

I-36 長方形ばりを伝播する応力波の波動特性

北見工業大学 正員 三 上 修 一
同 同 大 島 俊 之
日大生産工学部 同 能 町 純 雄

1. まえがき

健全度診断の必要性が増すなかで鉄筋コンクリート構造物のような複合材料部材について超音波を用いて内部構造の診断を実施する場合にはその不均質性に着目した応力波動の特性を把握しておくことがまず必要である。^{1), 2), 3)}このような複合材料構造の応力波動特性を明らかにするためにはその内部に含まれる鉄筋、骨材、クラックなどのInclusionの影響をまず最初に明らかにしなければならない。Niwa⁶⁾らは境界積分方程式法を用いて周波数応答特性から半無限体中のInclusionによる散乱挙動を解析した結果を示している。また一般に複合材料部材の応力波動分散特性に関する研究はAchenbachら⁷⁾など多くの研究がある。大島ら⁸⁾は有限プリズム法により軸方向に補強繊維を有する複合材料部材の応力波動の分散特性を母材との弾性係数比、密度比と波長の関係において明らかにした。また構造物の劣化にともない構造部材の局部的弾性係数の減少が考えられる。本研究では長方形ばりの固有振動数・固有モード、変位応答、速度応答などから複合長方形ばりの波動特性を検討し、複合材料部材の減衰係数による波動特性に関する検討も行った。

2. 複合長方形ばりの動的応答解析

(1) 基礎方程式の誘導

図1に示すように積層複合長方形ばり中に補強繊維質量(図中の○印)が規則的に分布し、各長方形ばり要素の変位は要素内で直線分布しているものとする。動的力のつりあい式に重み関数をかけ、これに節点での境界条件を考慮し板厚を1とし体積積分するとガラーキン法により次式が得られる。

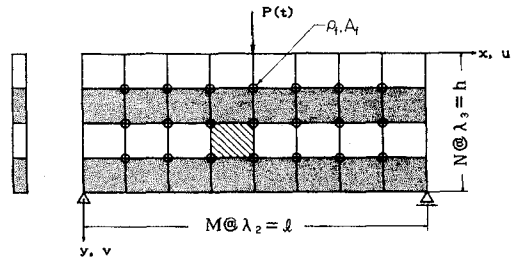


図1 離散補強繊維を考慮した複合長方形ばり

$$\int_V L_1 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dV = 0 \quad (1)$$

$$\int_V L_2 \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dV = 0 \quad (2)$$

ここで L_1 、 L_2 は形状関数である。したがってこれらの積分を実行することにより長方形要素に関する節点力と節点変位の関係式が得られる。次に補強繊維質量力の二方向の成分を含めた節点での力のつりあいを取ると、次のように差分方程式として表される。

$$\begin{aligned} & \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2^2}{6} \Delta_x^2 \Delta_y^2 u_{xy} + \frac{\mu\lambda_2^2}{6} \Delta_x^2 \Delta_y^2 u_{xy} \\ & + \frac{\mu + \lambda}{4} \lambda_2 \lambda_3 \Delta_x \Delta_y v_{xy} = \frac{\rho\lambda_2\lambda_3}{36} \Delta_x^2 \Delta_y^2 u_{xy}'' + \rho_f A_f u_{xy}'' \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu + \lambda}{4} \lambda_2 \lambda_3 \Delta_x \Delta_v u_{xv} + \frac{(2\mu + \lambda) \lambda_z^2}{6} \Delta_x^2 \Delta_v^2 v_{xv} + \frac{\mu \lambda_z^2}{6} \Delta_x^2 \Delta_v^2 v_{xv} \\ &= \frac{\rho \lambda_2 \lambda_3}{36} \Delta_x^2 \Delta_v^2 v_{xv}'' + \rho_f A_f v_{xv}'' \end{aligned} \quad (4)$$

