I －32　液体に接する円筒殻の固有周期略算式

北海道大学　正 員　三 上　隆
北海道大学　正 員　芳 村　仁

1．まえがき

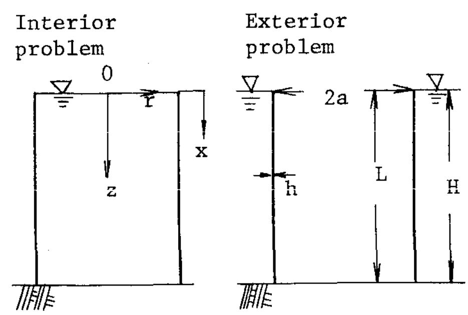
円筒殻と流体が成す連成系の動的挙動の解明は，石油タンク，原子力プラント，海洋構造物などさまざまな工学分野において重要な問題であり，その中でも固有振動数の決定は，構造物の耐震および防振設計をする上での第一ステップである。石油タンクのように内部に流体を含む内部問題および海洋構造物のように殻外部で液体に接する外部問題として記述される液体に接する円筒殻の固有振動数は，通常，離散モデルの固有値解析によって算定されるが，概略の耐震性などを検討するような段階では，比較的簡単でしかもある程度の精度で固有振動数を推定できれば実用上十分である。

このような観点から，地震時（円周方向波数n＝1）に対する基本固有振動数を推定する略算式[1,2,3]が提案されているが，いずれも内部問題に対するものであり，また殻諸元パラメータも使用上十分な範囲にわたって用意されていないようである。

そこで，本研究では，内部または外部問題として表される液体に接する片持形式の円筒殻を対象として，広範囲の殻諸元に対して適用でき，しかも実用上十分な精度で基本固有周期を算定できる略算式を提案する。なお略算式は，液体－円筒殻系を殻の剛性と殻の質量から成る系，殻の剛性と液体の質量から成る系の複合系ととらえ，各系の基本固有周期を合成して求めるDunkerleyの方法[4]により求めた。

2．解析モデルと基礎方程式

図－1に示すように，液体高さHと殻の高さLが等しく，一様な厚さhの一端固定，他端自由の円筒殻を考える。E，ν，ρ_s，aを殻の弾性係数，ポアソン比，密度，半径とし，ρ_lを液体の密度とする。流体領域の座標系は，静止水面と殻の回転軸の交点を原点，鉛直下方にz軸をとる。液体運動は非圧縮，非粘性で渦無し流れと仮定し，殻の運動は変形が小さく，せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に従うものとする。さらに，流体と殻の連成系は，円周方向波数nおよび円振動数ωの調和振動をするものとする。



図－1　解析モデル

1）流体の基礎方程式　　殻の内部，外部流体の運動は速度ポテンシャルΦで表されるラプラス方程式（$\nabla^2\Phi=0$）で支配され，動圧力pは線形化ベルヌーイ式（$p=-\rho_l\Phi_{,t}$；以下コンマに続く下添字は偏微分を表す）により計算できる。さらに液面条件式（$p|_{z=0}=0$），液底条件式（$\Phi_{,z}|_{z=H}=0$），接触条件式（$\Phi_{,r}|_{r=a}=W_{,t}$；W＝殻の半径方向変位）および外部問題に対しては遠方条件式（$\Phi|_{r\to\infty}\to 0$）が与えられる。

2）液体に接する回転殻の基礎方程式[5]　　殻と流体の接触条件を考慮することにより，流体との連成の影響を表す圧力による項が殻の運動方程式中に取り入れられ，次のように表される。

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2([F]\{X\}+\{P\}) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここに$(\ )'=d(\ )/d\xi$，ξ（＝[0, 1]）は殻の経線方向の無次元化座標系，$\{X\}^T=(u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_\theta)$は変位ベクトル，[C]～[F]は殻の諸元のみで表される行列，Ω^2は次式で表される液体－円筒殻系の固有振動数パラメータである。

$$\Omega^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega^2/E \qquad \cdots\cdots(2)$$

