

I-37 剛体の落下衝撃力による平板の動的応答

専修大学北海道短大 正員 三上敬司
 日本大学生産工学部 正員 能町純雄
 室蘭工業大学 正員 松岡健一
 専修大学北海道短大 正員 金子孝吉

1. まえがき

最近、各種の土木構造物が受ける衝撃力の研究に関しては、多くの研究者によって実験および理論的解析が行われている。Hertz^{1), 2)} は、基本的な衝撃問題として弾性球同士が衝突した場合の衝撃力と局部変位との関係式を求めている。また、Mindlin³⁾ は、楕円球同士の弾性接触における鉛直および水平方向のコンプライアンスを求めている。また、このような三次元弾性接触論問題に関しては、宮本⁴⁾ およびガーリン⁵⁾ が任意形状の剛体を半無限弾性体へ圧入した場合の力と変位の関係についてそれぞれ重調和関数と調和関数を用いて解いている。著者ら⁶⁾ は、開発局土木試験所（現在：開発土木研究所）で行われた落下衝撃実験において球底の重錘を用いて実験を行った結果⁷⁾ と平板上に設けたパネモデルへ剛体を落下させた場合について衝撃力に関する理論的解析を行った結果とを比較検討している。伊藤ら⁸⁾ は、中速度衝撃実験装置の平底のスチールハンマーをN₂ガスで50m/sec以下の速度でRC床版へ衝突させた場合の床版の貫入量に関する式を提案している。坪田ら⁹⁾ は、4点支持されたRC床版上のロードセルへ重錘を落下させた場合の衝撃荷重と変位との関係を求めている。一方、理論解析に関しては、この実験結果のひずみ速度効果を考慮してデュアメル積分による非線形lumped-mass-systemによって解析している。岩崎¹⁰⁾ は、弾性床土の平板に球底重錘による衝撃荷重が作用した場合の動的応答について理論解析を行っている。しかし、今まではいずれも重錘の底の形が平底、球底かまた楕円球底であって、錐底に関する研究についてあまり多く行われていないように思われる。さらに、この種の問題例としては、錐底の落石が直接ロックシェッドへ落下した場合、船が橋脚や岸壁に衝突した場合そして飛来物が原子炉構造物に衝突した場合などの重要な問題に適用できる。そこで、本論では、図-1に示したように高さHから錐底の角度2 α の剛体を無限平板へ落下させた場合の板の表面の局部変位wに関しては、宮本が求めている半無限弾性体へ錐底剛体を圧入させた場合のその力と表面の変位との関係式をHertzの弾性接触論を本論文に適用した。この局部変位wを考慮して、平板が受ける衝撃力と落下高さとの関係、衝撃曲げモーメントと時間の関係等に関する理論解析を行う。

2. 理論解析

図-1に示したように、密度 ρ 、ポアソン比 ν 、弾性係数E、厚さdである無限平板上へ質量Mで、かつ錐底の角度が2 α の重錘を高さHから落下させた場合の衝撃力Pと平板の中立軸の鉛直変位 δ に関する関係を求める。半径方向r、円周方向 θ とし、無限平板の中立軸の鉛直変位 δ に関する平板の振動方程式は、以下に示すとおりである。

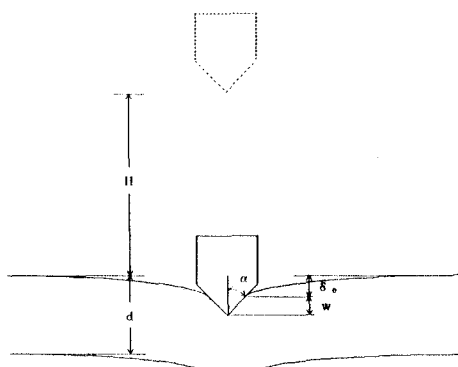


図-1 本理論におけるモデル

$$\rho d \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + D \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \delta = P \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、板の剛度： $D = E d^3 / 12(1 - \nu^2)$