ここで λ 、 μ は Lamé の定数、 $f' = \frac{\partial f}{\partial t}$ ρ = 母材の密度 ρ_f 、 A_f は繊維の密度と断面積

$$\Delta_x^2 f x = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

$$\Delta_x f x = f(x+1) - f(x-1), \quad \Delta_x^2 f x = \Delta_x^2 f x + 6f x$$

(2) 動的応答解析

式(3)、(4)は、規則的な離散化座標への適用に有利な有限フーリエ定和分変換⁸⁾を x 軸方向に行い、補強材を考慮した各変位成分に関するマトリックス表示の式が得られる。全ての離散繊維の質量と要素の剛性と質量の影響を重ね合わせると次のよう複合長方形ばりの運動方程式が得られる。

$$[K] \{\delta st\} + [M] \{\delta st\}'' = \{Fst\} \quad (5)$$

ここで $[K]$ = 剛性マトリックス

$[M]$ = 質量マトリックス

$\{\delta st\}$ = 変位ベクトル

$\{Fst\}$ = 外力ベクトル

ここで変位ベクトルを次のように置く。

$$\{\delta st\} = \sum_{r=1}^n \{u_r\} \phi_r \quad (6)$$

また粘性マトリックス $[C]$ を加えて、式(5)を書き直すと次のようになる。

$$[M^*] \{\phi''\} + [C^*] \{\phi'\} + [K^*] \{\phi\} = [u]^T \{F_r\} \quad (7)$$

ただし $[M^*]$ 、 $[C^*]$ 、 $[K^*]$ はそれぞれ対角マトリクスであり $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ マトリクスを固有ベクトルの直交性を用いて対角化している。したがって式(7)は次のようになる。

$$M_r^* \phi_r'' + C_r^* \phi_r' + K_r^* \phi_r = C_r^2 \{u_r\}^T \{F_r\}, \quad r=1,2,\dots,M \quad (8)$$

ここで $M_r^* = 1$ となるように C_r^2 を決めると式(8)は次のようになる。

$$\phi_r'' + 2h_r \omega_r \phi_r' + \omega_r^2 \phi_r = P_r(t) \quad (9)$$

ここで $P_r(t) = \{u_r\}^T \{F_r\}$ 、 $h_r = r$ モードの粘性係数、 ω_r = 固有振動数

初期条件を $\phi_r = 0$ (変位)、 $\phi_r' = I' / m^*$ (速度) (m^* はセンサー質量、 I' は衝撃力) として単位衝撃力に関する変位の衝撃応答関数は

$$\zeta_r(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-h_r \omega_r t} \sin \omega_d t \quad (10)$$

速度の衝撃応答関数は

$$\zeta_r'(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-h_r \omega_r t} (-h_r \omega_r \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t) \quad (11)$$

$$\text{ここで } \omega_d = \omega_r \sqrt{1 - h_r^2} \quad (12)$$

式(11)を用いて Duhamel 積分を行うと次の各モード

次数に対する速度応答の式が得られる。

$$\phi_r'(t)=\int_0^t P_r(t)\xi_r'(t-\tau) d\tau \tag{13}$$

3. 数値計算

長方形ばりの分割数を x 軸方向 8 分割、y 軸方向 10 分割、 $h=40\text{cm}$ 、 $l=70\text{cm}$ として次の三つのモデルについて数値計算を行った。ただし、はりの母材の弾性定数 $E_c=300000\text{kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu_c=0.17$ 、密度 $\rho_c=2.3\text{gf/cm}^3$ とする。Type 1 はコンクリート長方形ばりである。Type 2 と Type 3 は図 2 に示すような 5 層の長方形ばりである。ここで、 $E_s=210000\text{kgf/cm}^2$ 、 $\rho_s=7.85\text{gf/cm}^3$ 、 $\nu_s=0.3$ 、 $h_1=4\text{cm}$ 、 $h_2=h_4=1\text{cm}$ 、 $h_3=2\text{cm}$ 、 $h_5=32\text{cm}$ とする。Type 2 は図 2 において $E_1=E_2=E_c$ と置いてコンクリート中に steel layer がある場合である。Type 3 は $E_1=2E_c/3$ 、 $E_2=E_c/3$ と弾性定数を減少させて steel layer 付近に劣化した層を仮定したモデルである。これら 3 種類のモデルについて数値計算を行った。

a. 固有振動数とモード

Type 1、Type 2、Type 3 のモデルの固有振動数 (kHz) を表 1 に示す。表中縦方向には深さ方向モード n を、横方向には長軸方向モード m を表している。固有値は、全体的に n が 16 以上になると Type 1 と Type 2、3 との固有振動数の差が大きくなる。これは Type 2、Type 3 の steel layer の固有振動数によるものと考えられる。また、Type 2 と Type 3 の比較よりコンクリート層の劣化は固有振動数を小さくしていることがわかる。図 3 はこのときの固有モードを、 $m=1, 3, 5$ 、 $n=1\sim 4$ について示した。(a) は u 方向モード、(b) は v 方向モードを表し、一点鎖線は Type 1、

