる傾向が見られる。その傾向は、 Re が大きい程はつきりする。
- 5) a/H が大きい程、小さい κ の値において剥離が発生する。

次に図-4は壁面せん断応力の分布を示している。この図より、

- 1) 壁面せん断応力の最大値は河床波のcrest の上流側にある。位相差 ϕ の河床形状に対する上流側への進みがうかがえる。
- 2) κ の値が小さくなるにつれ壁面せん断応力の分布は平たくなり最大値は小さくなる。

負の値は剥離が発生している領域である。図-5はこのとき得られた流線分布を示している。この図より河床波のcrestの上流側の流れが強くなっており、このことが壁面せん断応力の上流側での増大を産んでいる。

3-2 DUNE-1形をした河床波上の流れ

ここでは図-1(b)に示す断面形について解析を行った。断面の形状を与える関数として、

$$h(\xi)=1-\frac{A}{H}\cdot\frac{L}{t}\left[\left(\xi-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\tanh\left\{\frac{L^2}{2\delta t}\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\right\}\right] \quad (0\leq \xi\leq 1) \quad \cdots (6)$$

を用いている。この式ではパラメータ t 、 δ および波長 L の値によって断面形状のなめらかさを変え得る。図-6は壁面せん断応力の分布を示したものである。この図より、

- 1) crestのあたりで壁面せん断応力が極大値をとっている。位相差 ϕ はSIN形のとときは逆に下流側にずれる。
- 2) κ の値を大きくしていくと、ちょうど断面の変曲点あたりでもう一度極大値をとる。さらに κ の値を大きくすると2度目の極大値が最大値となる。
- 3) κ の値が過大になると分布の振動が激しくなり、理論の適用限界をはずれる。

表-1は壁面せん断応力の最大値の位置を示したものである。図-7は理論解のうちひとつ目のパラメータの影響を調べる目的で $\kappa=0$ 、 $\varepsilon\neq 0$ として計算した結果を示したものである($\varepsilon=5$)。この結果、

- 1) 図-6においては変曲点近傍でとっていた極大値がなくなった。
- 2) 位相差 ϕ はcrest より下流側にずれている。

破線は壁面上に沿ったせん断応力を示している。次に図-8に流れの全体像を知る目的で $\kappa=0.5$ 、 $\varepsilon=5$ の場合の流線を示しておく。断面形の変曲点近傍で激しく変動していることがわかる。

3-3 DUNE-2形をした河床波上の流れ

(6)式において、パラメータ δ 、 t を変え、DUNE-1形よりも、 ϵ/L をさらに小さくした断面形について解析を行った(図-1(c))。図-9に示した壁面せん断応力分布を見ると、

- 1) ϵ/L が小さくなると変曲点あたりを境にして壁面せん断応力は極

crest	$\xi=0.355$
$\kappa=0.1, \varepsilon=1$	$\xi=0.355$
$\kappa=0.3, \varepsilon=3$	$\xi=0.38$
$\kappa=0.5, \varepsilon=5$	$\xi=0.37$
$\kappa=0.7, \varepsilon=7$	$\xi=0.51$
$\kappa=1.0, \varepsilon=10$	$\xi=0.525$

表-1 $\left(\frac{H}{\mu U}\tau\right)_{\max}$ の位置

crest	$\xi=0.455$
$\kappa=0.1, \varepsilon=0.1$	$\xi=0.48$
$\kappa=0.5, \varepsilon=0.5$	$\xi=0.48$

表-2 $\left(\frac{H}{\mu U}\tau\right)_{\max}$ の位置

端に変化することが図-6と比較してわかる。

- 2) 位相差 ϕ は、DUNE-1形同様crestの下流側にずれている(表-2)。

破線は壁面上に沿ったせん断応力を示している。次に κ の値を固定し、 Re の値を変えて計算を行ってみた。このとき計算結果は、図-10に示されている。

- 1) Re が小さければ(ε が小さければ)分布形はほとんど変化しない。 Re が大きいき(ε が大きいき)変曲点付近で大きく変動する。

- 2) 位相差 ϕ は、crestの下流側にずれている(表-3)。

図-11は、 $\kappa=0.0167$ 、 $\varepsilon=0.833$ の場合の流線を示している。この図より、断面形の変曲点近傍で小さく変動しているのがわかる。

