

II-7 種々のあいまい推論法による流出予測に関する研究

北海道大学工学部 正員 藤田 睦博
同 上 学生員 諏訪 義雄

1. はじめに

ファジー推論の条件付き命題の定義やProduct、Sumの演算には種々の方法が提案されている。本研究ではいずれが最も流出予測に適するのを実流域への適用を含めて考察した。

2. ファジー推論

ファジー推論は、次のような推論形式をとる。式(2.1)または(2.2)の条件付き命題が既知のとき、

$$\text{If } X \text{ is } A \text{ then } Y \text{ is } B. \rightarrow P_1 \quad (2.1)$$

$$\text{If } X \text{ is } A \text{ then } Y \text{ is } B \text{ then } Z \text{ is } C. \rightarrow P \quad (2.2)$$

A' や A' , B' が与えられると、次式で B' , C' を推論しようとするものである。

$$\text{If } X \text{ is } A' \text{ then } Y \text{ is } B'. \quad (2.3)$$

$$\text{If } X \text{ is } A' \text{ then } Y \text{ is } B' \text{ then } Z \text{ is } C'. \quad (2.4)$$

式(2.1)は2次元の推論式であり式(2.2)は3次元の推論式である。また、 A, B, C, A', B', C' は、メンバーシップ関数である。式(2.1), (2.2)を定式化するに当たって様々な式が提案されている。表-2.1は、式(2.1)を P_1 , 式(2.2)を P として代表的な例を示したものである。なお、表の数字は以下の図、表、本文でも定義法の区別のため用いる。式(2.3), (2.4)の推論結果は次のように表現できる。

$$B' = P \diamond A' \quad (2.5)$$

$$C' = P \diamond A' \diamond B' \quad (2.6)$$

ここに、 $\diamond$ 印はファジー合成を示し、Max-Product演算を意味する。これらの式の具体的な計算法は後述するものとして、Product演算について先に説明する。ファジー理論ではさまざまなProduct演算法が定義されており、代表的な例を表-2.2に示す。表には対応するSum演算も提示している。図-2.1はProduct演算の計算例である。Product演算には $A \leq 0 \leq B$ の順序関係のあることがわかる。

表-2.1のいずれの形式が妥当であるかは、推論の対象に依存するものと思われるが、物理的なシステムであればModus Ponensを満足するか否かが一つの目安になろう。すなわち、式(2.1), (2.3)および式(2.2), (2.4)において

$$A' = A \rightarrow B' = B \quad (2.8)$$

$$A' = A, B' = B \rightarrow C' = C \quad (2.9)$$

の関係式が成立している必要がある。表-2.3は、2次元推論法において表2.1の7種類の条件付き命題の記述法と表2.2の4種類のProduct演算法を組み合わせるModus Ponensが成立しているか否かを調べたもので

表2.1 P_1, P の種類

(1) $P_1 = 1 \wedge (1 - A + B)$	$P = 1 \wedge (1 - P_1 + C)$
(2) $P_1 = (A \wedge B) \vee (1 - A)$	$P = (P_1 \wedge C) \vee (1 - P_1)$
(3) $P_1 = A \wedge B$	$P = P_1 \wedge C$
(4) $P_1 = \begin{cases} 1 & A \leq B \\ 0 & A > B \end{cases}$	$P = \begin{cases} 1 & P_1 \leq C \\ 0 & P_1 > C \end{cases}$
(5) $P_1 = \begin{cases} 1 & A \leq B \\ B & A > B \end{cases}$	$P = \begin{cases} 1 & P_1 \leq C \\ C & P_1 > C \end{cases}$
(6) $P_1 = (1 - A) \vee B$	$P = (1 - P_1) \vee C$
(7) $P_1 = \begin{cases} 1 & A \leq B \\ B/A & A > B \end{cases}$	$P = \begin{cases} 1 & P_1 \leq C \\ C/P_1 & P_1 > C \end{cases}$

