

II-16 横断河床勾配を有する河道弯曲部の浮遊砂分布に関する研究

北海道大学工学部 正員 森 明 巨
 正員 岸 力
 学員 平井祐次郎

はじめに

浮遊砂が卓越する弯曲部の河床形を予測するためには、河床の横断勾配が浮遊砂の分布形や横断方向 flux に与える効果を明らかにしておく必要がある。簡単なモデルでこの問題を考察した。

浮遊砂の輸送は、移流、拡散、沈降、河床からの pick up によって行われる。長谷川⁽¹⁾は、浮遊砂が卓越する直線流路の平衡河床横断形を理論的に求めている。二次流はなく、pick up の方向は鉛直上方としているから、浮遊砂による横断 flux は拡散のみによる。濃度分布は局所水量に対する平衡分布を仮定している。このモデルに掃流砂を加えて川幅変化をうまく説明している。

しかし、浮遊砂の pick up の方向は斜面に垂直とするのが妥当と思われる。これにより横断 flux が生ずる。本研究ではこの効果を取り入れる。また、本研究が対象とする河道弯曲部では二次流が発生する。ラセン流が形成されると上層と下層で二次流の向きが異なるし、一般に上向きの流速成分が発生して見かけの沈降速度を変化させる。この様な場では、濃度に局所平衡分布を仮定することの妥当性も検討する必要がある。これらの点を以下に示す簡単な場について理論的検討を行う。

1. 場のモデルと座標系

一定曲率弯曲部を考える。流れは充分に発達しており、外岸に向かって水深は一定の割合で増大するものとする。この場を表すために図-1の座標系をとる。

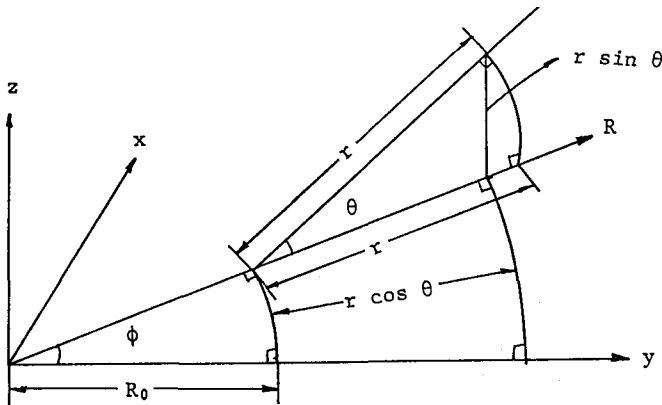


図-1 座標系

水平面上に (R, ϕ) の極座標をとる。これにより流路平面形を表す。 $\phi = \text{const.}$ の鉛直面内に (r, θ) の極座標をとる。これにより河道横断面形を表す。水面を $\theta = 0$ 、河床を $\theta = -\Theta$ にとる。 r の原点の R 座標を R_0 と書く。 $R = \phi = \theta = 0$ を原点とする左手系 Cartesian 座標系 (x, y, z) との関係は

$$z = r \sin \theta, \quad x = R \sin \phi, \quad y = R \cos \phi, \quad R = R_0 + r \cos \theta \quad (1)$$

流れの連続式は(2)、浮遊砂の連続式は(3)

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial rRV}{\partial r} + \frac{\partial RW}{rR \partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial rR(V+V_s)C}{\partial r} + \frac{\partial R(W-W_s)C}{rR \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\epsilon_s R \frac{\partial C}{r \partial \theta} \right) + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(rR \epsilon_r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \quad (3)$$

ここに、 W_s : 沈降速度、 V_g , W_g は沈降速度の r および θ 方向成分、 ϵ_s : s 方向の拡散係数、 $\epsilon_r (=E\epsilon_s, E=3)$: r 方向の拡散係数。

以下では、次式で定義される無次元座標 ξ , r^* を導入する。

$$\theta = \Theta(\xi - 1), \quad r^* = r/R_0$$

平板境界層の流れの変化は、平板に直交する方向に大きい。また、水面付近においては、水面に直交する方向に大きいものと考えられる。そこで、 ϵ_s を、 $r = \text{const.}$ 上で一定とし、

$$\epsilon_s = \kappa/6 \cdot u_* h$$

で与える。ここに、 $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, κ : カルマン常数 ($=0.4$), τ_0 : 河床剪断力、 $h = r \tan \Theta$ 。

