

II-12 砕波点近傍の波動解における 非線形性の効果について

北海道大学 神谷 元嗣

北海道大学 正員 浜中建一郎

1. ま え が き

よく知られているように、波が砕波点に近づくにつれ、波形は前後に非対称となり、さらに進行すると波頂前面の一部は垂直に切り立ち、ついにはオーバートーンニングを起こす。このような波形は水平座標上の一価関数では表現することはできない。このことから著者は、媒介関数を用いた波形の表現方法を提案し、その表現にそって水面での自由境界条件を導き、WKB-摂動法を用いて砕波点近傍の浅水変形解を提案した。¹⁾ ここでは非線形と変形性に関する三次近似解が示された。さらに便宜的に波頂前後の接線の交角が 120° となる時を砕波の発生点として、砕波時の流体内の水粒子速度分布や、砕波波高を調べた。しかしながら、ここでは展開された各オーダーの解がどのように結果を改善するか(あるいはしないか)の検討がなされていない。このことから本研究では近似の次数を順次あげながら同様の砕波波高の計算を行い、非線形項の結果に及ぼす効果について調べた。

2. 解析方法

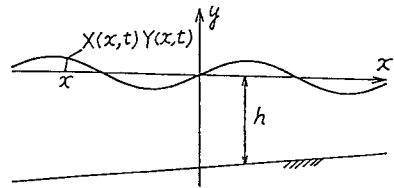
(1) 基礎方程式

各変量を波動運動の角周波数と重力加速度で無次元化し座標系を図-1のようにとる。

流体は非粘性、非圧縮とし運動は非回転とする。

水粒子の速度ポテンシャルを ϕ とすると、流体内部では、

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (1)$$



水面波形の x, y 座標を X, Y とし、これを媒介変数 x, t を用いて表し、

$$X = X(x, t), \quad Y = Y(x, t) \quad (2)$$

とする。

この X, Y を用い、水面での運動学的境界条件を表すと、

$$X_t = \phi_x - Q X_x \quad \text{on } x = X, y = Y \quad (3)$$

$$Y_t = \phi_y - Q Y_x \quad \text{on } x = X, y = Y \quad (4)$$

とする。

ここで Q は定常流分をキャンセルするための x だけに依存する量である。

水面での力学的境界条件は、

$$\phi_t + Y + \frac{1}{2}(\phi_x)^2 + \frac{1}{2}(\phi_y)^2 = 0 \quad \text{on } x = X, y = Y \quad (5)$$

水底では、

$$\phi_y + h_x \phi_x = 0 \quad \text{on } y = -h \quad (6)$$

以上の式-(1), (2), (4), (5), (6)が基礎方程式である。

図-1 座 標 系

(2) 摂動展開

(4), (5), (6)の水面での式に関して、 x の振動成分を $\tilde{x}$ として

$$X = x + \tilde{x} \quad (7)$$

とする。

これを、マーカーの静水時の位置 $(x, 0)$ の回りでTaylor展開する。

$$\begin{aligned} \phi(X, Y) = & \phi(x, 0) + \tilde{x} \phi_x(x, 0) + Y \phi_y(x, 0) \\ & + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 \phi_{xx}(x, 0) + \tilde{x} Y \phi_{xy}(x, 0) + \frac{1}{2} Y^2 \phi_{yy}(x, 0) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

を(4), (5), (6)式に代入する。

次に、 x 方向の変化の割合を表す微少パラメータ δ で x 座標を圧縮する。

$$x \rightarrow \delta^{-1} x, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \delta \frac{\partial}{\partial x} \quad (9)$$

そして各パラメータの場所的変化の割合が周期運動のそれに比し、ひとオーダー低いとして、

$$(x, y, t) \rightarrow (x, y, \xi), \quad \xi = \delta^{-1} \int k dx - t \quad (10)$$

を用いた座標変換を行う。

これにより

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} & \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \delta^{-1} k \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t} & \rightarrow - \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (11)$$

に置き変わる。

このように変換された基礎方程式に対し、各変量を非線形性を表すパラメータ ε と変形性を表すパラメータ δ で摂動展開する。

$$\begin{aligned} \phi &= \sum \varepsilon^l \delta^m \phi^{(l, m)} \\ X &= \delta^{-1} x + \sum \varepsilon^l \delta^m X^{(l, m)} \\ Y &= \sum \varepsilon^l \delta^m Y^{(l, m)} \\ k &= n + \sum \varepsilon^l \delta^m k^{(l, m)} \quad l=1, 2, \dots \quad m=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