3-4 κ の効果

κ はSIN形のように波面形状がなめらかであるとき、位相差 ϕ に対して敏感に働いている。図-12は関数形が(7)式で与えられる断面形について解析した結果を示している。

$$h(\xi) = 1 - \frac{\beta}{H} \exp(-\xi^2/2) \quad \dots (7)$$

ここで、 $\beta=0.5$ である。①は、 $\kappa=0$ 、 $\varepsilon=100$ とおき、②は、 $\kappa=H/L$ 、 $\varepsilon=\kappa \cdot Re$ とし、 $Re=50$ 、 $H=10$ 、 $L=5$ のときの値で、 $\kappa=2$ 、 $\varepsilon=100$ として計算した。この図より、 κ を考慮して計算したものの方が位相差 ϕ がより上流側にずれていることがわかる。このことは κ の値が敏感に働いた結果である。

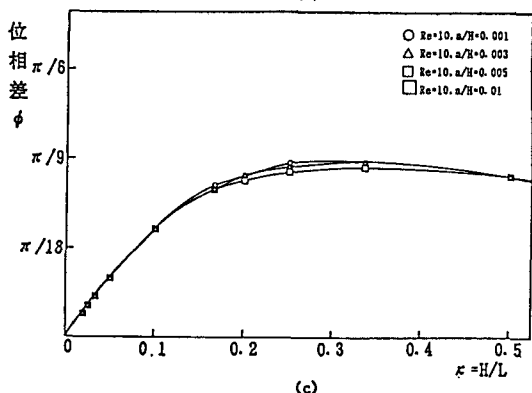
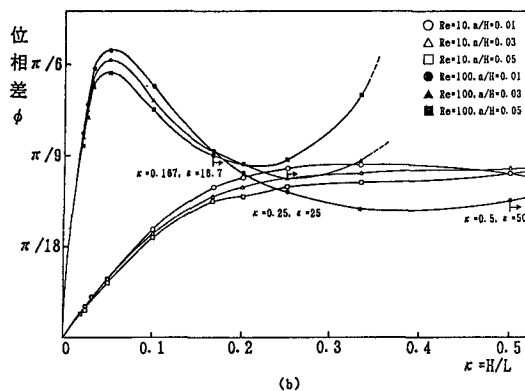
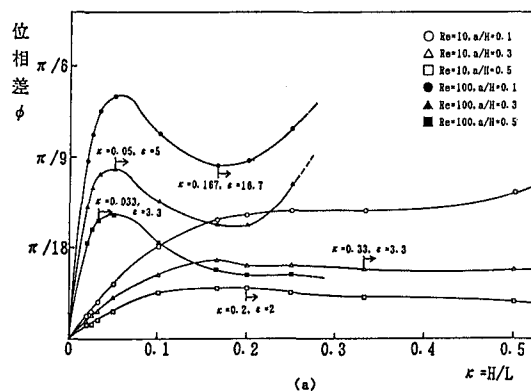


図-3 位相差 ϕ と κ の関係

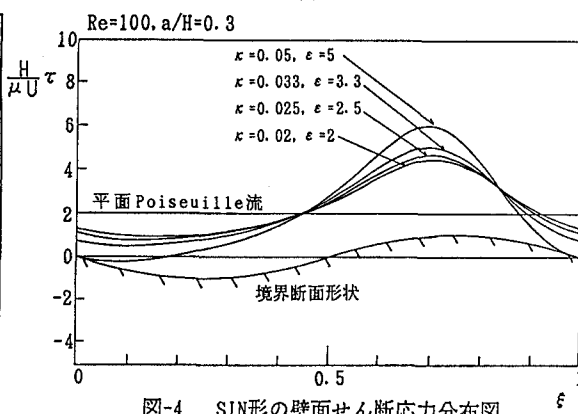


図-4 SIN形の壁面せん断応力分布図

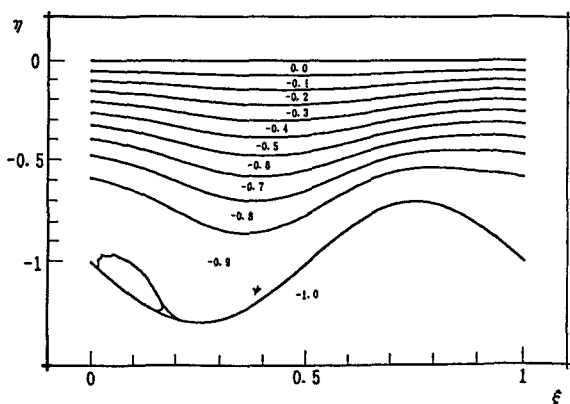


図-5 SIN形の流線図($Re=100, \kappa=0.05, \varepsilon=5, a/H=0.3$)