表2.2 product 及び sum

Logical Product	$A \wedge B = \min\{A, B\}$
Algebraic Product	$A \cdot B = AB$
Bounded Product	$A \odot B = 0 \vee (A + B - 1)$
Drastic Product	$A \wedge B = \begin{cases} A & B = 0 \\ B & A = 0 \\ 0 & A, B < 1 \end{cases}$
Hamacher Product	$A \boxtimes B = \frac{AB}{A + B - AB}$
Einstein Product	$A \boxdot B = \frac{AB}{1 + (1 - A)(1 - B)}$

Logical Sum	$A \vee B = \max\{A, B\}$
Algebraic Sum	$A \dot{+} B = A + B - AB$
Bounded Sum	$A \oplus B = 1 \wedge (A + B)$
Drastic Sum	$A \vee B = \begin{cases} A & B = 0 \\ B & A = 0 \\ 1 & A, B > 0 \end{cases}$
Hamacher Sum	$A \boxplus B = \frac{A + B - 2AB}{1 - AB}$
Einstein Sum	$A \boxplus B = \frac{A + B}{1 + AB}$

表2.3 Modus Ponens(2次元)

	Max- $\wedge$	Max- $\cdot$	Max- $\odot$	Max- $\wedge$
(1)	$0.5(1+B)$	$0.25(1+B)^2$	B	B
(2)	$0.5 \vee B$	$0.25 \vee B$	B	B
(3)	B	B	B	B
(4)	B	B	B	B
(5)	B	B	B	B
(6)	$0.5 \vee B$	$0.25 \vee B$	B	B
(7)	$\sqrt{B}$	B	B	B

ある。表2.4は3次元推論の場合を示している。なお、*はModus Ponensの成立していない場合を示す。表2.3を見るとProduct演算の定義法の相違によって結果が異なっている。Max- ,Max- 演算では(3)~(5)のみがModus Ponensを満足している。一方、表-2.4では2次元推論と同様にProduct演算の相違によって結果が異なっているが、(4)の条

表 2. 4 Modus Ponens(3次元)

件付き命題の記述法は全てのProduct演算についてModus Ponensを満足していない。

次に具体的な演算例を表-2.1の(6) , Max - Logical Productについて示す。

図-2.2.(a)のようなメンバーシップ関数A,B,C,A',B'を想定する。各(i,j)の組合せについて演算を行う。

$$B = [b_i] = [0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ 0]$$

$$i=1,2,\dots,7$$

$$C = [c_j] = [0 \ 0 \ 1/3 \ 1 \ 1/3 \ 0 \ 0]$$

$$j=1,2,\dots,7 \quad (2.10)$$

例えば、 $i=3, j=4$ のとき図-2.2

(b)のメンバーシップ関数が得られる。同様に全ての(i,j)について演算を行うと、図-2.2

(c)に示すP-マトリックスが得られる。次に式(2.9)の推論であるが、A'は

図-2.2(a)に与えられるものとし、B'は式

(2.11)とする。A',B'が次の様なときMax-

Logical Product演算を以下に説明する。

$$B' = [b'_i] = [0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$i = 1,2,\dots,7$$

$$(2.11)$$

$j=4, i=2$ のとき、計算結果を図-2.2(d)に示す。

$i=1,2,\dots,7$ のときには

$$C'_{i4} = [0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (2.12)$$

この最大値をとるので $j=4$ のとき $C'_{i4}=1$ となる。全てのjについて同様の演算を行うと次の結果を得る。

$$C' = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5] \quad (2.13)$$

が得られる。図-2.3は、図-2.2(c)の計算を一般化してメンバーシップ関数B,Cの値の組合せによる①~④領域区分を示している。

①領域 B=0,C=0 ②領域 B≠0,C=0 ③領域 B=0,C≠0 ④領域 C≠0 B≠0

表2.5はこれらの領域における P_1 , Pを示している。(3)以外では①,②領域で P_1 , Pが0とならないため、A'やProduct演算によっては、C'に後述する図3.3の斜線部が生じる可能性がある。(1),(5),(6),(7)は上の例の