さらに$\{P\}^T=(0,\ 0,\ p_w,\ 0,\ 0)$は流体と円筒殻の相互作用により発生する外圧力ベクトルで，その非零成分p_mは次のようなものである。

$$p_m=(\rho_l/\rho_s)\cdot(a/h)\cdot q \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで，qは未知関数である半径方向変位wの積分という形で与えられるもので，その詳細は文献5)に譲る。なお，式(1)より明らかなように，液体の影響は付加質量として表されている。

3．固有周期略算式の誘導

液体－円筒殻系を既に述べたように独立な二つの系に分けて考えれば，各系の基礎方程式は式(1)より次のように表される。

殻の剛性と殻の質量よりなる系（空の円筒殻）；

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega_s^2[F]\{X\} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$\Omega_s^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega_s^2/E \qquad \cdots\cdots(5)$$

殻の剛性と液体の質量よりなる系；

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega_l^2\{p^*\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

$$\Omega_l^2=\rho_l(1-\nu^2)a^3\omega_l^2/(Eh) \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$\{p^*\}=(0,\ 0,\ q,\ 0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(8)$$

ここでΩ_sとΩ_lは各系の無次元化固有振動数パラメータ，ω_sとω_lは各系の固有振動数である。なお，式(4)および式(6)はそれぞれ，微分方程式および微積分方程式である。

式(4)，(6)の解が求まれば，液体－円筒殻系の固有振動数Ω（ω）はDunkerleyの方法4)により，次のように得られる。

$$1/\omega^2=1/\omega_s^2+1/\omega_l^2 \qquad \cdots\cdots(9)$$

したがって，液体－円筒殻系の固有周期$T(=2\pi/\omega)$は，各系の固有周期$T_s(=2\pi/\omega_s)$，$T_l(=2\pi/\omega_l)$より次式で求められる。

$$T=\sqrt{T_s^2+T_l^2} \qquad \cdots\cdots(10)$$

なお，式(4)，(6)の解法には選点法を用いたが，その詳細は文献5)を参照されたい。

ここで波数n=1，ポアソン比$\nu=0.3$，および$0.0005\leqq h/a\leqq 0.01$，$1\leqq L/a\leqq 8$の適用範囲に対する基本固有周期略算式を示せば次のようになる。

$$T=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\ \sqrt{F^2+(\rho_l/\rho_s)(h/a)G^2} \qquad \cdots\cdots(11)$$

ここで，Fは殻の剛性と殻の質量から成る系（空の円筒殻）から得られるL/aの関数式で次のようなものである。

$$F=0.6301+0.8174(L/a)+0.2868(L/a)^2+0.5738\times10^{-2}(L/a)^3 \qquad \cdots\cdots(12)$$

同様に，Gは殻の剛性と液体の質量から成る系の関数式で，内部・外部問題に対して次のように与えられる。

内部問題；

$$G=0.3413+0.5131(L/a)+0.1197(L/a)^2+0.1602\times10^{-1}(L/a)^3-0.6161\times10^{-3}(L/a)^4 \qquad \cdots\cdots(13.a)$$

外部問題；

$$G=0.2432+0.4747(L/a)+0.9966\times10^{-1}(L/a)^2+0.1544\times10^{-1}(L/a)^3-0.5266\times10^{-3}(L/a)^4 \qquad \cdots\cdots(13.b)$$

なお，略算式(11)は，G=0とすれば，空の円筒殻の略算式となる。

上述の略算式(11)は次のように求めた。すなわちT_sおよびT_lを$T_s=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\cdot F$，$T_l=2\pi\sqrt{\rho_l ah/E}\cdot G$の形で表すことを考える。ただし，FとGはh/aとL/aの関数である。しかし，後述する数

値例より明らかなように，$0.0005 \leqq h/a \leqq 0.01$の適用範囲のもとでは，FとGはh／aにそれほど依存しないので，L／aのみの関数とみなせる。次にFとGをL／aの多項式近似で表すことにし，各多項式の係数を曲線あてはめの方法により決定する。

4．数値計算例

1）内部問題の場合　　まず比較のために用いた既往の代表的な略算式を示す。

坂井らの式[1]；　$T=\sqrt{\rho_l D^2 L/(Eh)}/\lambda$ ……………………(14)

