II－13　マルチプルスケール法を用いた砕波点近傍の波動解について

北海道大学工学部　正員　浜中建一郎

1．まえがき

著者等はこれまで、媒介変数を用いた水面波形の表現と、それを用いた自由表面境界条件式を導きＷＫＢ－摂動法による浅水変形解を示し、砕波点近傍の波動場の様子を調べて来た　（以下前報と呼ぶ）。それによると、砕波点近傍での波の前傾化の様子は良く表現されてはいるものの、砕波点で起こる波頂前面のきり立ちや、Over turning　を良く表現するには至っていない[1]。　又、摂動展開によって得られた各オーダの解が結果にどの様に寄与するかを調べたところ非線形性に関する２次のオーダの解は結果の改善に大きく寄与しているが、３次の解はあまり寄与していないことが分かった[2]。

一方、水平床あるいわ深水域での不規則波の場合は、３次のオーダまで展開を進めると成分波同士の間に共鳴干渉が起こることが知られている[3]。　それに対し、著者等の方法を不規則波の浅水変形に応用した場合は　３次のオーダまで展開しても共鳴干渉は表現することはできなかった[4]（この場合表面波形としては従来の水平座標に関する一価関数を用いているが、同じＷＫＢ－摂動法が用いられている）。　今もし、規則波に於いても、基本波自身の３次の非線形干渉により不規則波と類似の共鳴干渉が起こっていると仮定すると、これまでの方法では表現されていなかったのだから、そこに改善の余地が残されていることになる。このことから、本研究では Multiple-scale methodを用いて同様の展開を行い、３次のオーダの非線形項が基本波の振幅の変化に寄与し得ることを示す。又この解析から予想される結果についての若干の考察を述べる。

2．基礎方程式と展開方法

基礎方程式は前報と同じ(1)である。

$$\left.\begin{array}{ll}\phi_{xx}+\phi_{yy}=0 & \\ \left.\begin{array}{l}X_t=\phi_x-Q\,X_x\\ Y_t=\phi_y-Q\,Y_x\\ Y+\phi_t+\dfrac{1}{2}(\phi_x)^2+\dfrac{1}{2}(\phi_y)^2=0\end{array}\right\} & \text{on } x=X\ ,\ y=Y\\ \phi_y+h_x\phi_x=0 & \text{on } y=-h\end{array}\right\}\qquad(1)$$

ここで、ϕは水粒子速度ポテンシャル、X, Y は水面に置かれたマーカーの x, y 座標、Q は X,Y の定常成分の除去項で、h は水深、x は水平、y は垂直上向き、t は時間座標である。

(1.2)-(1.4)でのϕは x=x , y=0 の回りの Taylor 展開で与えられるとすると、X の振動成分を $\tilde{X}$ として $(X=x+\tilde{X})$

$$\phi(X,Y)=\phi+\tilde{X}\phi_x+Y\phi_y+\frac{1}{2}\tilde{X}^2\phi_{xx}+\tilde{X}Y\phi_{xy}+\frac{1}{2}Y^2\phi_{yy}+\cdots\qquad(2)$$

で表される。

次に時間的には定常で場所的に変化する波動場を考え Multiple scale method に従って、種々のスケールを持った水平座標を考える。すなわち

$$x_0=x\ ,\quad x_1=\varepsilon x\ ,\quad x_2=\varepsilon^2 x\ ,\qquad(3)$$

従って、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \qquad (4)$$

さらに、各変量が ε をパラメータとする摂動展開で表されるとすると、

$$\left.\begin{aligned}
\phi &= \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \\
X &= \varepsilon X^{(1)} + \varepsilon^2 X^{(2)} + \varepsilon^3 X^{(3)} + \\
Y &= \varepsilon Y^{(1)} + \varepsilon^2 Y^{(2)} + \varepsilon^3 Y^{(3)} + \\
Q &= \varepsilon^2 Q^{(2)} + \varepsilon^4 Q^{(4)} +
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

次に、Mild slope を仮定して

$$h = h(x_1) \qquad \text{すなわち} \qquad h_x = \varepsilon h_{x_1} \qquad (6)$$

(4)と(5)を(1)に代入して ε のオーダでまとめると、一般に
ε の m 乗のオーダで

$$\left.\begin{aligned}
&\phi^{(m)}_{x_0 x_0} + \phi^{(m)}_{yy} = F^{(m)}_1 \\
&\left.\begin{aligned}
X^{(m)}_t - \phi^{(m)}_{x_0} &= F^{(m)}_2 \\
Y^{(m)}_t - \phi^{(m)}_{y} &= F^{(m)}_3 \\
\phi^{(m)}_t + Y^{(m)} &= F^{(m)}_4
\end{aligned}\right\} \text{ on } y = 0 \\
&\qquad \phi^{(m)}_y = F^{(m)}_5 \qquad\qquad \text{on } y = -h
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