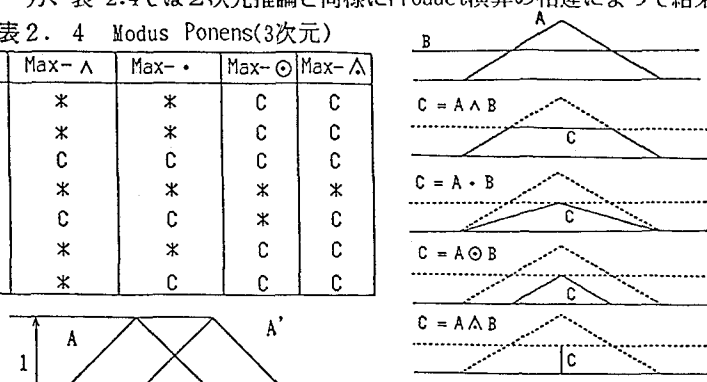


図 2. 1 product の計算例

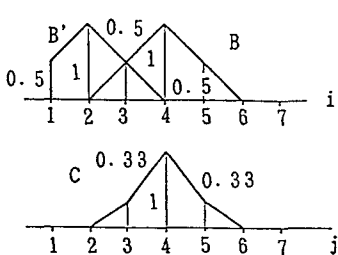


図 2. 2(a) A, B, C, A', B'

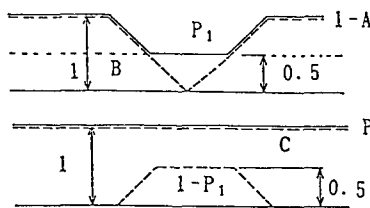


図 2. 2(b) P の計算例

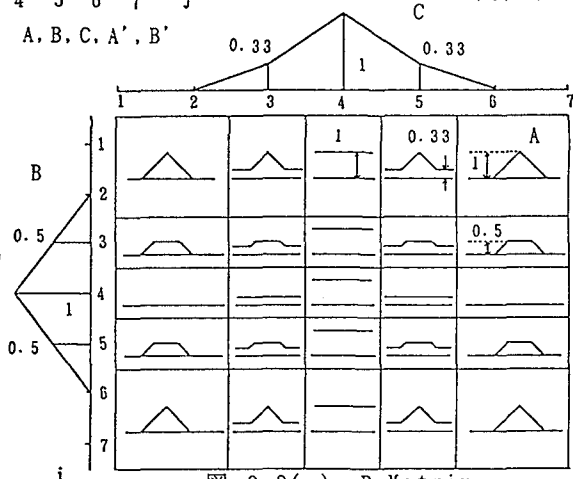


図 2. 2(c) P-Matrix

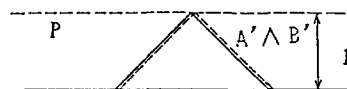


図 2. 2(d) Product 演算の例

ように、C=1の列でP-マトリックスのメンバーシップ関数の値が常に 1 となる。このため、Max-Product 演算を行うとその列では必ずC'=1になる。

3. 実流域への適応例

上記の理論を実流域に適用するため、降雨～流出量の関係式として次式を採用し3次元推論法を適用する。

$\Delta Q(t) = f(\Delta Q(t-1), r(t-1)) \quad \Delta Q(t) = Q(t) - Q(t-1) \quad (3.1)$
 ここに、 $Q(t), r(t)$ はt時刻における流出量及び降雨量を表す。ファジー推論の特長の一つは、式(3.1)の関数形 f が未知であっても式(2.2)のような if then 文に関係式を書き直すことができる。

if $r(t-1)$ is A then $Q(t-1)$ is B then $Q(t)$ is C. $\rightarrow P_t \quad (3.2)$
 この条件つき命題は時刻 t 毎に得られるので、時刻 t の関数になっている。図 2. 3 P の Matrix 構造
 t 時刻までに P_1, P_2, P_t が既知となる。これらの P_t
 の合成法としては和をとればよい。

