

II-6 降雨流出系の確率応答に関する研究

苫小牧工業高等専門学校 正 員 嵯峨 浩

1. はじめに

近年、レーダーの発達により降雨予測の実現が可能となった。予測値には信頼度が必ず付随しなければならず、入力の変動成分が出力に与える影響を理論的に把握することは、予測値の精度を議論する上で非常に重要である。本研究は空間的に均一だが、時間的に変動する降雨が、流出に与える確率応答特性を吟味したものであり、Brasら⁽¹⁾の理論を用いた理論解とシミュレーションの結果について比較・検討したものである。

2. 基礎理論

Kinematic Waveモデルは、現象の物理性を考慮した流出モデルとして知られ、斜面流出問題に対してよい近似度を与える。一定勾配状上のKinematic Waveは(1)式で与えられ、(3)式の無次元化基準量を用いると(2)式の無次元化された基礎式を得る。ここに、 T :時間、 X :斜面距離、 H :水深、 Q :流量、 R :降雨、 m :定数、 l :斜面長、 $\bar{r}$:平均有効降雨である。大文字はすべて無次元量を示し、以後の解析においてもこの表示に準じる。 m の値は($0 < m < 1$)の範囲をとるものとする。 $m=1$ の場合は線形であり解析解が得られるが、ここでは非線形の場合のみ吟味する。

降雨流出系の確率変動項には、入力としての降雨量・モデルパラメータ・初期条件などが考えられる。ここでは降雨量の確率変動成分として白色雑音を利用し、平均値及び分散が時間に対して一定の場合について検討する。(2)式の確率変動特性を知ろうとすると、 Q^m の項の扱いが問題となる。Brasらはベキ乗形の確率変数 Q^m において、 $\tilde{Q}$ を正規性の雑音とするととき(5)式を与えている。一は平均値、～は平均値からの偏差を表し、 $E(\cdot)$ は期待値演算子である。(5)式の Q^m を(2)式に代入すると(7)式を得る。

(7)式の期待値をとると(8)式が得られ、さらに(7)式から(8)式を差し引くことによって(9)式が得られる。平均値の特性を調べると(11)式の特性曲線から(12)式が得られ、解は(13)式で与えられる。ここで、 $T = \beta X$ ($X=1$)は到達時間である。一方、分散は同様に(9)式から(15)式の特性曲線が得られ、(16)式を解くことによって解は(17)式となる。(17)式を二乗して期待値をとると分散 σ_Q^2 は(18)式で与えられる。 $T = \gamma X$ ($X=1$)は同様に到達時間を示す。ここで、注意すべきことは、平均と分散の到達時間が異なることで

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \\ h = \alpha q^m \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R \\ H = Q^m \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} r_m &= \bar{r} \\ x_m &= l \\ q_m &= \bar{r} l \\ h_m &= \alpha \bar{r}^m l^m \\ t_m &= \alpha \bar{r}^{m-1} l^m \end{aligned} \quad (3)$$

$$R = \bar{R} + \tilde{R} \quad (4) \quad E(\bar{R}) = \bar{R} \quad E(\tilde{R}) = 0$$

$$Q^m = \beta \bar{Q} + \gamma \tilde{Q} \quad (5) \quad E(\bar{Q}) = \bar{Q} \quad E(\tilde{Q}) = 0$$

$$\beta = \bar{Q}^{m-1} \left\{ 1 + \frac{m(m-1)}{2} v^2 \right\} \quad (6)$$

$$\gamma = m \bar{Q}^{m-1} \left\{ 1 + \frac{(m-1)(m-2)}{2} v^2 \right\}$$

$$v = \frac{\sigma_Q}{\bar{Q}}$$

$$\frac{\partial(\beta \bar{Q} + \gamma \tilde{Q})}{\partial T} + \frac{\partial(\bar{Q} + \tilde{Q})}{\partial X} = \bar{R} + \tilde{R} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta \bar{Q}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} = \bar{R} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma \tilde{Q}}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial X} = \tilde{R} \end{cases} \quad (9)$$

$$\beta \frac{\partial \bar{Q}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} = \bar{R} - \bar{Q} \frac{\partial \beta}{\partial T} \quad (10)$$

$$\frac{d\bar{I}}{\beta} = dX = \frac{d\bar{Q}}{\bar{R} - \bar{Q} \frac{\partial \beta}{\partial T}} \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dT} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \bar{Q} = \frac{\bar{R}}{\beta} \quad (12)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{\beta} \bar{R} T \quad (0 < T < \beta X) \quad (13)$$

$$\bar{Q} = \bar{R} X \quad (T > \beta X)$$

$$\gamma \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial X} = \tilde{R} - \tilde{Q} \frac{\partial \gamma}{\partial T} \quad (14)$$

$$\frac{d\tilde{I}}{\gamma} = dX = \frac{d\tilde{Q}}{\tilde{R} - \tilde{Q} \frac{\partial \gamma}{\partial T}} \quad (15)$$

$$\frac{d\tilde{Q}}{dT} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial T} \tilde{Q} = \frac{\tilde{R}}{\gamma} \quad (16)$$