剪断力は河床付近ではこれに平行な面で最大であるから、浮遊砂の pick up の方向は河床横断形に直交する縦断面内にあるものとする。このときの浮遊砂の低面条件を

$$\partial C / \partial \xi + \alpha C e = 0 \quad (4)$$

で与える。ここに、 $\alpha = W_0 h / \epsilon_s = \kappa/6 \cdot W_0 / u_*$ 、 W_0 : 河床での W_s 、 C_e : 平坦床での浮遊砂の低面濃度。

2. 各項のオーダーと摂動展開

実河川では

$$\tan \Theta = dh/dr = dh/dR = 0 \sim 10h/R$$

で、 $\Theta \ll 1$ である。 Θ を摂動のパラメーターとする。 $\Theta \ll 1$ であるから R の θ による変化幅は小さい。以下では θ による R の変化を無視する。

(3) 式の各項の計算に必要な諸量の計算式を以下の様に与える。

水面勾配 I 一定曲率の平衡弯曲流であるから

$$RI = R_m I_m.$$

この関係から u_* は

$$u_* = (r^*/(1+r^*)) (R_m/r_m^*)^{1/2} u_{*m}$$

で与えられる。ここに、添字 m は、 $R = R_m$ での値を意味する。

Ce 板倉、岸⁽²⁾の式による(ただし、近似式を用いる)。

$$Ce = 0.008 [0.14/W* (14\sqrt{\tau*} - 0.9/\sqrt{\tau*}) - 1]$$

ここに、 $W* = W_0/\sqrt{sgd}$ 。

V 次式で与える。

$$\tilde{V} = V/W_s = -\hat{V} \cos \pi \xi$$

ここに、 $\hat{V} = \Theta r/R \cdot V_a \sqrt{\tau*}$

$$V_a = 6/\kappa (\phi_0 + 1/\kappa)^2 G/W*$$

$$G = \beta [\beta/60 - 1/12 + (1/6 - 0.15\beta + \beta^2/28)/(1 - \beta/3)]$$

$$\beta = 3 / (\kappa \phi_0 + 1)$$

これは、Engelund⁽³⁾による二次流式の近似になっている。Engelund式は6次式で取扱が極めて煩雑になるためこの近似式を用いた。図-2は両式の比較である。

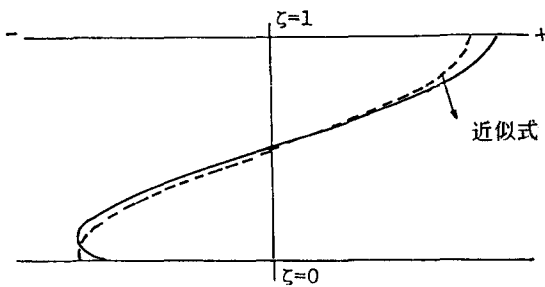


図-2 二次流の分布

W 連続式を $\xi = 0$ から ξ まで積分して、

$$\tilde{W} = W/W_s = -\hat{W} \sin \pi \xi$$

$$\hat{W} = \omega \frac{h}{\pi R_0} \frac{\hat{V}}{\sqrt{\tau*}} \sin \pi \xi, \quad \omega = 2\sqrt{\tau*}/\partial r*$$

これらから各項のオーダーを比較し、(3)式は(5)式の様に変えられる。

$$f_0(C) = f_1(C) + f_2(C) \quad (5)$$

$$\text{ここに、} f_0(C) = \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \alpha \frac{\partial C}{\partial \xi}$$

$$f_1(C) = \alpha \tilde{W} \frac{\partial C}{\partial \xi} + \alpha \frac{h}{R_0} \tilde{V} \frac{\partial C}{\partial r^*}$$

$$f_2(C) = \left\{ \alpha (1 - \cos \theta) + \frac{h}{R} \sin \theta \right\} \frac{\partial C}{\partial \xi} - \alpha \frac{h}{R_0} \sin \theta \frac{\partial C}{\partial r^*} \\ - \frac{h^2}{R_0^2 R r^* \varepsilon_s} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* R \varepsilon_r \frac{\partial C}{\partial r^*} \right)$$