$\Pi t = P_1 \blacktriangle P_2 \blacktriangle P_3 \blacktriangle \dots \blacktriangle P_t \quad (3.3)$
 $\blacktriangle$ は和演算を示す。ここでは、表2.2のLogical SumであるMax演算を用いるものとする。 $r(t), \Delta Q(t)$ のメンバーシップ関数を $M_r(t), M_{\Delta Q}(t)$ とすると、(t+1)時刻の流量増分量 $\Delta Q(t+1)$ は、式(2.6)と同様に、

$M_{\Delta Q}(t+1) = \Pi t \diamond M_r(t) \diamond M_{\Delta Q}(t) \quad (3.4)$
 により、メンバーシップ関数 $M_{\Delta Q}(t+1)$ が得られる。表-2.3でModus-Ponentを調べた7*4=28種類の組合せについて上述した計算を実流域に適用した。計算に用いた資料は米国N.Y.州のButternut creek (流域面積 154.6 km²) のものである。また、 $M_r(t), M_{\Delta Q}(t)$ には、図-3.1に示す各々幅が3,0.3

(mm/hr)である三角形のメンバーシップ関数を採用した。 $M_{\Delta Q}(t)$ は 0.1(mm/hr)刻みとした。t時刻において予測したメンバーシップ関数 $M_{\Delta Q}(t+1)$ 計算結果を図-3.2に示す。予測値 $Q(t+1)$ は式(3.5)で得られる。

$$Q(t+1) = Q(t) + \Delta Q(t+1) \quad (3.5)$$

より求める。 $\Delta Q(t+1)$ はメンバーシップ関数 $M_{\Delta Q}(t+1)$ の重心を予測値 $Q(t+1)$ としている。ここで、 $M_{\Delta Q}(t+1)$ の重心を計算する際に、次のような点を考慮した。すなわち、 $M_{\Delta Q}(t+1)$

が図-3.3のようになった場合、図-2.2

(a)でメンバーシップ関数B,Cを定義する範囲(図では1~7)に重心が依存している。ここでは図-3.3の斜線部を含めて重心を計算する方法(M1)と含めない計算方法(M2)の2通りの計算法を採用した。図-3.2で×印はM1,↑印はM2の計算結果を示している。図中の通し番号は時刻を示し、その時刻に描かれているメンバーシップ関数 $M_{\Delta Q}(t+1)$ は1ステップだけ過去で予測されたものである。

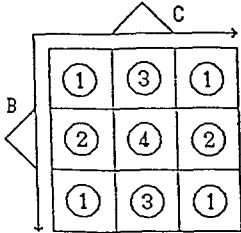


表 2. 5 P の Matrix 構造

	①	②	③
(1)	A	$P_1 = 1 \wedge (1 - A + B)$ $P = 1 - P_1$	$P_1 = 1 \wedge (A + C)$
(2)	A	$P_1 = (A \wedge B) \vee (1 - A)$ $P = 1 - P_1$	$P_1 = 1 - A$ $P = (P_1 \wedge C) \vee A$
(3)	0	0	0
(4)	$\begin{cases} 1 < 0 < A \\ 0 < 0 = A \end{cases}$	$P_1 = \begin{cases} 1 < A \leq B \\ 0 < B < A \end{cases}$ $P = 1 - P_1$	$\begin{cases} 1 < 0 < A \\ 0 < 0 = A \end{cases}$
(5)	$\begin{cases} 1 < 0 < A \\ 0 < 0 = A \end{cases}$	0	$\begin{cases} 1 < 0 < A \\ C < 0 = A \end{cases}$
(6)	A	$P_1 = (1 - A) \vee B$ $P = 1 - P_1$	$A \vee C$
(7)	$\begin{cases} 1 < 0 < A \\ 0 < 0 = A \end{cases}$	0	$\begin{cases} 1 < 0 < A \\ C < 0 = A \end{cases}$