あり、 γ と β の値の大きさから、分散の方が到達時間が短くなることである。

(6)式の右辺第一項だけを採用した場合、(19)式から流出量の平均値は(20)式となり、(21)式は到達時間を表す。分散も同様に(22)式から(23)式の特曲線が得られ、(24)式の線形微分方程式をとくと解は(25)式となり、二乗して期待値をとると(26)式が得られる。(26)式は到達時間内に有効であり、それ以降は(23)式の $\partial \bar{Q} / \partial T = 0$ として求めた(27)式となる。

3. シミュレーション法

基礎理論を実証するためにシミュレーションを行った。方法は降雨量 R として特定の確率構造を持つ乱数列を作成し、直接(2)式を解くことにより流量系列 $Q(T)$ を得る。この流量系列を標本関数とし、総数1000個の標本関数に関して時刻 T ごとに平均値 $\bar{Q}$ 、分散 σ_R^2 を得た。なお、数値計算の方法は参考文献(2)を参照されたい。降雨は強度 $\bar{R}=3, 5$ の矩形降雨の二通り、及び $m=0.5, 0.7, 0.9$ 、降雨の分散 $\sigma_R^2=1, 1.1, 1.3, 1.5$ の三通りの組合せとした。なお、シミュレーション法の分散 σ_{RT}^2 は離散値であり、理論計算の分散 σ_R^2 は連続値であるから、 $\sigma_{RT}^2 = \sigma_R^2 / \Delta T$ を考慮する必要がある。したがって、実際には、シミュレーションで与えた分散に ΔT を乗じた値が理論計算での値に相当する。また、計算はすべて $\Delta T=0.05$ 、 $\Delta X=0.005$ とした。

図-1、図-2は平均値 $\bar{Q}$ を計算したものであり、 m の違いによる平均値の変動を示している。非線形性が強くなると立ち上がりが急になる。図-3は、分散 σ_R^2 の計算結果である。破線は $\bar{R}=5$ を、実線は $\bar{R}=3$ を示している。降雨の分散が一定にも関わらず、降雨の平均値によっても増減している。又、当然ながら非線形性が強くなると分散が増加している。注目すべきことは到達時間近傍でピークを有することである。図-4は $m=0.7$ の場合の σ_R^2 の相連による σ_R^2 を示している。図-3と同様に到達時間近傍でピークを有する。この結果から到達時間近傍が一番流量の確率変動が激しいということが推定される。

図-5は $\bar{R}=5$ のときの $\bar{R}$ と $\bar{Q}$ の相関係数である。図-6は理論値とシミュレーションの結果を比較したものであり、平均値はよく一致している。図-7は $\bar{R}=3$ の時の分散の結果である。 σ_R^2 の立ち上がり部分はよく一致しているがピーク後の定常部分において m が小さくなると合致しなくなる。図-8は同様に $\bar{R}=5$ のばあいであり、 σ_R^2 の立ち上がりは一致するが定常状態では m が大きい場合は合致し、小さくなるとやはり理論値とかけ離れた値となっている。図-9は矩形降雨に三角形降雨をのせた場合の流量の平均値である。これは雑音を発生させたときに降雨が負値をとらないように配慮したためである。 m の相連による平均値は矩形降雨と同様の傾向を持っている。図-10は分散を計算したものである。 m が小さくなると σ_R^2 増大している。また、矩形降雨と同様に到達時間近傍でピークを有し、その後減少している。この降雨の平均強度は4であり、分散のピークの値は矩形降雨の場合の $\bar{R}=3$ と $\bar{R}=5$ の中間の値をとっており、その形状もよくにている。

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{R}(\tau) d\tau \quad (17)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{T^2} \sigma_R^2 T \quad (0 < T < T_X) \quad (18)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{T} \sigma_R^2 X \quad (T > T_X)$$

$$m \bar{Q}^{m-1} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} = \bar{R} \quad (19)$$

$$\bar{Q} = (\bar{R} T)^{\frac{1}{m}} \quad (20)$$

$$T = \bar{R}^{m-1} X^m \quad (21)$$

$$\frac{\partial m \bar{Q}^{m-1} \bar{Q}}{\partial T} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} = \bar{R} \quad (22)$$