である。\$f_0\$を基準にすると、\$f_1\$は\$\Theta\$、\$f_2\$は\$\Theta^2\$のオーダーである。

解を

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + \dots$$

とおくと、

$$f_0(C_0) = 0, \quad f_0(C_1) = f_1(C_0), \\ f_0(C_2) = f_1(C_1) + f_2(C_0), \dots \quad (6)$$

3. 浮遊砂の構造

(3) 式を河床から水面まで積分して (4) 式および水面を通過する flux=0 の関係を用いると横断 flux 式 (7) が得られる。

$$1 - C_b/C_e = \frac{d}{dr} [h (J_v + J_g + J_e)] \quad (7)$$

$$\text{ここに、} J_v = \int_0^1 \tilde{V} \cdot C / C_e \cdot d\xi \quad J_g = - \int_0^1 \sin \theta \cdot C / C_e \cdot d\xi \quad J_e = - \varepsilon_r / C_e W_s \cdot \partial \bar{C} / \partial r$$

(6) 第1式から

$$C_0 = C_e \exp(-\alpha \xi) \quad (8)$$

\$C = C_0\$のときの flux \$J_{v0}\$, \$J_{g0}\$, \$J_{e0}\$は以下の様に求まる。

$$J_{v0} = -\Theta \frac{r}{R} V_0 \sqrt{\tau^*} \frac{1}{\alpha + \pi^2/\alpha}$$

$$J_{g0} = \frac{\Theta}{\alpha^2} (e^{-\alpha} - \cos \Theta + \alpha)$$

$$J_{e0} = -\Theta \frac{E}{2(1+r^*)} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{C_e}{C_e} \sqrt{\tau^*} (1 - e^{-\alpha}) + \frac{1 - \alpha - e^{-\alpha}}{\alpha} \right)$$

図-3はこれらを\$\Theta\$で割ったものと\$\tau^*\$の関係を示したものである。図からわかる様に\$J_{g0}\$と\$J_{e0}\$が同程度の大きさである。また、これらに比べて\$J_{v0}\$ははるかに大きい。

\$C_0 > C_1\$であれば、\$C_0\$による flux のみを考えればよい。\$C_1\$を求めて\$C_1\$の大きさと水理量との関係を調べる。(6) 第2式は(9) 式の様に変形できる。

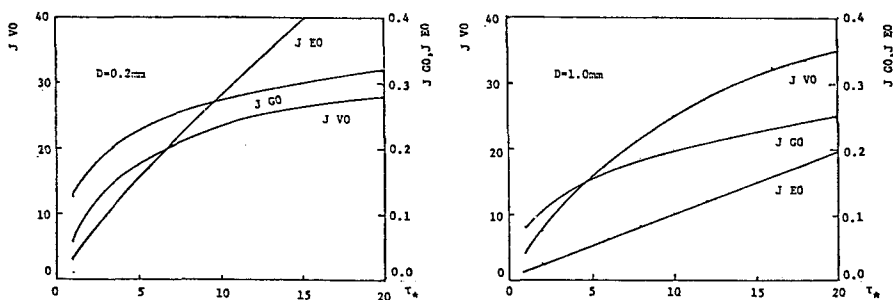


図-3 底面flux

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial \xi^2} + \alpha \frac{\partial C_1}{\partial \xi} = -\alpha \left\{ \hat{W} \frac{\sin \pi \xi}{\pi} \frac{\partial C_0}{\partial \xi} + \frac{h}{R_0} \hat{V} \cos \pi \xi \frac{\partial C_0}{\partial r^*} \right\} \quad (9)$$

ここに、 $A = \Theta \frac{h}{R_0} \frac{r}{R} \alpha \omega V_0$ である。

水面で $dC_1/d\xi + \alpha C_1 = 0$ 、河床で $dC_1/d\xi = 0$ の境界条件で (9) 式を解くと

$$\frac{1}{AC_0} C_1 = \left\{ \frac{a+\xi}{\pi} \sin \pi \xi + \frac{\alpha}{\pi B^2} \sin (2\chi + \pi \xi) + \frac{a+\xi}{B} \cos (\chi + \pi \xi) \right\} e^{-\alpha \xi} \\ + e^{-\alpha} \left(\frac{\alpha}{\pi B^2} \sin 2\chi + \frac{a+1}{B} \cos \chi \right)$$