(1) 式に時間 t に関して Laplace 変換を施し、さらに、中立軸の変位 $\delta = r J_0(r \xi)$ と置いて、 r に関して Hankel 変換を施すと次式となる。

$$J_0 \{L[\delta]\} = \frac{L[P]}{2\pi D (\xi^4 + \frac{\rho d}{D} s^2)} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 s は Laplace 演算子であり、 $L[f]$ は Laplace 変換記号である。 $J_0\{f\}$ は以下に示す r に関する無限積分である。

$$J_0 \{L[\delta]\} = \int_0^\infty L[\delta] r J_0(r \xi) dr \dots\dots\dots (3)$$

(2) 式を ξ について Hankel 逆変換すると、中立軸に関する鉛直変位と衝撃力との関係式を求めることができる。ところで、 $kei(f)$ は Kelvin 関数である。

$$L[\delta] = \frac{L[P]}{2\pi D} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho d}{D}}} \cdot kei\left(4\sqrt{\frac{\rho d}{D}} \sqrt{s} r\right) \dots\dots\dots (4)$$

無限平板の中心位置 $r=0$ での中立軸の鉛直変位 δ_0 は次式となる。

$$L[\delta_0] = \frac{L[P]}{8\sqrt{\rho D d} s} = \frac{L[P]}{s a} \dots\dots\dots (5)$$

ところで、 $a = 8\sqrt{\rho D d}$

図-1 に示したように、剛体が平板へ落下した場合の板の中立軸の鉛直変位 δ 、錐底剛体による無限平板の局変位 w とした場合の剛体の運動方程式は次式となる。

$$M \left(\frac{d^2 \delta_0}{dt^2} + \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + P = 0 \dots\dots\dots (6)$$

初期条件は $t=0$ で初速度 $v_0 = \sqrt{2gH}$ (g : 重力加速度) であるから、従って、(6) 式を時間 t に関して Laplace 変換すると次式となる。

$$Ms^2 \{L[\delta_0] + L[w]\} + L[P] = Mv_0 \dots\dots\dots (7)$$

角度 2α の錐底の剛体が平板へ落下し場合の局変位と衝撃力との関係式は、次のようになる。

$$w = kP^{\frac{1}{2}}, \quad k = \left(\frac{(1-\nu^2)\pi}{2E \tan \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (8)$$

(5)、(8) 式を (7) 式に代入し、Laplace 逆変換すると次式のような衝撃力 $P(t)$ に関する非線形積分方程式となる。

$$kP^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{1}{a} \int_0^t P(\tau) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = v_0 t \dots\dots\dots (9)$$

(2) 式を s について Laplace 逆変換して、さらに、 ξ について Hankel 逆変換すると、

$$\delta = \frac{4}{\pi a} \int_0^t P(\tau) \int_0^\infty \frac{J_0(\xi r)}{\xi} \sin\{\gamma_0 \xi^2(t-\tau)\} d\xi d\tau \dots\dots (10)$$

となる。

(10) 式を ξ について無限積分すると、

$$\delta = \frac{2}{\pi a} \int_0^t P(\tau) \operatorname{si} \left\{ \frac{r^2}{4\gamma_a(t-\tau)} \right\} d\tau \quad \dots\dots\dots (11)$$

(11) 式を半径方向の板の曲げモーメント式に代入すると、

$$M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial r} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$= -\frac{r_a}{2\pi} \int_0^t P(\tau) \left\{ \frac{1}{2\gamma_a(t-\tau)} \cos \left(\frac{r^2}{4\gamma_a(t-\tau)} \right) + \frac{\nu-1}{r^2} \sin \left(\frac{r^2}{4\gamma_a(t-\tau)} \right) \right\} d\tau \quad \dots (13)$$

ここで、 $r_a = \sqrt{\frac{\rho d}{D}}$ 、 $\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin y}{y} dy$

3. 数値計算例

数値計算例においては、文献6)、7)の開発局土木試験所における衝撃実験データを用いた。平板に関しては、コンクリート床版を想定して $\nu=1/6$ 、 $E=3 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ 、 $\rho=2.5 \text{ t/m}^3$ 、 $d=10 \text{ cm}$ 、さらに、剛体に関しては、質量を $M=100 \text{ kg}$ として数値計算を行った。また、(9)、(11) 式における時間に関する積