$$\frac{dT}{m \bar{Q}^{m-1}} = dX = \frac{d\bar{Q}}{\bar{R} - m(m-1) \bar{Q}^{m-2} \bar{Q} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial T}} \quad (23)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dT} + P(T) \bar{Q} = F(T) \quad (24)$$

$$P(T) = \frac{m-1}{m} \frac{1}{T}$$

$$F(T) = \frac{1}{m} (\bar{R} T)^{\frac{1-m}{m}} \bar{R}$$

$$\bar{Q}(T) = \frac{1}{m} \bar{R}^{\frac{1-m}{m}} T^{\frac{1-m}{m}} \int_0^T \bar{R} dT \quad (25)$$

$$\sigma_R^2 = \left\{ \frac{1}{m} \bar{R}^{\frac{1-m}{m}} T^{\frac{1-m}{m}} \right\}^2 \iint \sigma_R^2 \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ = \frac{1}{m^2} \bar{R}^{2(1-m)} \sigma_R^2 T^{\frac{2-m}{m}} \quad (0 < T < m \bar{R}^{m-1} X^m) \quad (26)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{m} \bar{R}^{1-m} X^{2-m} \sigma_R^2 \quad (T > m \bar{R}^{m-1} X^m) \quad (27)$$

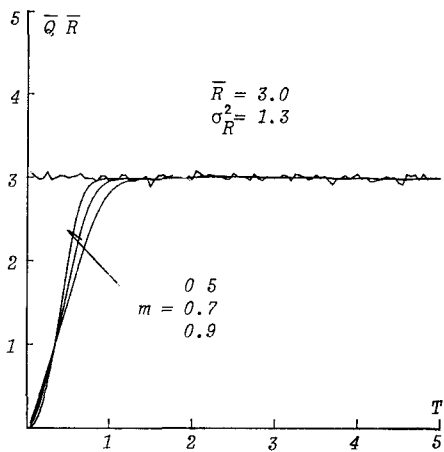


图-1

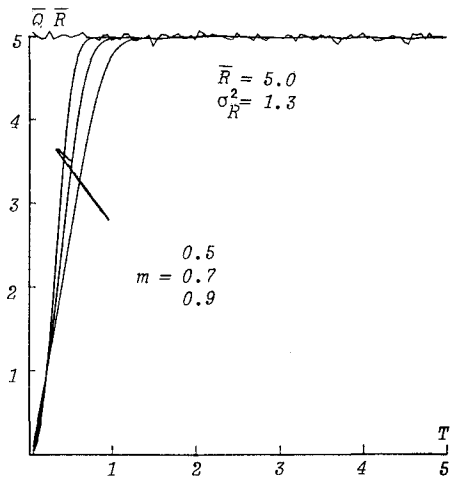


图-2

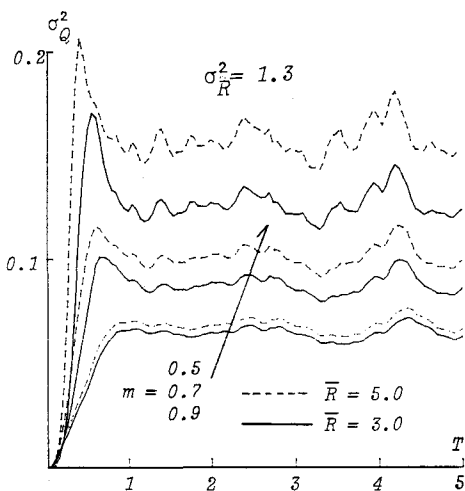


图-3

