

I-34 境界層を考慮した二層同心円柱の 波動伝播特性

室蘭工業大学	正員	松岡 健一
室蘭工業大学	正員	岸 徳光
室蘭工業大学	学生員	竹内 徹
日本大学	正員	能町 純雄

1. まえがき

鉄筋コンクリートや鋼管構造物の基本的モデルと考えられる多層同心円柱の波動伝播特性を明らかにすることは、この種の積層複合材の動的特性を知る上で重要なことであり、著者等は、これまでに三次元的に解析してきた。^{1) - 3)} その結果、異種の材料間の接触状態によって波動伝播特性がかなり異なることが明らかであり、この接触面の影響を検討するため、接触面のせん断応力をバネを介して接触面の変位差で評価する方法での解析も行なった。⁴⁾ ここでは、この接触面に別な境界層を設け、三層体としての解析を行ない、境界層の状態が位相速度に及ぼす影響を検討した。

解析は、円柱および円筒の波動伝播の基礎変位式を境界の条件を満足するように組合せて行なうもので、縦波の位相速度分散曲線を弾性定数比を変化させて求め検討を行なった。

2. 基礎変位式

Hankel変換を用いた円柱座標に関する波動伝播問題の変位解は、すでに求めているので、^{1), 2)} ここではその求め方の概要を述べ、結果のみを示すこととする。

図-1のように、円柱軸をz軸とする (r, θ, z) 座標系を考え、波動はz軸方向に進行する定常波動伝播を仮定し、波動の角速度を ω 、伝播速度をVとし、周方向の波動次数をmとすれば、円柱座標で表わされる波動方程式を半径方向にHankel変換することにより、円筒の各変位成分 (u, v, w) は次のように求められる。

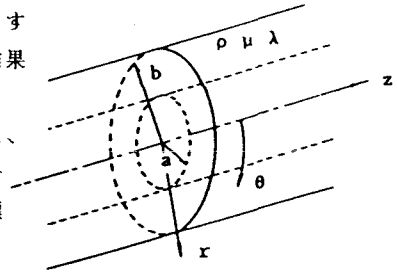


図-1 円柱座標

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos m\theta & \cos m\theta & 0 \\ \sin m\theta & -\sin m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_{mr} \\ \tilde{B}_{mr} \\ \tilde{W}_{mr} \end{Bmatrix} \exp[i\omega(t - z/V)] \quad (1)$$

$$\{\tilde{A}_{mr} \quad \tilde{B}_{mr} \quad \tilde{W}_{mr}\}^T = \sum_{k=1}^2 K_{mk} \{F_{Amk} \quad F_{Bmk} \quad F_{Cmk} \quad E_{mk}\}^T \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F_{Amk} &= \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iNE_{mk}/2 \\ F_{Bmk} &= \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iNE_{mk}/2 \\ F_{Cmk} &= \beta_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \end{aligned} \quad (3)$$

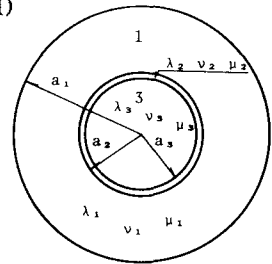


図-2 三層同心円柱

$$K_{mk} = \begin{vmatrix} \chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)/N_\mu & 0 \\ 0 & -\chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r)/N_\mu \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (\mu N^2/\rho\omega^2)\{\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)/N_\mu - N_\alpha \chi_{mp}^{(k)}(N_\alpha r)/N^2\} & 0 \\ (\mu N^2/\rho\omega^2)\{\chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r)/N_\mu - N_\alpha \chi_{ms}^{(k)}(N_\alpha r)/N^2\} & 0 \\ -i(2\mu N/\rho\omega^2)\{G_m^{(k)}(N_\alpha r) - G_m^{(k)}(N_\mu r)\} & G_m^{(k)}(N_\alpha r) \end{vmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $N = \omega/V$, $N_\mu^2 = N^2 - \rho\omega^2/\mu$, $N_\alpha^2 = N^2 - \rho\omega^2/(2\mu + \lambda)$ 、 ρ : 円筒の密度; μ, λ : Laméの弾性定数であり、 m は波動の円周方向のモードを示すもので、 $m=0$ のとき縦波動、 $m=1$ のとき曲げ波動を表わす。また式中の関数 G, χ は、円筒の外半径を a_1 、内半径を $a_0 = a_2$ とすると次のように表わされる。