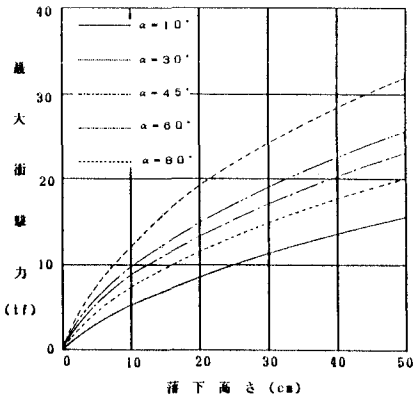


図-2 最大衝撃力と落下高さの関係図

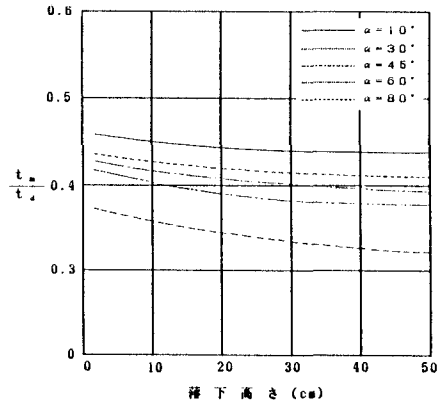


図-3 (最大衝撃力に達する時間/衝撃作用時間) と落下高さの関係図

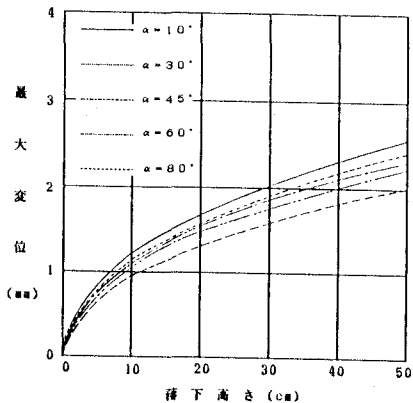


図-4 最大変位と落下高さとの関係図

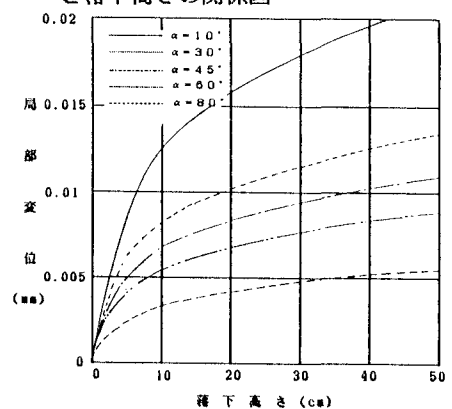


図-5 局部変位と落下高さとの関係図

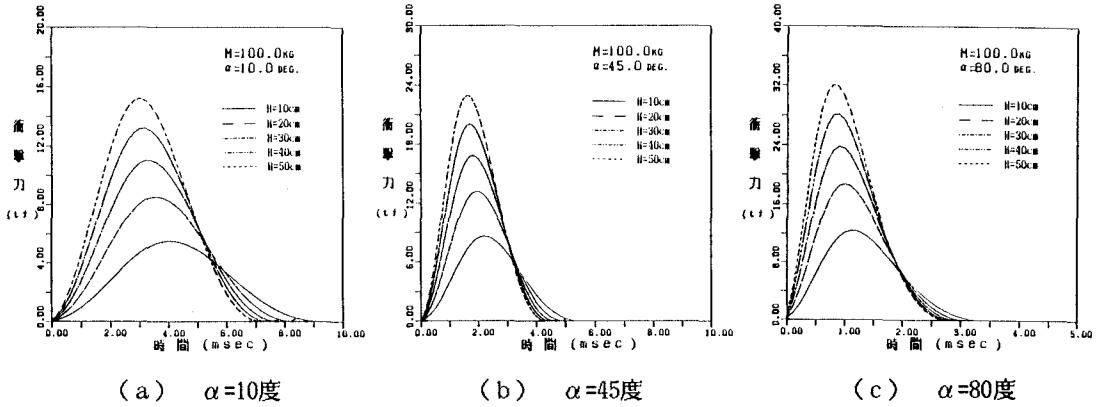


図-6 衝撃力と時間の関係図

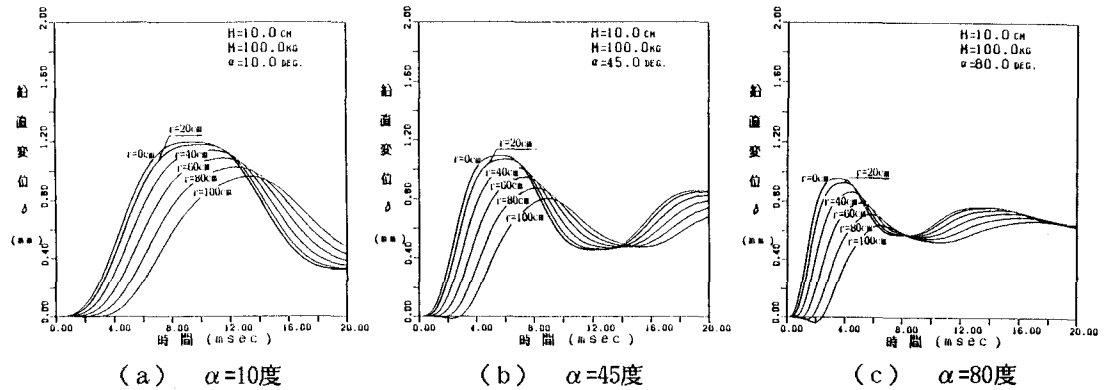


図-7 中立軸の最大鉛直変位と時間の関係図

分は、時間刻みが $10\mu\text{sec}$ としてSimpsonの1/3、3/8則を用いて数値計算を行った。

図- (2) ~ (5) は、剛体の錐底の角度 α をそれぞれ10、30、45、60、80度と変化させた場合の最大衝撃力、最大衝撃力に達する時間(t_m)と衝撃作用時間(t_d)との比、最大変位、局変位と落下高さとの関係を示している。