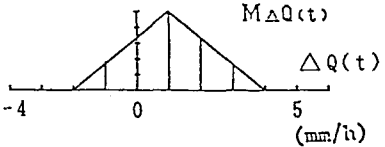


図 3.1 $r(t), Q(t)$ の Membership 関数

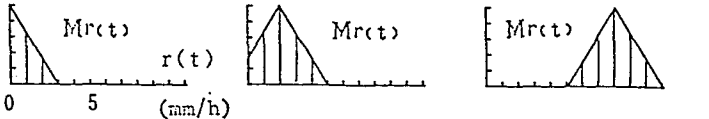


図 3.1 $r(t), Q(t)$ の Membership 関数



図 3.3 重心のとり方

なお、図-3.2 で $t=22$ のとき全範囲にわたって $grade$ が一様な場合は、M2 では予測値なしとした。図-3.2 で $t=8$ で (3) のとき、全範囲にわたってメンバーシップ関数 $M_{\Delta q}(t+1)$ の値が 0 となっているのは次のように説明される。図-2.2 で説明するならば t 時刻において A, B, C のメンバーシップ関数が与えられたとき (3) の条件付き命題の定義による P-マトリックス図-3.5 のようになる。したがって図-3.6 にしめすように A と A' が重複していないと (i, j) 要素のメンバーシップ関数と A' の Max-Product 演算は (3) の定義で 0 となるからである。図-3.2 より (4)-A は、 $t=11$ から全領域にわたって $grade$ が一定値 1 をとっており不都合な予測結果を与えている。(Min) は 0 となっている。(3)-A, (3)-A を比較すると、メンバーシップ関数の形状特性は類似している。(6)-A をみると、時刻 $t=11$ におけるメンバーシップ関数の形状をその後もとり続ける。これは前章で述べたように P-マトリックスの $C'=1$ となる列が式 (3.3) (Max 合成) により以後の時刻に保存されるためである。より $t+1$ 以降に保存されるためである。重心の取り方による違いをみると M2 の方が M1 より変動幅が大きい。式 (3.5) により求めた $Q(t+1)$ と実測値とを比較した例を図-3.4 に示す。ただし、図 3.4 は全て M2 の場合である。(3)-A, (3)-A を比較すると、Product の定義による差は認められない。(3) 以外の定義法でも同様であった。(4)-A は予測不能区間が多く問題外である。洪水予測にとって重要と思われる増水部に着目すると、(2)-A と (5)-A が他に比較して実測値からはなれている。次に、減水部についてみると、(2)-A 以外はみな予測が過大になっている。その中でも、(1)-A, (5)-A, (6)-A, (7)-A が (3)-A より過大に予測している。

4. まとめ

- (1) Product 演算による結果の違いは予測値における影響が小さい。
- (2) 最も良い方法と思われるのは (3)-◇ である。

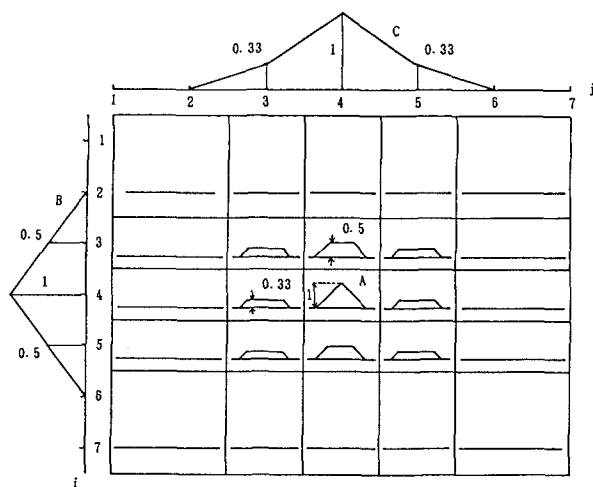


図-3.5 (3) による P-マトリックス

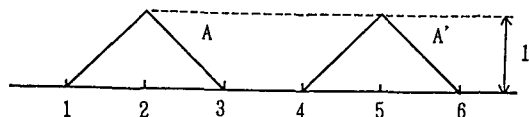


図-3.6 A, A' のデータ

参考文献

- 1) 藤田睦博：Fuzzy 集合理論の流出予測問題への応用、第29回水理講演会論文集、1985。
- 2) 藤田睦博：Fuzzy 理論と流出予測、水文・水資源学会1988年研究発表会要旨集、1988。