$$G_m^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m,n}^{(k)}(Nr)}{R_{m,n}^{(k)}(Na_k)} \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,n}^{(k)}(Nr)}{R_{m,n}^{(k)}(Na_k)} \quad \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m-1,n}^{(k)}(Nr)}{R_{m,n}^{(k)}(Na_k)} \quad (5)$$

$$R_{j,n}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr)K_n(Na_{k-1}) - (-1)^{j+n} I_n(Na_{k-1})K_j(Nr)$$

ただし、 I, K は変形第1種および第2種のBessel関数である。また式中の係数 α, β, A, B, E は円筒の内外面の変位および応力で与えられるもので次のように示される。

$$\begin{aligned} \alpha m_k &= \bar{r}r\theta m, r=a_k, \quad \beta m_k = \bar{\sigma}rm, r=a_k \\ A m_k &= \bar{\lambda}mr, r=a_k/a_k, \quad B m_k = \bar{B}mr, r=a_k/a_k, \quad E m_k = \bar{W}mr, r=a_k \\ r r \theta &= \bar{r}r\theta m \sin m\theta \exp[i\omega(t-z/V)], \quad \sigma r = \bar{\sigma}rm \cos m\theta \exp[i\omega(t-z/V)] \end{aligned} \quad (6)$$

以上が円筒に対する変位式であるが、円柱の場合は $a_2 = 0$ として $k=1$ の項のみを考慮することと与えられる。この場合、関数 R は次のようになる。

$$R_{j,n}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) \quad (7)$$

3. 境界条件

境界層を考慮した二層同心円柱を伝わる弾性波の速度は、2.で求めた変位式を円筒、境界層ならびに円柱の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。いま円筒を表わすすべての量を添字1、境界層を表わすすべての量を添字2、円柱を表わすすべての量を添字3で示すと、2.で求めた解に対して、まず次の適合条件を満足しなければならない。

$$\text{円筒に対して} \quad \tilde{A} m r_{.1} = a_k A m k_{.1}, \quad \tilde{B} m r_{.1} = a_k B m k_{.1} \quad (r=a_k, k=1,2) \quad (8)$$

$$\text{境界層に対して} \quad \tilde{A} m r_{.2} = a_k A m k_{1.2}, \quad \tilde{B} m r_{.2} = a_k B m k_{1.2} \quad (r=a_k, k=2,3) \quad (9)$$

$$\text{円柱に対して} \quad \tilde{A} m r_{.3} = a_3 A m 1_{.3}, \quad \tilde{B} m r_{.3} = a_3 B m 1_{.3} \quad (r=a_3) \quad (10)$$

さらに、円筒と境界層のそれぞれ内外面における境界条件を考えると、

i) 円筒の外表面 ($r=a_1$) では、

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad \therefore \alpha_{m1.1} = 0 \quad (11)$$

$$\sigma_r = 0 \quad \therefore \beta_{m1.1} = 0 \quad (12)$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (13)$$

ii) 円筒の内面および円柱の外表面で、

円筒の内面は境界層に、また円柱の外表面は境界層にそれぞれ接触しているの、接触面の条件によって異なる境界条件となるが、ここでは接触面で変位が連続な場合を考えるものとする。