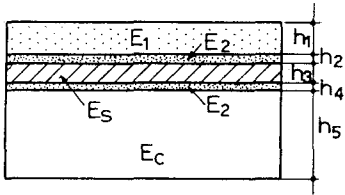


図 2 複合長方形ばりモデル

表 1 固有振動数の比較(kHz)

	Type 1			Type 2			Type 3		
	1	3	5	1	3	5	1	3	5
1	8.7	31.1	59.0	8.53	30.5	59.8	8.25	28.9	56.7
2	13.5	36.5	62.0	14.8	35.6	62.6	14.5	35.0	60.8
3	23.2	44.8	71.9	23.5	44.6	73.8	22.8	44.1	71.9
4	28.7	45.3	80.0	27.2	53.1	84.1	26.2	50.2	80.3
5	40.8	58.5	85.4	41.2	59.8	86.8	38.7	57.2	82.8
6	54.9	60.2	85.8	57.2	64.3	99.2	52.7	57.7	84.3
7	62.5	77.5	100.2	65.7	81.1	104.7	59.8	75.6	98.6
8	78.1	82.0	100.4	85.7	91.0	107.4	69.3	80.6	100.7
9	90.5	101.7	120.1	96.9	107.1	128.1	89.5	94.7	112.4
10	101.5	105.4	120.5	99.5	110.1	133.0	91.2	98.4	124.5
11	122.6	130.4	143.8	122.1	128.9	145.9	105.9	112.7	131.2
12	126.3	130.5	144.8	133.0	136.8	148.0	119.6	125.2	142.2
13	152.2	156.7	169.0	151.7	154.5	164.1	138.6	142.8	156.1
14	157.8	163.2	174.1	188.3	190.7	198.0	141.2	149.3	165.1
15	176.9	181.7	193.5	190.4	198.0	213.2	184.4	187.5	195.1
16	194.8	197.3	206.0	259.5	263.2	272.6	185.2	189.2	198.7
17	196.9	203.2	214.3	295.4	297.9	303.8	216.0	218.3	224.1
18	202.9	207.3	218.1	395.9	392.9	394.2	285.9	285.6	287.1
19	236.0	239.2	246.1	404.4	411.2	419.7	315.6	318.8	324.9
20	274.1	276.4	281.7	550.0	554.2	564.1	490.0	490.4	492.0
21	303.2	305.1	309.5	620.8	622.1	624.9	506.6	512.0	523.6
22	314.4	316.0	320.1	909.1	910.2	912.7	850.0	851.1	853.7

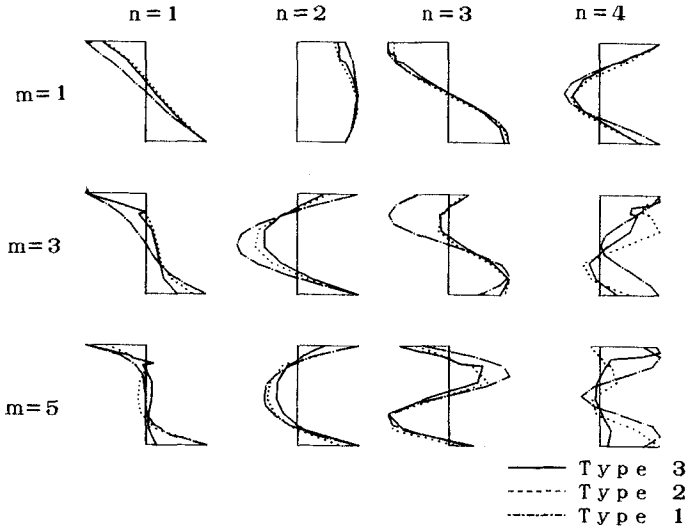


図 3(a) u 方向モードの比較

破線はType 2、実線はType 3を示す。この図よりType 2とType3のモードは $m=1$ ではほぼ一致しているが、 $m=3, m=5$ では、Type 3の上部でモードの卓越する傾向がみられる。