これらを基礎方程式に代入し、各オーダーごとに方程式をまとめる。

(3) 各オーダーの方程式の解法

$\varepsilon^l \delta^m$ のオーダーでは

$$\begin{aligned} \phi^{(1, 0)} &= -i \frac{a}{2} \cosh \alpha e^{i\xi} + C.C. \\ X^{(1, 0)} &= i \frac{a}{2} n \cosh \beta e^{i\xi} + C.C., \quad Y^{(1, 0)} = \frac{a}{2} \cosh \beta e^{i\xi} + C.C. \\ n \tanh \beta &= 1 \\ \alpha &= n(y+h), \quad \beta = nh. \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathcal{E}^1\mathcal{S}^1$ のオーダーでは

$$\begin{aligned}\phi^{(1,1)} &= \{(C_1\alpha^2 + C_2\alpha)\cosh\alpha + C_3\alpha\sinh\alpha\}e^{i\xi} + C.C. \\ X^{(1,1)} &= \left[\left\{\frac{a}{2}x - n(C_1\beta^2 + C_2\beta)\right\}\cosh\beta + \left\{\frac{a}{2}x - nC_3\beta\right\}\sinh\beta\right]e^{i\xi} + C.C. \\ Y^{(1,1)} &= i\{(C_1\beta^2 + C_2\beta)\cosh\beta + C_3\beta\sinh\beta\}e^{i\xi} + C.C. \\ a^2n(\sinh^2\beta + h) &= \text{const.} \\ k^{(0,1)} &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

$$C_1 = -an_x/(4n^2), \quad C_2 = -ah/2, \quad C_3 = a/(2n)$$

$\mathcal{E}^2\mathcal{S}^0$ のオーダーでは

$$\begin{aligned}\phi^{(2,0)} &= i a^{(2)} \cosh 2\alpha e^{i2\xi} + C.C. \\ X^{(2,0)} &= -i \frac{1}{3n} a^{(2)} (3n^2 + 1) \cosh^2 \beta e^{i2\xi} + C.C. \\ Y^{(2,0)} &= -2 a^{(2)} \cosh \beta e^{i2\xi} + C.C. \\ a^{(2)} &= -\frac{3}{16} a^2 (n^2 - 1)n^2, \quad k^{(1,0)} = 0 \\ V^{(2,0)} &= 0, \quad Y_0^{(2,0)} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 (n+1) \cosh^2 \beta \\ Q &= \frac{a^2}{2} n(n+1) \cosh^2 \beta + U^{(2,0)}\end{aligned}\quad (15)$$

ここで、 $U^{(2,0)}$, $V^{(2,0)}$ は定常流の x, y 方向の成分で、 $Y^{(2,0)}$ はWave set-downを表す。又、 U は戻り流れを表し、汀線のことを考え、このオーダーまでの断面質量輸送が0となるようにして求め、 Q が定まる。 $\mathcal{E}^2\mathcal{S}^0$ 以後のオーダーも同じようにして求めてゆく。

3. 結果及び考察

この節では、 $\mathcal{E}^1\mathcal{S}^0$ 、 $\mathcal{E}^1\mathcal{S}^1$ 、 $\mathcal{E}^2\mathcal{S}^0$ 、 $\mathcal{E}^2\mathcal{S}^1$ 、 $\mathcal{E}^3\mathcal{S}^0$ のオーダーまでの解を用いてその性質を調べる。

図-2は1周期を10分割し下から順に並べたWave profileの時間経過で、水底勾配1/10、沖の線形波の無次元振幅 $a=0.2$ で、線形計算だけのものから順次非線形解の次数を高くして加えていったものである。この図を見ると、線形計算だけのものは波の前傾化をかなりのところまで表している。その後のものは、波形の前面が切り立つ形となり、上方に向かって尖ってゆき、波の前傾化が損なわれる結果となる。

又、砕波の発生点として妥当と考えられる点での波高、水深比を求めてみると、これまで報告されている実測値に比べ、かなり大きめの値となった。そこで、砕波発生点として便宜的に図-3のように、波の前面と後面で最大（最小）傾斜角となる2点で接線を取り、その交角が 120° となる時とした。図中波頂前後の円印が接線を求めた点である。

図-4はそうにして求めた砕波波高 H_b と砕波水深 h_b との比を砕波点での相対水深に対して示したもので、図-5は砕波水深 h_b と沖波波高 H_o との比を沖波波形勾配に対して示したものである。図-6は砕波波高 H_b と沖波波高 H_o との比を沖波波形勾配に対して示したものである。ここで、実線は合田²⁾による砕波指標である。

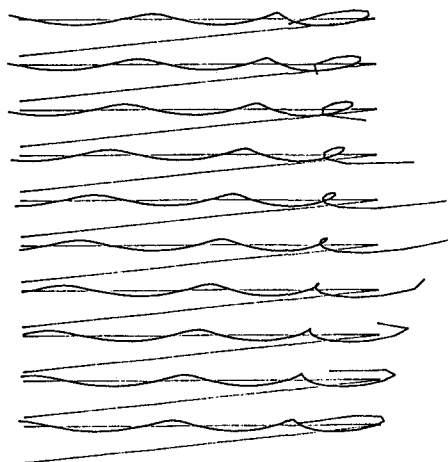
これらの図より、一様に言えるのは、線形解に非線形解を加えたものは線形解だけのものより大幅に