A) 円筒と境界層の接触面 ($r=a_2$) では、

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad \therefore A m 2_{.1} = A m 1_{.2}, \quad B m 2_{.1} = B m 1_{.2} \quad (14)$$

$$W_1 = W_2 \quad \therefore E_{m2.1} = E_{m1.2} \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta.1} = \tau_{r\theta.2} \quad \therefore \alpha_{m2.1} = \alpha_{m1.2}, \quad \sigma_{r.1} = \sigma_{r.2} \quad \therefore \beta_{m2.1} = \beta_{m1.2} \quad (16)$$

$$\tau_{rz.1} = \tau_{rz.2} \quad (17)$$

B) 円柱と境界層の接触面 ($r=a_3$) では、

$$u_2 = u_3, \quad v_2 = v_3 \quad \therefore A_{m2.2} = A_{m1.3}, \quad B_{m2.2} = B_{m1.3} \quad (18)$$

$$W_2 = W_3 \quad \therefore E_{m2.2} = E_{m1.3} \quad (19)$$

$$\tau_{r\theta.2} = \tau_{r\theta.3} \quad \therefore \alpha_{m2.2} = \alpha_{m1.3}, \quad \sigma_{r.2} = \sigma_{r.3} \quad \therefore \beta_{m2.2} = \beta_{m1.3} \quad (20)$$

$$\tau_{rz.2} = \tau_{rz.3} \quad (21)$$

従って、境界層を考慮した二層同心円柱を伝わる弾性波動の位相速度は式(8), (9), (10), (13), (17), (21)で与えられる固有値方程式の根として求めることができる。

4. 数値解析および考察

数値解析は、縦波動 ($m=0$) に対して行ない、円筒、境界層、円柱の弾性係数、ポアソン比をそれぞれ E_1, ν_1 、 E_2, ν_2 、 E_3, ν_3 として次の2つの場合について行った。

i) $E_1 < E_3$ の場合 (Case I)

このとき、円柱の方が円筒より大きな弾性係数をもつ場合であるがこのとき用いた数値は、
 $\nu_1 = 1/6$, $\nu_2 = 1.4/6$, $\nu_3 = 0.3$, $E_3/E_1 = 7.0$, $\rho_3/\rho_1 = 3.2$, $\rho_2/\rho_1 = 2.1$,
 $a_2/a_1 = 0.26$, $a_3/a_1 = 0.24$

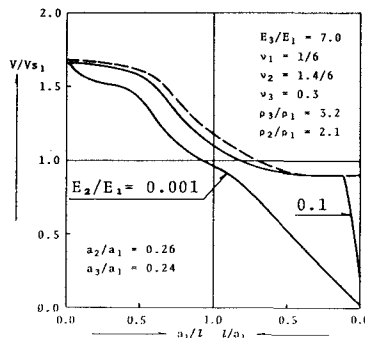
ii) $E_3 < E_1$ の場合 (Case II)

このとき、円筒の方が円柱より大きな弾性係数をもつ場合であるがこのとき用いた数値は、
 $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 1.4/6$, $\nu_3 = 1/6$, $E_1/E_3 = 7.0$, $\rho_1/\rho_3 = 3.2$, $\rho_2/\rho_3 = 2.1$,
 $a_2/a_1 = 0.91$, $a_3/a_1 = 0.89$

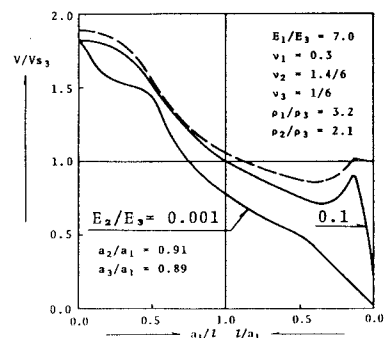
である。位相速度は、3. で示した固有値方程式の固有値として与えられるが、この場合固有値は方程式の中に陰な型で含まれるため、反復法により求める必要があり、5桁以上の精度を有するように求めた。

計算結果の一部を図に示すが、位相速度は、図で、縦軸に位相速度とコンクリートのせん断波速度の比を横軸には波動の半波長をしとして、左半分に a_1/l を、右半分に l/a_1 をとり、全体として波長零から無限大までを示すようにしている。 図一3～6に縦波動の位相速度分散曲線を示した。