b. 減衰係数による応答の比較

減衰係数 h_r は固有振動数の関数として次式を仮定する。

$$h_r = b \omega_r / (a + \omega_r^2)$$

ここで a, b は実験より求める定数、 ω_r は r 次固有振動数とする。

¹⁰⁾ 数値計算モデルとしてType 1を用いて、減衰係数のModel h_1 として $a=13935, b=15.52$ 、Model h_2 として $a=13935, b=7.76$ の2種類について計算を行った。こ

こでModel h_1

の定数 a, b は実験より得られた応力波形のフーリエスペクトルからハーフパワー法を用いて決定した。入射波として継続時間 $50 \mu\text{sec}$ のパルス波を支間中央上部に入力した。図4はこの減衰係数を用いて数値計算した変位と速度の応答である。図4(a), (b)の縦軸は、 y 方向変

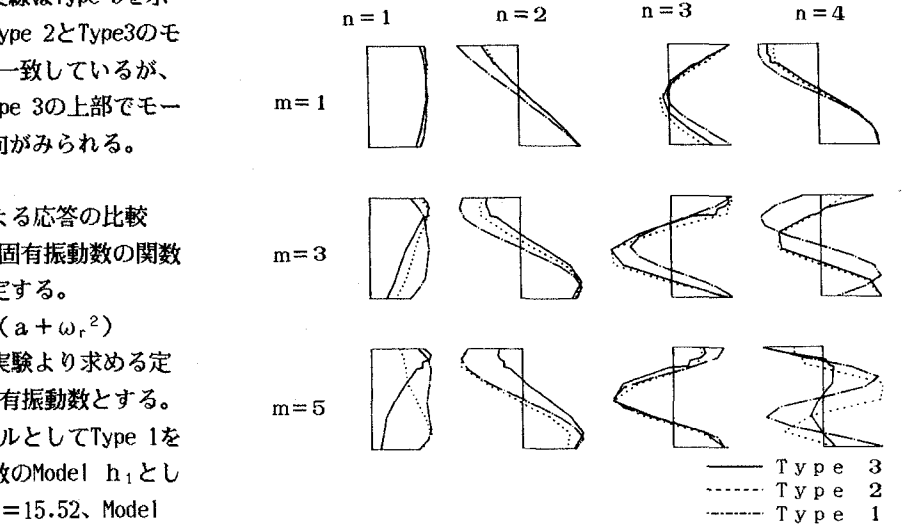


図3(b) v方向モードの比較

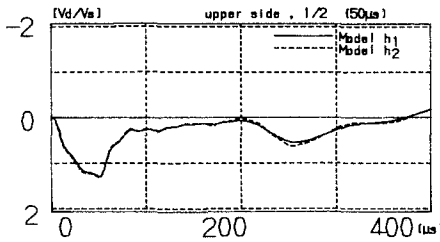


図4(a) 変位応答 (上部、 $l/2$)

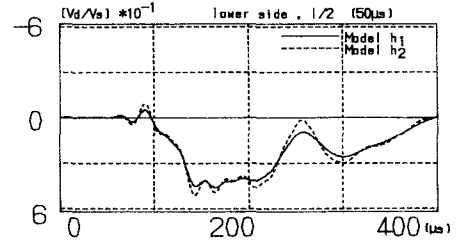


図4(b) 変位応答 (下部、 $l/2$)

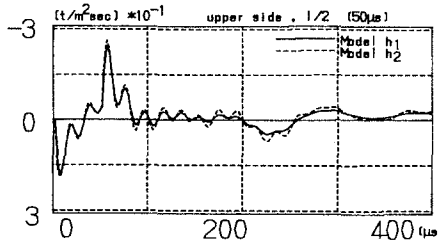


図4(c) 速度応答 $\rho \dot{v}$ (上部、 $l/2$)