の様にまとめられる。ここで右辺の $F^{(m)}$ は m-1 次までの解で作られる強制項である。
次に、各オーダのポテンシャルとマーカーの x , y 座標を次の様に与える。

$$\left.\begin{aligned}
\phi^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m} \{iD^{(m,j)}(e^{ij\theta} - e^{ij\theta}) + \hat{D}^{(m,j)}(e^{ij\theta} + e^{ij\theta})\} \\
X^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m} \{iA^{(m,j)}(e^{ij\theta} - e^{ij\theta}) + \hat{A}^{(m,j)}(e^{ij\theta} + e^{ij\theta})\} \\
Y^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m} \{B^{(m,j)}(e^{ij\theta} + e^{ij\theta}) + i\hat{B}^{(m,j)}(e^{ij\theta} - e^{ij\theta})\}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ここで各オーダの調和成分波毎に90° 位相のずれた成分波を加えてあることの理由は後で述べられる。
又、位相に関しては

$$\theta_x = \theta_{x_0} + \varepsilon^2 \theta_{x_2} + \qquad = n + \varepsilon^2 k^{(2)} + \qquad (9)$$

(8)を(7)に代入して各オーダ各位相毎にまとめると、

$$\left.\begin{aligned}
&D^{(m,j)}_{yy} - n^2 D^{(m,j)} = F^{(m,j)}_1 \\
&\left.\begin{aligned}
A^{(m,j)} + n\, D^{(m,j)} &= F^{(m,j)}_2 \\
D^{(m,j)}_y - B^{(m,j)} &= F^{(m,j)}_3 \\
D^{(m,j)} - B^{(m,j)} &= F^{(m,j)}_4
\end{aligned}\right\} \text{ on } y = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$D_y^{(m,j)} = F_5^{(m,j)} \qquad \text{on } y = -h$$

となる。^印の付いた位相成分についても同様な式が導かれる。これらの式は低次のオーダの解で作られる強制項を持った常微分方程式であり通常の摂動展開の場合と同様低次のオーダから順に解かれる。ここで各オーダの解の振幅は(6)に従って x_1 以降の水平座標に依存するものとする。

m = 1 のオーダの解は、

$$\left.\begin{array}{l} D^{(1,1)} = -\dfrac{a}{2}\cosh\alpha \quad , \quad A^{(1,1)} = \dfrac{a}{2} n\cosh\beta \quad , \quad B^{(1,1)} = \dfrac{a}{2}\cosh\beta \\ \hat{D}^{(1,1)} = -\dfrac{\hat{a}}{2}\cosh\alpha \quad , \quad \hat{A}^{(1,1)} = \dfrac{\hat{a}}{2} n\cosh\beta \quad , \quad \hat{B}^{(1,1)} = -\dfrac{\hat{a}}{2}\cosh\beta \end{array}\right\} \tag{11}$$

$n\tanh\beta = 1$ 　　ただし　$\alpha = n(y+h)$ ， $\beta = nh$

以下このオーダの波を基本波と呼ぶ。以下順次この解を用いてとかれるが、前報と同様 m=2,j=1 のオーダで基本波の振幅の場所的変化　a/x_1 ， $\hat{a}/x_1$ が得られる。ただしこのオーダでの変化は水深の変化によるものである。次にまえがきで述べた3次のオーダの非線形項が基本波の振幅の変化に効果を及ぼす m=3, j=1 のオーダについて述べる。

m=3, j=1 のオーダでの (10.1) は、

$$D_{yy}^{(3,1)} - n^2 D^{(3,1)} = G'(\alpha, \sinh\alpha, \cosh\alpha) + 2n(\hat{a}_{x_2} + a\, n_2)\cosh\alpha \tag{12}$$

(12) は (10.5) と共に簡単に積分出来て、

$$D^{(3,1)} = G(\alpha, \sinh\alpha, \cosh\alpha) - (\hat{a}_{x_2} + a\, n_2)(\alpha\sinh\alpha - \beta\cosh\alpha)/2n \tag{13}$$

ここで (12) に $\hat{a}_{x_2}$ が含まれていることに注目すると、逆に a_{x_2} は直角位相ずれた成分波の方程式に含まれていることになる。このことは、(8) に於てもし一方の成分波だけを考慮した場合は基本波の振幅の３次の非線形性による変化にバランスする項が存在しないことを意味する。このことが (8) において直角位相ずれた成分波を加えた理由である。

次に(12)を(10.2)-(10.4)に代入することにより n_2 を未知量として残しつつ $\hat{a}_{x_2}, A^{(3,1)}, B^{(3,1)}$ について解ける。$a_{x_2}, \hat{A}^{(3,1)}, \hat{B}^{(3,1)}$ についても同様である。