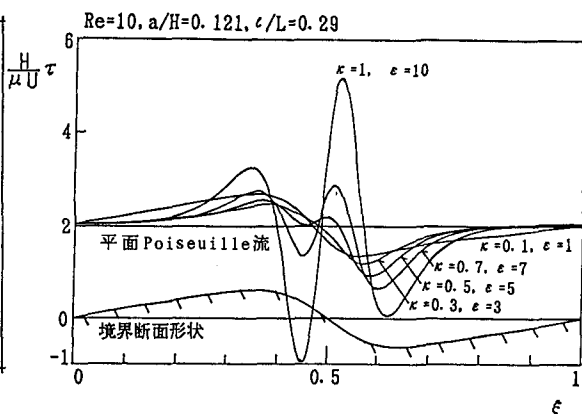


図-6 DUNE-1形の壁面せん断応力分布図

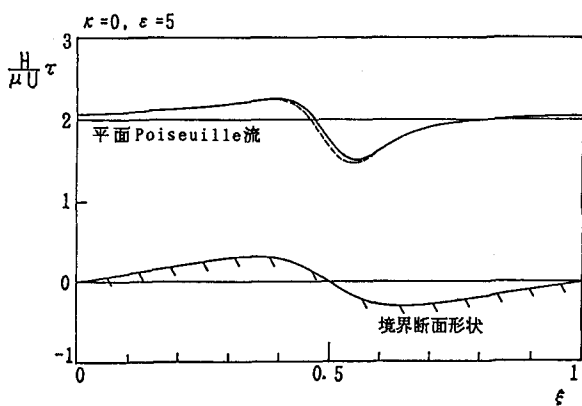


図-7 $\kappa=0, \varepsilon \neq 0$ としたときの壁面せん断応力

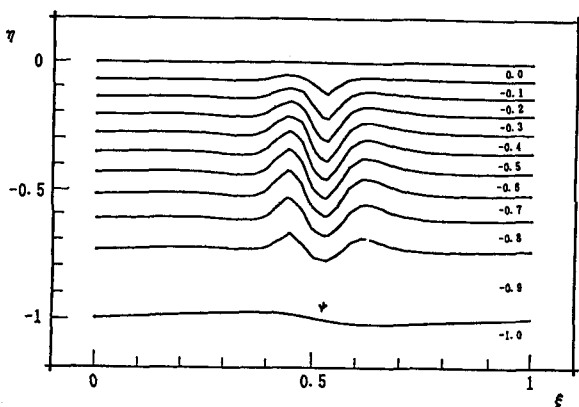


図-8 DUNE-1形の流線図
($Re=10, \kappa=0.5, \varepsilon=5, a/H=0.121, c/L=0.29$)