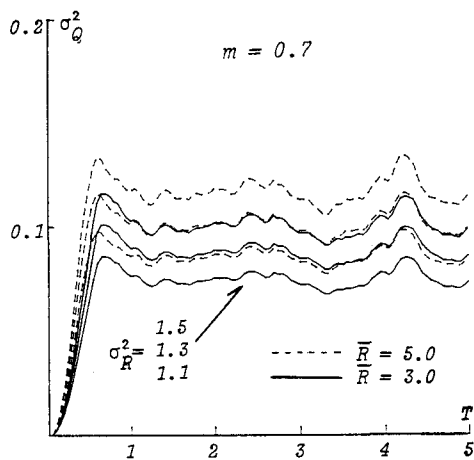


图-4

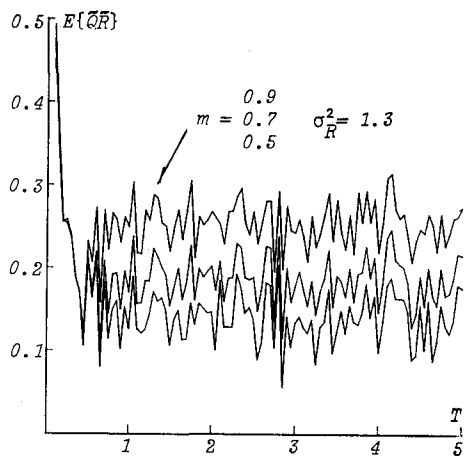


图-5

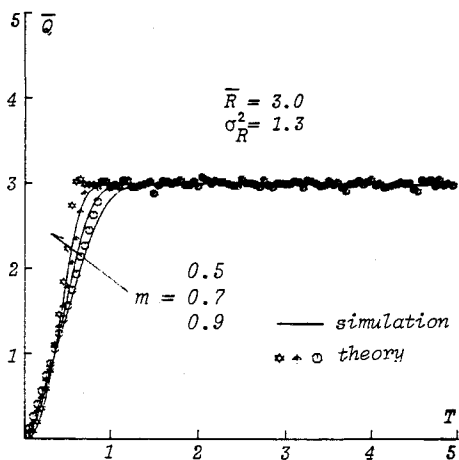


图-6

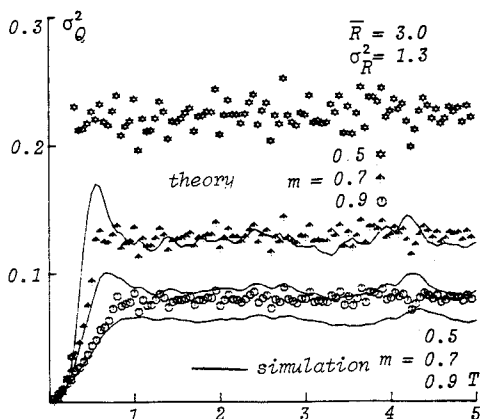


図-7

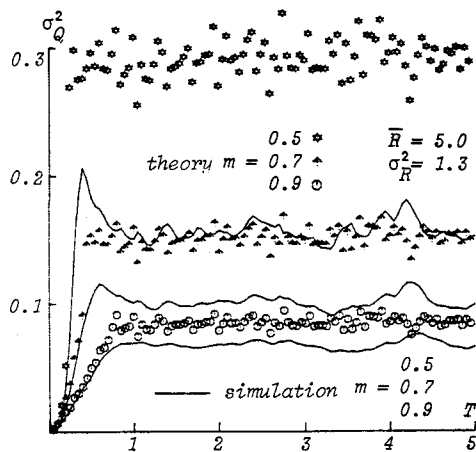


図-8

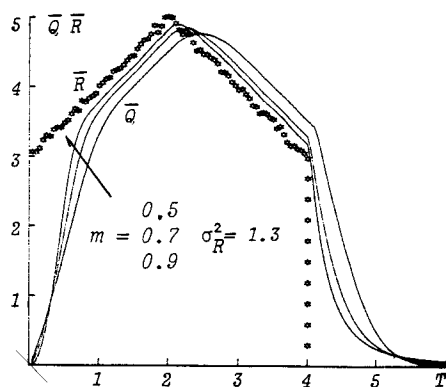


図-9

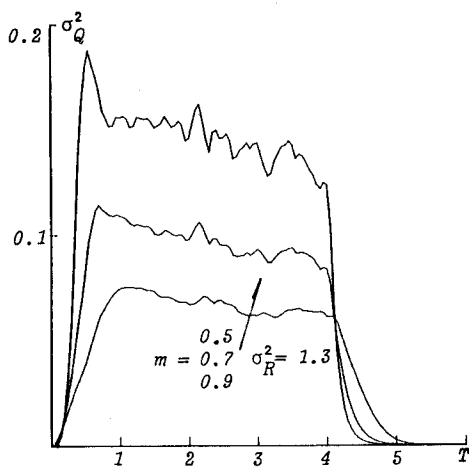


図-10

以上のように計算例は十分ではないが、確率応答特性を解明することにより、降雨に含まれる誤差あるいは降雨予測値に含まれる不確実性が、流出にどの様に影響を与えるかを検討することができる。

なお、本研究の遂行に当たり、北海道大学工学部・藤田睦博教授及び道口技官に多大なる協力を得たことを付記し謝意を表します。最後に、本研究は昭和63年度文部省科学研究補助金（特定研究（1）・代表・北大工・岸 力）の補助を受けた。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- (1) Bras and Georgakakos: Real time Non-linear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting : A statistical linearization approach. Third international symposium on Stochastic Hydraulics, pp95-105, 1980
- (2) RUH-Ming, Daryl and Michael: Nonlinear Kinematic Wave Approximation for Water Routing Water Resources Reserch, Vol.11, No.2, pp245-252, 1975
- (3) 藤田・山岡・羽山: 貯留関数法における確率応答に関する研究 : 土木学会北海道支部論文報告集第37号、pp231-236, 1980