図- 2、3より、最大衝撃力は、落下高さが高く、および錐底の角度の大きさに比例して大きくなるが、逆に、最大衝撃力に達する時間と衝撃作用時間との比は、落下高さが高かつ錐底の角度が大きくなるにつれて小さくなっている。一方、図- 4、5の最大変位と局変位に関しては、落下高さの高さに比例してそれぞれの変位も大きくなるが、錐底の角度が大きくなると図- 3の時間比と同様に変位は小さくなる傾向にある。

図- 6 (a) ~ (c) は、錐底の角度 α がそれぞれ10、45、80度、落下高さ $H = 10 \sim 50\text{cm}$ に対する衝撃力と時間の関係を示している。前述したように、落下高さが大きくなると衝撃力は大きくなるが、最大衝撃力に達する時間と衝撃作用時間が次第に右側から左側へ移行している、つまり逆に短い時間に生じていることが図より明らかである。さらに、錐底の角度が大きくなると、もっと顕著になり、 $\alpha=10^\circ$ の場合と80度の場合とを比較すると、80度の方が最大衝撃力に関しておよそ2倍大きくなり、最大衝撃力に達する時間と衝撃作用時間に関してはおよそ3倍以上短いことを示している。

図- 7 (a) ~ (c) は、落下高さ $H=10\text{cm}$ の場合の半径方向の長さをそれぞれ $r=0、20、40、60、80、100\text{cm}$ 、および錐底の角度 $\alpha=10、45、80^\circ$ に対する中立軸の鉛直変位と時間との関係を示している。図-