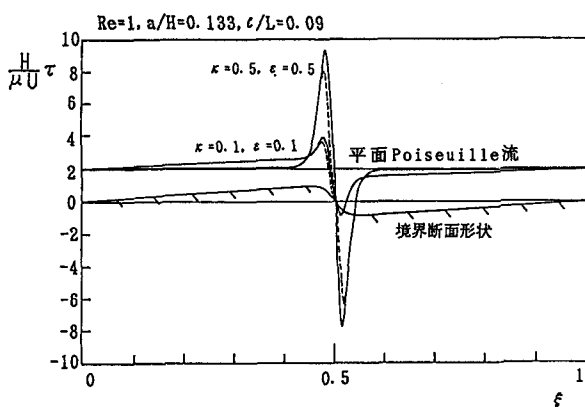


図-9 DUNE-2形の壁面せん断応力分布図

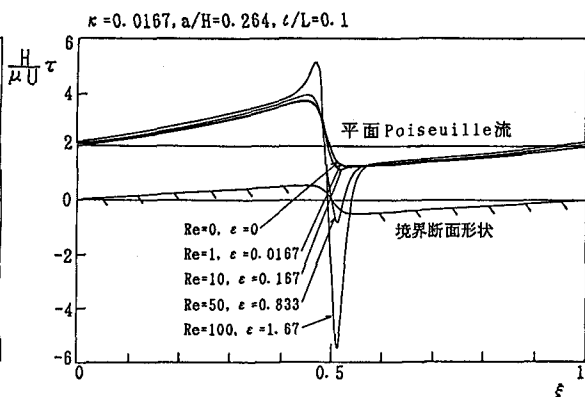


図-10 DUNE-2形の壁面せん断応力分布図

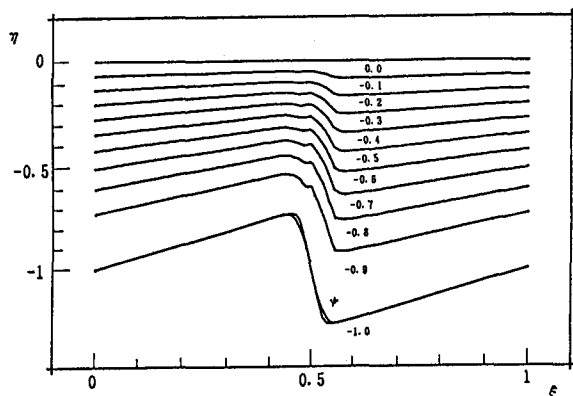


図-11 DUNE-2形の流線図

($Re=50$, $\kappa=0.0167$, $\varepsilon=0.833$, $a/H=0.264$, $c/L=0.1$)

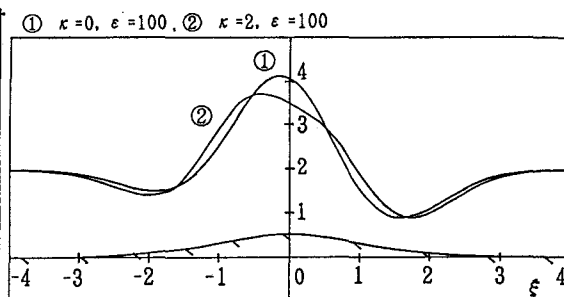


図-12 境界断面形状が $h=1-(\beta/H)*\exp(-\xi^2/2)$ によって表されるとき壁せん断応力分布図 ($\beta=0.5$)

4. 結論

本解析で得られた結果を要約すると、

- 1) 河床波上の流れにおいては壁面せん断応力と波面との間に位相差 ϕ が生じる。位相差 ϕ は、SIN 形のようにゆるやかな波面においては crest の上流側に進み、DUNE-1, 2 形のような波面の場合には、crest の下流側に遅れる。
- 2) SIN 形において a/H を小さくしていき平面 Poiseuille 流に近づけていくと、 κ の値に対してある一定の位相差 ϕ の値に近づいていく。
- 3) DUNE-1, 2 形のような断面形においては c/L が小さくなると断面の変曲点において κ が敏感に効いてくる。そのため κ の値が大きくなると発散し理論の適用限界を越える。
- 4) なめらかな断面において κ の値は位相差 ϕ に敏感に働く。

謝辞 本研究は、文部省科学研究費・重点領域研究(1)および一般研究 C (代表 山田 正) の補助のもとにおこなわれている。ここに記して深甚なる謝意を表す。

参考文献(1)Kennedy, J. F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, Jour. Fluid Mech., Vol. 16, pp. 521~544, 1963. (2)Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Vol. 96, Hy2, pp. 357~366, 1970. (3)山田正、池内正幸、植松正伸: 小規模河床波の発生発達に関する研究、第31回水理講演会論文集, pp. 665~670, 1987. (4)山田正、竹本典道: 空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究、第32回水理講演会論文集, pp. 479~484, 1988. (5)Miles, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 3, pp. 185~204, 1957. (6)Benjamin, T. B.: Shearing flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, pp. 161~205, 1950. (7)Stewart, R. H.: Laboratory studies of the velocity field over deep-water waves, Jour. Fluid Mech. Vol. 42, pp. 733~754, 1970. (8)Davis, R. E.: On the turbulent flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 721~731, 1970. (9)Davis, R. E.: On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 52, pp. 287~306, 1972. (10)Hsu, S. T. and J. F. Kennedy: Turbulent flow in wavy pipes, Jour. Fluid Mech., Vol. 47, pp. 481~502, 1971. (11)日野幹雄、宮永洋一: 波状境界をもつ二次元管路流の解析、土木学会論文報告集第264号, pp. 63~75, 1977. (12)Iwasa, Y. and J. F. Kennedy: Free surface shear flow over a wavy bed, Proc. ASCE, Vol. 94, Hy 2, pp. 431~454, 1968. (13)Lee, J. S. and Fung, Y. C.: Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers, Jour. of Applied Mech. Vol. 37, pp. 9~16, 1970. (14)松信八十男: ゆるやかに断面の変化するみぞの中の粘性流体の流れ、日吉論文集, pp. 48~86, 1977.