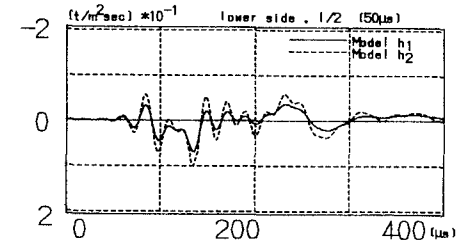


図4(d) 速度応答 $\rho \dot{v}$ (下部、 $l/2$)

位応答 v をはりの支間中央の静的変位 v_s で基準化したものである。図4(c)、(d)の縦軸は、 y 方向速度応答 $\dot{v}$ とはりの質量を乗じて運動量 $\rho \dot{v}$ として示している。横軸は時間を示している。図4(a)は、はりの支間中央上部の変位応答を比較したものである。入射波が継続している $50 \mu\text{s}$ までの変位応答は両者に差はみられないが時間経過と共にModel h_1 の方が減衰係数の影響を受けて応答が小さくなっていることがわかる。図4(b)は支間中央下部の変位応答で全体に減衰の影響がみられる。このことは図4(c)、(d)についても同様である。

c. 弾性係数の減少による応答特性の比較

図5はType 2とType 3の変位応答の比較と速度応答をはりの支間中央で比較したものである。

Type 3はsteel layer付近に弾性係数の減少した層を仮定し、健全な状態にあるType 2との応答特性の比較を行った。図5(a)、(b)の縦軸は図4の変位応答と同様の操作により

規準化している。また図5(c)、(d)も図4の速度応答と同様に運動量 $\rho \dot{v}$ としてあらわしている。横軸は時間である。図5(a)は支間中央上部での変位応答である、最大変位応答は Type 2に対して1.5倍程度大きくなっている。図5(b)は支間中央下部の最大変位応答はType 2と同じ程度になっている。図5(c)は支間中央上部での速度応答は、図4(c)と比べて速度応答の周波数が高くなっている。これは、

steel layerの影響のためと考えられる。さらに、図5(d)の支間中央下部の速度応答の変化は、図4(d)のType 1の速度応答と比べて小さくなっていることがわかる。

d. 変位応答のシミュレーション

変位応答のシミュレーションは長方形ばりの分割数をx軸方向16分割、y軸方向16分割としてコンクリート長方形ばり (Type 1) について、入射波継続時間50 μsec のパルス波を支間中央上部に入射したとき時間間隔10 μsec で、各節点の変位応答値 u 、 v を視覚化できる程度に拡大してから各節点の移動距離として節点座標を変更して各節点を線で結んで表示したのが図6である。対称性を考慮して長方形ばりの支間中央より半分について示している。図6はType 1のコンクリート長方形ばりのシミュレーションである。時間ステップ毎に変形が伝わっている様子がわかる。

4. あとがき

長方形ばりを伝播する応力波の動的特性として次のような結論になる。

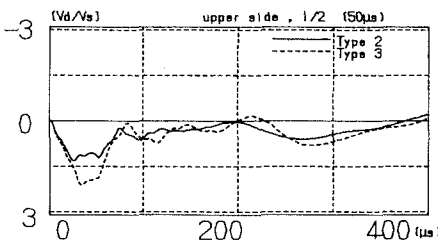


図5(a) 変位応答 (上部、 $l/2$)

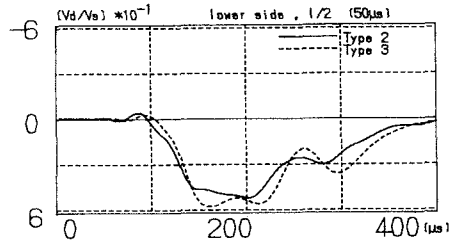


図5(b) 変位応答 (下部、 $l/2$)

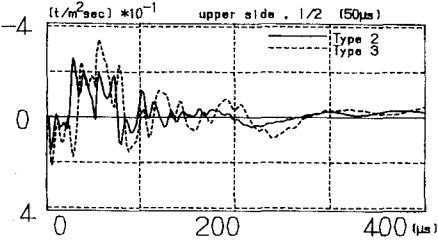


図5(c) 速度応答 $\rho \dot{v}$ (上部、 $l/2$)