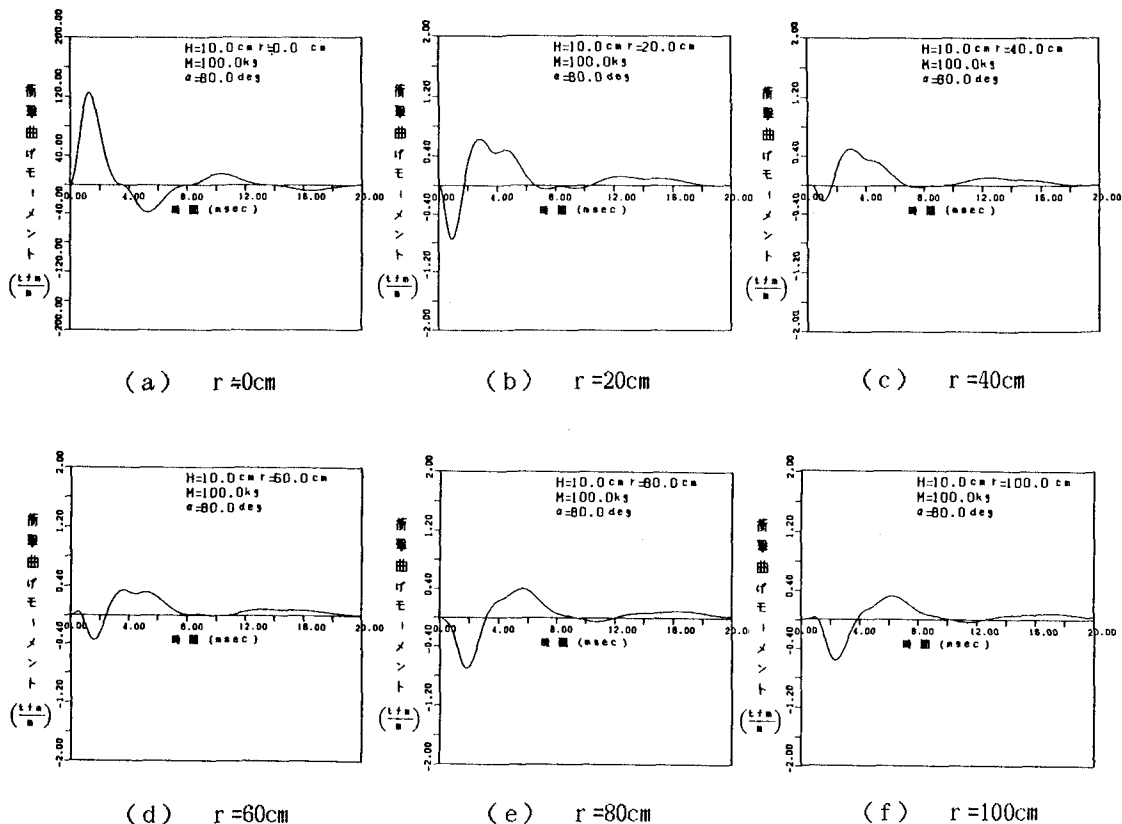


図-8 衝撃曲げモーメントと時間の関係図

7 (a) では、 $r=0\text{cm}$ で最大変位となり、 r が大きくなるに従って変位は小さくなり、かつ、立ち上がり時間も徐々に遅れて立ち上がる。しかし、14msec 過ぎぐらいの変位に関しては、逆に $r=100\text{cm}$ が最大となり、 $r=0\text{cm}$ では最小変位となる。図-7 (b) でも、(a) と同様な傾向であるが、全体として変位は若干小さくなり、立ち上がり時間および最大変位に達する時間に関しては短くなっている。 $r=80, 100\text{cm}$ では、1msec ぐらいで僅かではあるが一旦負の変位となってから正の変位へ移行して、それぞれ 9msec、10msec あたりで最大となっている。その後は、再び 14msec あたりで $r=0\text{cm}$ での変位が最も大きくなる。図-7 (c) でも、(a)、(b) と同様なことが言えるが、(b) と比較すると $r=60\text{cm}$ でも 0.5msec あたりで負の変位となり 1msec 過ぎで正の変位へ移行している。さらに、8msec あたりで $r=0$ から 100cm まで全て一致し、それを過ぎると再び $r=0\text{cm}$ が最も大きくなり、再び 18msec 過ぎで一致している。いずれの図も半径方向の長さが大小によって時間的に変位が変化して行くことが良く分かる。