図一3は Case I の一次の分散曲線を示した。いずれの E_2/E_1 に対しても波長無限大では V/V_{s1} の値は二層円柱を体積に応じた換算材料定数をもつ円柱としたときの bar velocity 1.66 とほぼ一致している。また、波長零では境界層 (弾性係数の小さい部分) のせん断波の速度 ($E_2/E_1 = 0.1$ では 0.21, $E_2/E_1 = 0.001$ では 0.02) に一致している。図一4には Case II



図一3 一次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case I)



図一4 一次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case II)

について一次の分散曲線を示した。境界層の弾性係数を変え分散曲線をそれぞれ比較すると Case I と同様に

いずれの E_2/E_3 に対しても波長無限大においては V/V_{S3} の値は換算断面の bar velocity 1.81 とほぼ一致して、波長零でも境界層（弾性係数の小さい部分）のせん断波の速度に一致している。図中の破線は境界層が存在しない場合の二層同心円柱の分散曲線であるが、波長無限小では Case I の場合は円筒部の Rayleigh 波の速度に、Case II の場合は円柱部のせん断波の速度に一致している。図-5、

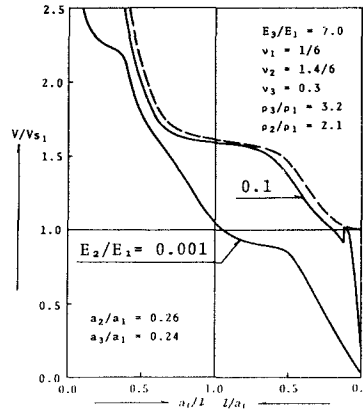


図-5 二次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case I)

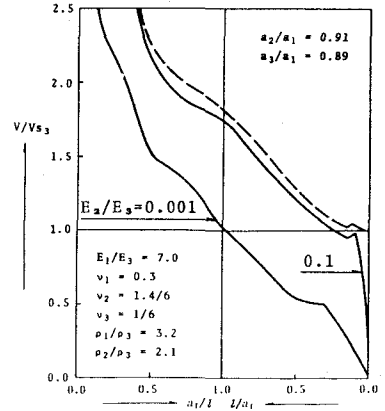


図-6 二次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case II)

6 は、Case I および Case II の二次の位相速度分散曲線を同じように示したものである。いずれの場合も波長無限大では無限大、波長零では境界層のせん断波の速度に一致している。

5. まとめ

境界層を考慮した二層同心円柱の波動伝播問題を縦波動について解析し、位相速度を若干の数値に対して求め、接触面の状態が及ぼす影響について検討を加えた。用いた数値は、鉄筋コンクリートや鋼管コンクリートを想定しているが、この結果、次のことが明らかとなった。

- 1) 一次の縦波動の位相速度は波長が無限大に近づくに従い換算断面の bar velocity に近づくが、境界層の状態により、すなわち E_2 の小さなものほど波長の長いところで bar velocity に近い速度となっている。
- 2) 二次の縦波動の位相速度は波長が無限大に近づくに従い無限大となるが、境界層の状態により、すなわち E_2 の小さなものほど無限大に近づく波長が長くなっている。
- 3) 一次および二次の縦波動の位相速度は Case I, Case II ともに、波長無限小では弾性係数の小さい材料のせん断波の速度となる。
- 4) 境界層が存在する二層同心円柱では、境界層の弾性係数が小さいものほど遅い位相速度となっている。

尚、本論の数値計算は、北海道大学大型計算機センターおよび室蘭工業大学情報処理教育センターの計算機を用いて行なったものであることを付記する。

参考文献

- 1) 松岡健一・能町純雄：弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ波動の伝播速度について、土木学会論文報告集、第 258号、1977。
- 2) 能町純雄・松岡健一・坂下正幸：弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について、土木学会論文報告集、第 293号、1980。
- 3) Nomachi, S. G., K. G. Matsuoka, N. Kishi and T. Ohshima: Elastic Waves of Cylinder in an Elastic Medium, Proc. 4th A.S.C.E. EMD Speciality Conference, 1983
- 4) 松岡健一・能町純雄・岸徳光：二層同心円柱の波動伝播問題における接触面の影響、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、1988。