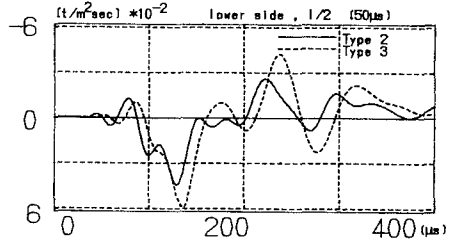


図5(d) 速度応答 $\rho \dot{v}$ (下部、 $l/2$)

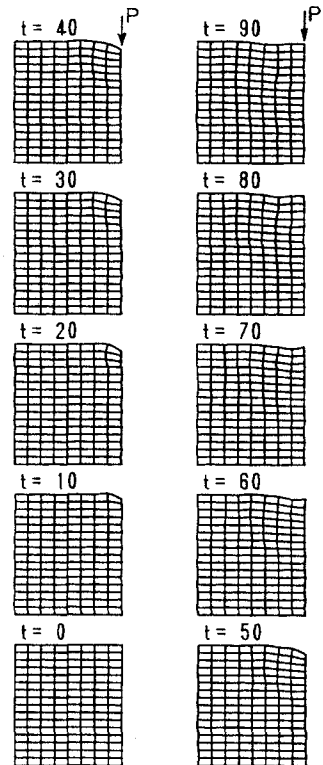


図6 変位応答シミュレーション

(1) 固有振動数の x 方向パラメータ n が高次になると Steel layerの固有振動数の影響が大きくなる。また固有モードの比較よりType 3の $m=3,5$ の場合、はり上部でモードの卓越することが明かとなった。

(2) 周波数依存型の減衰係数の異なる2種類のモデルに対する応答計算の結果、減衰係数の周波数特性のちがいによる影響が明らかとなった。

(3) 構造部材の劣化に伴う弾性定数の減少を仮定したモデルの応答計算の結果、はり上部で大きく現れる。Steel layerの影響により、はり上部の速度応答の周波数が大きくなることが明かとなった。

(4) 変位応答のシミュレーションでは、コンクリートばり中を変位がどの様に伝わっているかを視覚的に明らかにした。

本研究は昭和64年度科学研究費(試験研究(1)、代表者能町純雄)の補助を受けて実施した。

参考文献

- 1) N.J.Carino , M.Sansalone , N.H.Hsu : A Point Source-Point Receiver, Pulse-Echo Technique for Flaw Detection in Concrete, ACI Journal, Technical Paper, March-April,1986.
- 2) 大津：コンクリート構造物の健全度診断へのアコースティック・エミッションの適用、コンクリート工学、Vol.25, No.12、1987.
- 3) 明石：コンクリートの非破壊試験に関する研究、土木学会論文集、第390号/V-8、1988.
- 4) A.Alippi , W.G.Mayer : Ultrasonic Methods in Evaluation of Inhomogeneous Materials, Martinus Nijhoff Publishers,1987.
- 5) J.Miklowitz : The Theory of Elastic Waves and Waveguides, North-Holland Publishing Company, 1978.
- 6) T.Niwa , S.Hirose , S.Nakatani : Model Studies on Scattering of Elastic Waves in a Half Space, 土木学会論文集、Vol.3, No.1、1986.
- 7) J.D.Achenbach , G.Herrmann : Dispersion of Free Harmonic Waves in Fiber-Reinforced Composites, AIAA Journal, Vol.6, No.10, 1968.
- 8) 大島、能町：有限プリズム法による繊維強化複合部材の縦波動伝播速度の研究、土木学会論文集、No.297、1980.
- 9) T.Oshima, S.G.Nomachi, T.Kida, S.Mikami : Stress Wave Propagation in a Rectangular Composite Beam, Proc. of 4th Japan-U.S. Conference on Composite Materials, Washington,D.C., June,1988.
- 10) H.Kolsky : Stress Wave in Solids, Dover Publication, 1963.
- 11) 三上、大島、能町：複合材料長方形ばりの応力波動解析とその健全度評価への応用、構造工学論文集、Vol. 35A, 1989.