ここに、 $B = \sqrt{\alpha^2 + \pi^2}$, $\chi = \tan^{-1} \pi / \alpha$, $a = C_0 e' / C_0 \sqrt{\tau^*} / \alpha$

全水深にわたって $dC_1/d\xi < 0$ 、かつ、水面で $C_1 > 0$ であることを示すことができる。これから河床の $C_1 = C_{1b}$ は正かつ最大であることがわかる。故に、 C_{1b}/C_0 を C_1 の強度を表すパラメーターとすることができる。

$$C_{1b}/C_0 = \frac{Pi \sqrt{\tau^*} V_0}{2 \phi_0 (1+r^*) (1+\pi^2/\alpha^2)} \left(\frac{\sin 2\chi}{\pi} + \frac{\kappa}{6} \frac{\tau^*}{W^*} \frac{C_0'}{C_0} \right)$$

ここに、 $Pi = h/R \cdot dh/dR \cdot \phi_0$ 。

Pi は流れの非線形性を表すパラメーターで、 $Pi > Pic = 0.02$ になると非線形効果により二次流強度が高められる。図-4は $Pi = Pic$ 、 $\phi_0 = 15$ 、 $d = 0.2\text{mm}$ 及び 1.0mm のときの C_{1b}/C_0 と τ^* の関係を示したものである。図-5に C_1 の計算例を示した。水理条件は石狩川下流部の矢印部弯曲のS56出水時に相当する。この計算例では、 $Pi = 0.035$ であるが、 C_{1b}/C_0 は0.1程度である。図-4, 5からわかる様に大河川についても、流路の中央部では、 C は C_0 で充分近似できる。

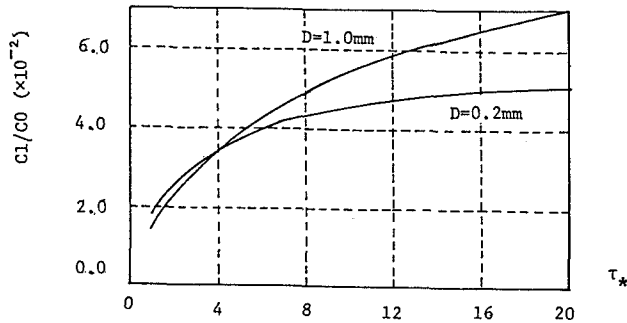


図-4 C_1/C_0 と τ^* の関係

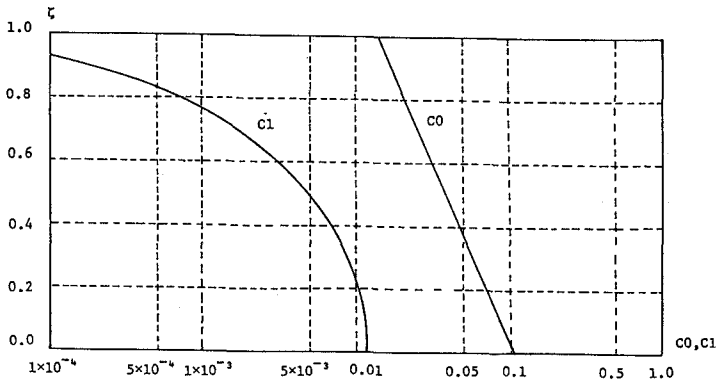


図-5 浮遊砂濃度分布

結論

河床の横断勾配が浮遊砂の横断flux 及び分布形に与える影響を平衡弯曲流について理論的に調べ、次の結論を得た。

1. 横断fluxは、a. 二次流による移流、b. 河床からのpick up、c. 拡散による。b, cは同程度の大きさである。弯曲部ではaが卓越する。
2. 濃度分布に与える影響は、 $Pi < Pic = 0.02$ の範囲では小さく、局所水理量で定まる濃度分布が仮定できる。

参考文献

- 1) 長谷川和義・望月明彦：侵食・堆積過程にある流路の浮遊砂底面濃度について、第32回水理講演会論文集、1988
- 2) Itakura, T. and Kishi, T.: Open channel flow with suspended sediments, Proc. ASCE, Vol. 106, No. HY8, 1980.
- 3) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, Proc. ASCE, vol. 100, HY11, 1974