改善されているが、非線形解の次数を上げていっても結果はそれほど改善されて来ない。このことより、この計算での砕波波形は $\epsilon^1 \delta^0$ 、 $\epsilon^1 \delta^1$ 、 $\epsilon^2 \delta^0$ までがほぼ全体の波の形をつくり、後のものはその波のかたちを少しずつ変えてゆくことがわかる。

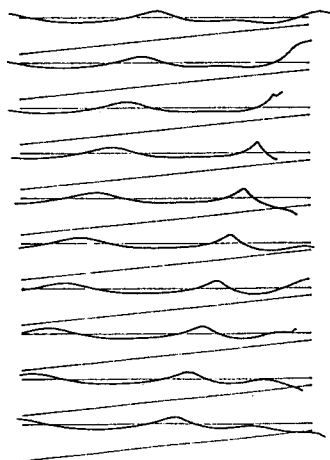
以上のような結果を得たが、3次の項及び $\epsilon^2 \delta^1$ の項が波の形に影響を与えるよう、今後研究を進めていこうと努力したい。

参考文献

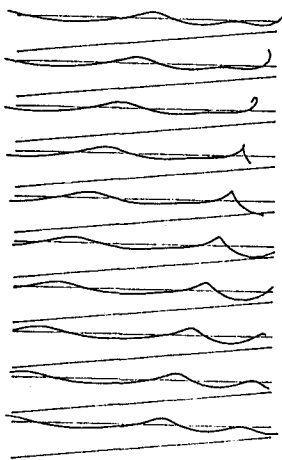
- 1) 浜中建一郎：媒介変数で表される水面波形を用いた波の浅水波形と砕波，
第35回海岸工学講演論文集，
pp.1-5, 1988
- 2) 合田良実：港湾構造物の対波設計，
鹿島出版会，
pp.54, 1977



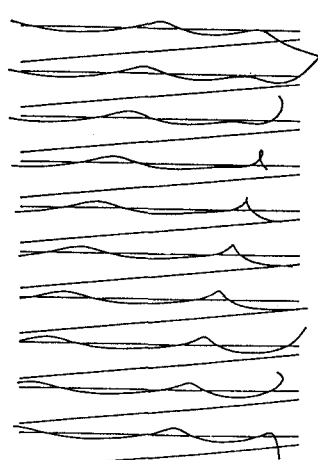
$$\epsilon^1 \delta^0 + \epsilon^1 \delta^1$$



$$\epsilon^1 \delta^0 + \epsilon^1 \delta^1 + \epsilon^2 \delta^0$$



$$\epsilon^1 \delta^0 + \epsilon^1 \delta^1 + \epsilon^2 \delta^0 + \epsilon^2 \delta^1$$



$$\epsilon^1 \delta^0 + \epsilon^1 \delta^1 + \epsilon^2 \delta^0 + \epsilon^2 \delta^1 + \epsilon^3 \delta^0$$

図-2 Wave profile, $hx = -0.1$, $ao = 0.2$

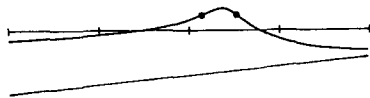


図-3 碎波発生点

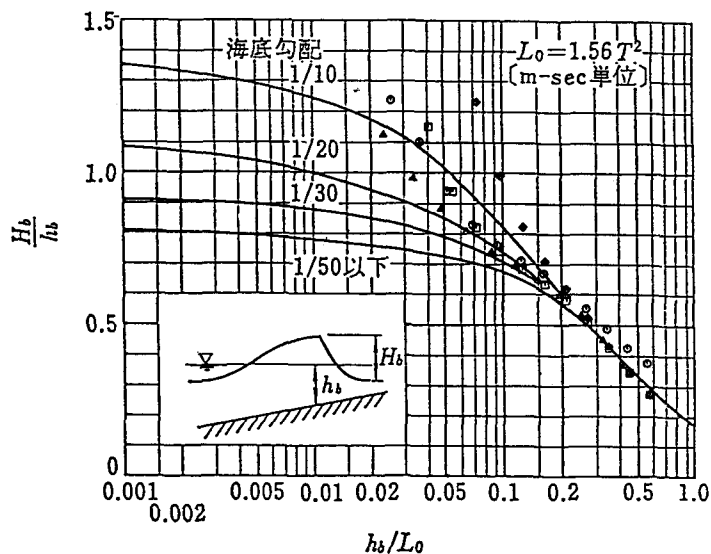


図-4(A)