図-8 (a) ~ (f) は、 $H=10\text{cm}$ 、 $\alpha=80$ 度の場合の半径方向 $r=0$ (0.1mm)、20、40、60、80、100cm の衝撃曲げモーメントと時間との関係を表している。(13) 式の曲げモーメント式は、 $t=0$ の近傍で余弦関数および正弦関数が激しく変化するために数値積分が不可能となる。従って、本論では (11) 式で求めた鉛直変位を直接に数値微分を行い、(12) 式に代入して衝撃曲げモーメントを求めた。さらに、 $r=0$ では、微分が不可能なので上述したように $r=0.1\text{mm}$ の荷重点直下に非常に接近しているところで数値微分を行った。図-8 (a) は、ほぼ荷重点近傍での半径方向の衝撃曲げモーメントを表しているために他の図 (b) ~ (f) に比べて 500 倍以上のオーダーの違いがある。さらに、荷重点近傍における衝撃曲

げモーメントは、図-6(c)に示した衝撃力図(実線)の最大衝撃力に達する時間と衝撃作用時間と全く同じである。図-8(b)では、0~2msecの立ち上がり時では、負の衝撃曲げモーメントとなり、さらに(a)と比較して最大の衝撃曲げモーメントはかなり小さくまた形状的にもかなり異なった傾向を示している。図-8(c)、(d)、(e)、(f)においても同様なことが言えるが、特に、早い時間での衝撃曲げモーメントの大きさが半径方向の長さによってかなり変化していることが良く分かる。

4. あとがき

以上の数値計算例に示したことをまとめると次のことが言える。

- 1) 最大衝撃力に関しては、落下高さが高くなり重錐錐底の角度が大きくなるにつれて大きくなり、逆に中立軸の鉛直方向の最大変位と局部変位は小さくなり、最大衝撃力に達する時間と衝撃作用時間との比も小さくなる。つまり、重錐の底の角度が鋭いほど変位が大きくなると言うことは慣性力も大きくなり平板のクッション効果により衝撃力が緩和されると思われる。
- 2) 中立軸の鉛直変位と時間との関係に関しては、底の角度が大きくなるに従って鉛直変位は徐々に小さくなり、時間に関しては全体的に早く変位が生じる傾向にある。半径方向に関しては、長くなるにつれて時間的に遅くなる傾向にある。
- 3) 衝撃曲げモーメントと時間の関係に関して、荷重点直下の近傍では衝撃曲げモーメントが他の場所と比べるとかなり大きくなり、また、時間的には衝撃力と全く同じである。半径方向へ衝撃力が伝搬するにつれて時間および衝撃曲げモーメントの大きさがかなり変化している。

尚、今後は、3)についてもう少し錐底の角度、落下高さの違いによってどのような挙動になるのか検討するつもりである。

本論文においての数値計算は、北海道大学大型計算機センターのHITAC-682Hを使用して行った。

[参考文献]

- 1) S.P.Timoshenko, J.N.Goodier: Theory of Elasticity, Mcgraw-Hill, pp.409~422, 1970.
- 2) A.E.Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, N.Y.Dover Publications fourth edition, pp.183~200, 1944.
- 3) R.D.Mindlin: Compliance of Elastic Bodies in Contact, J. of Applied Mechanics, pp.259~268, sept., 1949.
- 4) 宮本博: 3次元弾性論、裳華房, pp.40~51, 1977.
- 5) JI.A.ガーリン著(佐藤常三訳): 弾性接触論、現代工学社, PP.122~147, 1974.
- 6) 三上敬司、吉田紘一、松岡健一、能町純雄: 低速度衝撃力によるコンクリート床版の動的応答、構造工学論文集, Vol.34A, pp.767~778, 3月, 1987.
- 7) 佐藤睦治、吉田紘一、千葉利則: 衝撃を受けるRC版の挙動に関する実験について、落石衝撃及びロックシェッド”の設計に関するシンポジウム、北陸道路研究会編, pp.21~27, 7月, 1986.
- 8) H.Ohnuma, C.Itho, S.G.Nomachi: Dynamic Response and Local Rupture of Reinforced Concrete Beams and Slabs under Impact Loading, 8th SMIRT, 1985.
- 9) H.Tsubota, T.Yamada: Nonlinear Analysis by Duhamel Integral of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Impact Loadings, Theoretical and Applied Mech., Vol.33, pp.363~371, 1985.
- 10) 岩崎正二: 衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析、岩手大学工学部研究報告, Vol.37, 1984.