さらに n_2 を決めるためにエネルギーの保存則を考える。すなわち、エネルギーフラックスをＦとし

$$\begin{aligned} F &= \int_{-h}^{Y'} -\phi_x\phi_t\, dy \\ &= \int_{-h}^{0} -\phi_x\phi_t\, dy - Y'[\phi_x\phi_t]_{y=0} - \frac{1}{2}Y'^2[(\phi_x\phi_t)_y]_{y=0} - \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

ここで Y' は x 上の水面の y 座標である。摂動展開を考慮して、

$$Y' = \varepsilon Y^{(1,1)} + \varepsilon^2\{Y^{(2,2)} + Y^{(2,1)} - X^{(1,1)}Y_x^{(1,1)}\} + \cdots \tag{15}$$

(14) に (15) と共に (4),(5),(8) を代入して一周期の平均を取り、ε のオーダでまとめ、時間的に定常な波動場を考えていたから各々のオーダで一定とすると、ε の２乗のオーダでは２成分の基本波

のエネルギーの和に対する保存則が得られ、εの３乗のオーダは恒等的に零になる。さらにεの４乗のオーダで、

$$F^{(4)} = \int_{-h}^{0} \{ H_1 + 4n\, D^{(1,1)} D^{(3,1)} + 4n\, \hat{D}^{(1,1)} \hat{D}^{(3,1)} \}\, dy + H_2 \tag{16}$$

ここで H_1 ，H_2 はεの２乗以下のオーダの解で構成されている。

(16) の $D^{(3,1)}$, $\hat{D}^{(3,1)}$ に (13) とその対応する解を代入することにより、n_2 が決まる。
この様にして $a/\ x_2$ ，$\hat{a}/\ x_2$ が定まるが、用いられた(7)の $F_2^{(3,1)}$, $F_3^{(3,1)}$, $F_4^{(3,1)}$ は３次の非線形強制項であるから、それを通して基本波の振幅が３次の非線形干渉による変化を受けることになる。さらに m=2, j=1 のオーダで得られた x_1に対する変化率と合わせて、(4)より

$$\frac{a}{x} = \varepsilon \frac{a}{x_1} + \varepsilon^2 \frac{a}{x_2} \quad , \quad \frac{\hat{a}}{x} = \varepsilon \frac{\hat{a}}{x_1} + \varepsilon^2 \frac{\hat{a}}{x_2} \tag{17}$$

となる。

3. 砕波点近傍の変形と等水深域に於ける再帰現象

前節では、Multiple scale method を用いた波の非線形変形解の解法の概要と、m=3, j=1 のオーダに於ける波の非線形干渉による変形の可能性について述べた。

この節ではこの解析から予想される結果について若干の考察を述べる。(11)で与えた２個の基本波のうち＾の付していない成分波をＡ波、付した方をＢ波と呼ぶ。このＢ波のＡ波に対する位相関係は、前報の$\varepsilon^1\delta^1$の波の$\varepsilon^1\delta^0$の波に対する関係と同じで、砕波点に近ずくにつれＡ波を前傾させる効果を持つ。この解析ではＢ波の他に$\varepsilon^1\delta^1$に対する波として m=2, j=1 の波が求まっているからＢ波はさらに波を前傾させる効果を持つものと期待され、３次のオーダの解が解をより改善するものと考えられる。

次に、深水域あるいは等水深域を考える。この場合、水深の変化による波の変形はない。実際、前報の解析ではこの水域では波の変形はない。しかし、今回の解析では前節でのべたように３次の非線形干渉により波は変形を受ける。この場合、エネルギーの保存則からＡ、Ｂ両波のエネルギーの和は一定に保たなければならない。従って一方の波の振幅が増加する方向に変化する時は他方は減少する方向に変化しているはずである。この様なエネルギーの流れは他方の振幅が増大するに連れ減少し、ついには止まり、次には逆向きの流れとなるだろう。すなわち、Ａ波Ｂ波はそのエネルギーの増減を逆位相で繰り返すと考えられる。その様な状態の中で一方の波にエネルギーが集中した場合は前後対称な一様波列となるが、両波が共に有意なエネルギーを持つ場合は前後に非対称な歪んだ波形となる。そしてそのふたつの状態が繰り返される。このことは Lake と Yuen[5,6]等が非線形 Schrodinger方程式に基ずいて論じた Fermi-Pasta-Ulam の再帰現象に対応しているものと考えられ、今後数値的評価を加えながら検討していく必要があるものと考える。

参考文献

1)浜中建一郎：第35回海工,1-5,1988　2)神谷元嗣　浜中建一郎：土木学会道支部論文集,45,1989
3)O.M.Phillips: The dynamics of the upper ocean,Cambridge Univ. Press, 1977　4)浜中建一郎　加藤雅也：第32回海工,199-203,1985　5)B.M.Lake et al: J.Fluid Mech.,83,49-74,1977
6)H.C.Yuen &W.E.Ferguson: Phys. Fluids.,21,1275-1278,1978