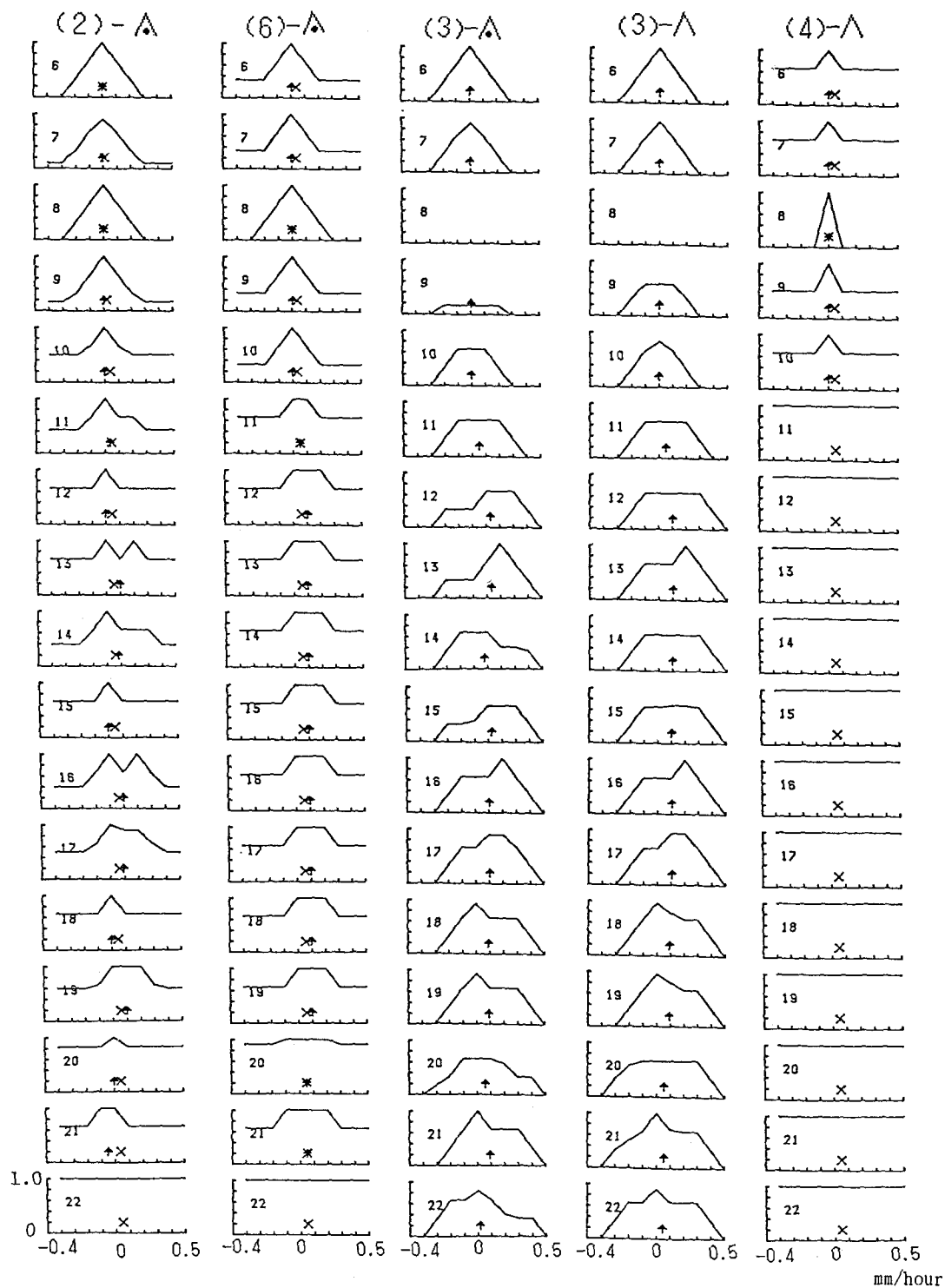


図 3.2 $M_{\Delta Q(t+1)}$ の