水底勾配 $hx = -0.1$

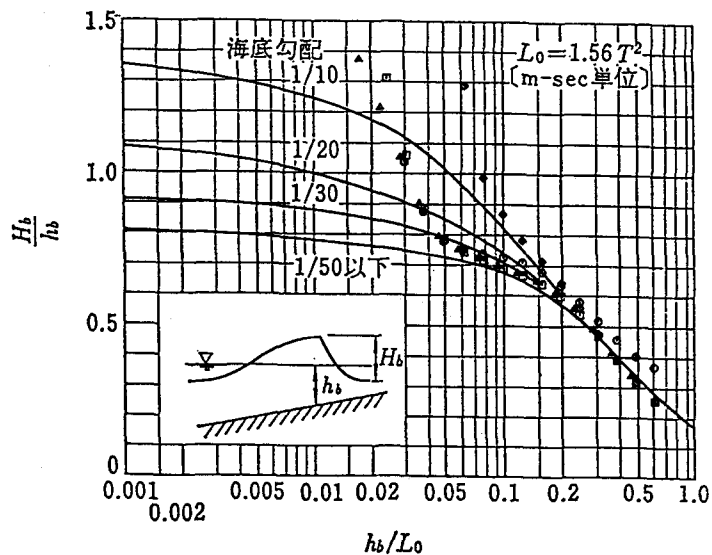


図-4(B)

水底勾配 $hx = -0.02$

図-4(A), 図-4(B)共に

- ◇; $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1$
- ; $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1 + \varepsilon^2 \delta^0$
- △; $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1 + \varepsilon^2 \delta^0 + \varepsilon^2 \delta^1$
- ; $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1 + \varepsilon^2 \delta^0 + \varepsilon^2 \delta^1 + \varepsilon^3 \delta^0$

図-4 碎波波高 実線は合田の碎波指標

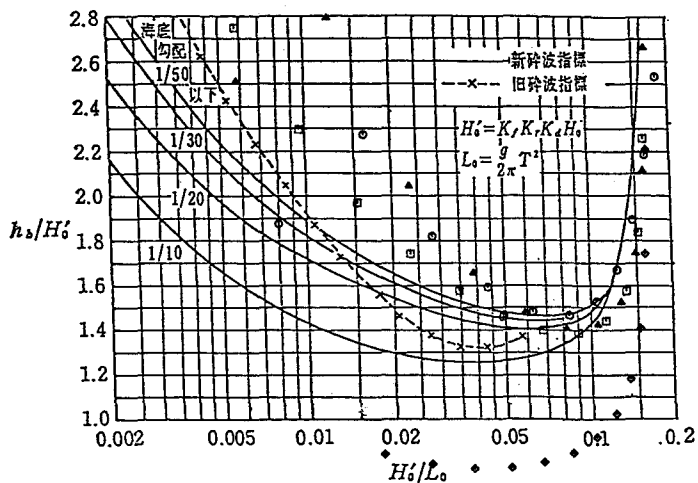


図-5 碎波水深 実線は合田の碎波指標

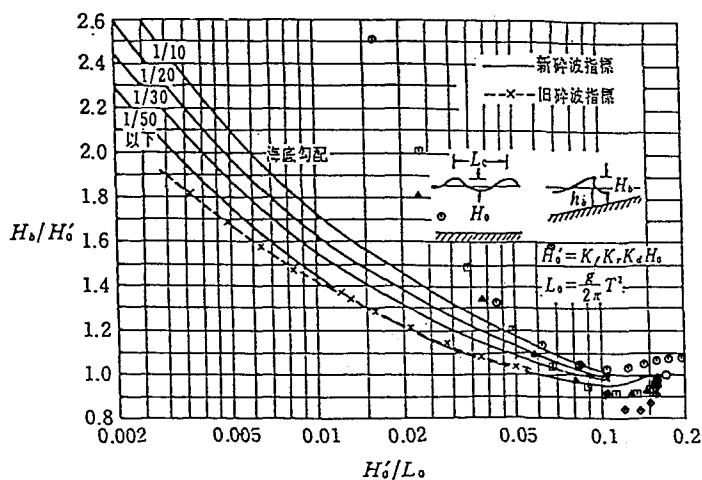


図-6 碎波波高 実線は合田の碎波指標

図-5, 図-6共に

- ◇: $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1$
- : $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1 + \varepsilon^2 \delta^0$
- △: $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1 + \varepsilon^2 \delta^0 + \varepsilon^2 \delta^1$
- : $\varepsilon^1 \delta^0 + \varepsilon^1 \delta^1 + \varepsilon^2 \delta^0 + \varepsilon^2 \delta^1 + \varepsilon^3 \delta^0$