Membership 関数

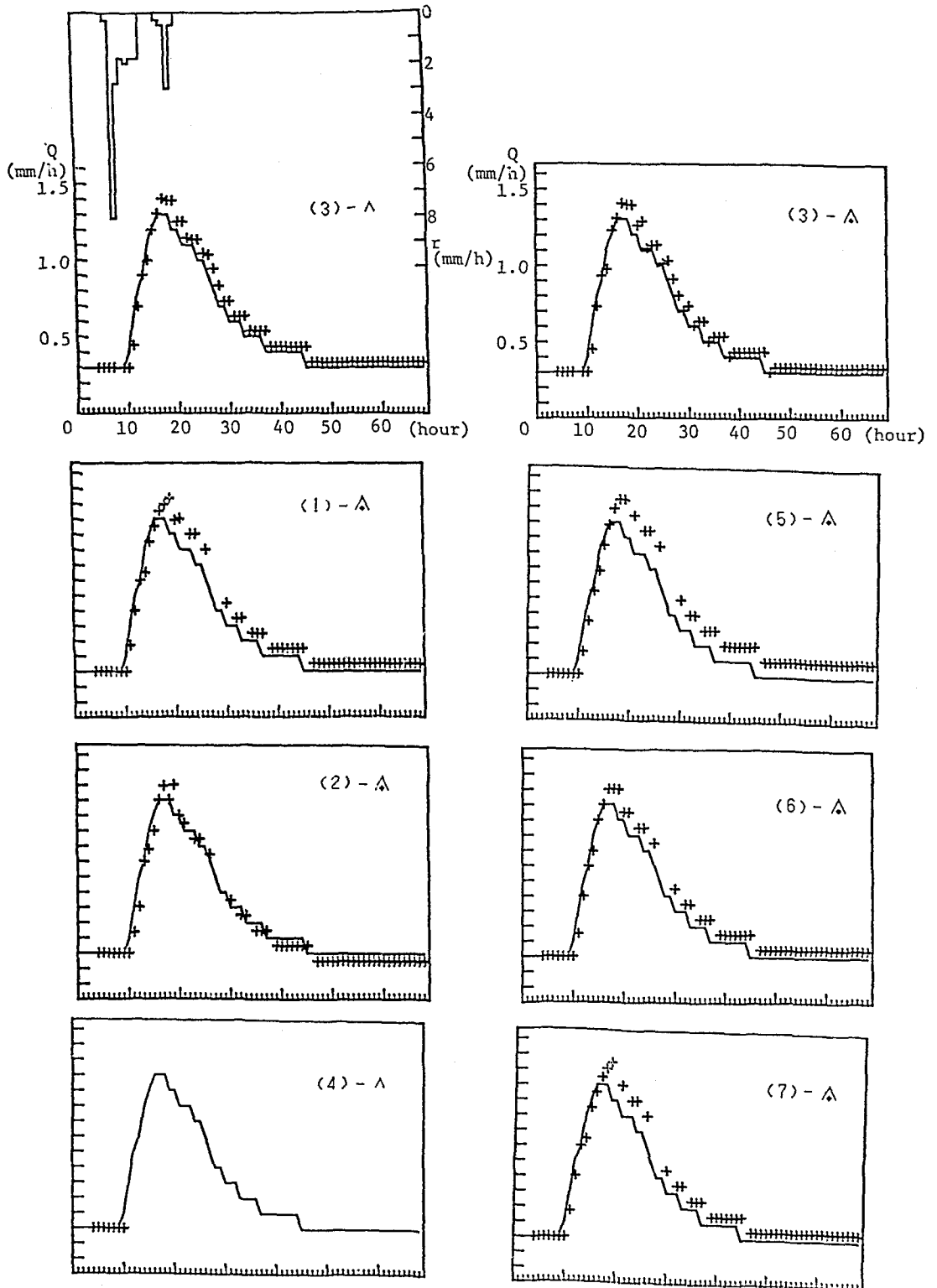


図 3.4 予測値のHydrograph