ここで$\lambda=0.067(L/D)^2-0.03(L/D)+0.46$，　$D=2a$

式(14)は，殻の質量を無視したもので，適用範囲は$0.3 \leqq L/a \leqq 4$である。

清水らの式[2]；　$T=L\sqrt{\rho_l D/(Eh)}\cdot f(D/L)$ ……………………(15)

ここで$f(D/L)=(2.909+\sqrt{5.625(D/L)^2-6.75(D/L)+3.43})/\sqrt{D/L}$，$D=2a$

式(15)の適用範囲は，$0.0005 \leqq h/a \leqq 0.002$，$0.4 \leqq L/a \leqq 4$である。

以下に２つのケーススタディを示す。

Case(1)；　Haroun[6]らによるF.E.M.の結果と比較する。解析諸元は次のようなものである。

Shell(A)［長形シェル］；　$L=H$，$L/a=3$，$h/a=1.489\times10^{-3}$，$a=7.32$m

Shell(B)［短形シェル］；　$L=H$，$L/a=0.67$，$h/a=1.388\times10^{-3}$，$a=18.3$m

ただし，$E=2.1\times10^6$kg／cm²，$\rho_s=8.00\times10^{-6}$kg・sec²／cm⁴，$\rho_l=1.02\times10^{-6}$kg・sec²／cm⁴

表－1に，F.E.M.[6]，C.M.（選点法）[5]および略算式(11)，(14)，(15)による基本固有周期(sec)を示す。表には，本略算式の適用範囲外［shell(B)］のケースも含んでいるが，本略算式の結果は既往の結果によく一致している。

Case(2)；　密度比ρ_l/ρ_sを変化させたときの結果を表－２に示す。表は選点法[5]による値（便宜上，厳密解と呼ぶ）と本略算式(11)，清水らの式(15)の結果を示しているが，本略算式の結果は厳密解に対して最大3%の相対誤差を含む程度であり，設計に十分利用できるものと思われる。

2）外部問題の場合　　$\rho_l/\rho_s=0.1275$のときの結果を表－３に示す。外部問題に対しては，他の略算式が存在しないので，表は選点法[5]による値（厳密解と便宜上呼ぶ）と本略算式の値を示す。明らかに両者はよい一致を示している。

表－１　　内部問題の周期T(sec)［Harounモデル］

モデル	F.E.M.	C.M.	本略算式(11)	坂井らの略算式(14)	清水らの略算式(15)
Shell(A)	0.2810	0.2821	0.2824	0.2849	0.2820
Shell(B)	0.1617	0.1619	0.1621	0.1521	0.1626

表－２　　内部問題の$T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$

L／a	解法	h／a=0.0005		h／a=0.001	
		$\rho_l/\rho_s=0.1275$	$\rho_l/\rho_s=0.0825$	$\rho_l/\rho_s=0.1275$	$\rho_l/\rho_s=0.0825$
1	厳密解	16.3006	13.1424	11.5482	9.3340
	本略算式	15.9000	12.8290	11.3078	9.1545
	清水らの式	15.5562	12.5134	10.9999	8.8483
3	厳密解	53.6994	43.3202	38.1845	30.8966
	本略算式	53.6605	43.3026	38.1661	30.8948
	清水らの式	54.7684	44.0557	38.7271	31.1521
5	厳密解	120.6957	97.3529	85.8024	69.4056
	本略算式	120.6926	97.3735	85.8067	69.4279

3) h／aの関数F，Gに与える影響

図－2は，数種のh／aに対するFとL／aの関係を示したものである。明らかに0.0005≦h／a≦0.01の範囲では，Fはh／aにそれほど依存しないことが理解できる（Gに与えるh／aの影響は同様であるので省略する）。

5．まとめ

液体に接する円筒殻の固有周期略算式(11)を提案した。略算式は，液位比H／L＝1，0.0005≦h／a≦0.01，1≦L／a≦8とするbeam typeの振動様式の内部・外部問題に適用でき（空の円筒殻にも適用できる），その精度は実用上十分なものである。

表－3　外部問題の$T／2\pi\sqrt{\rho_s a^2／E}$

L／a	解　法	h／a＝0.005	h／a＝0.01
1	厳密解 本略算式	4.5481 4.5497	3.3857 3.4444
4	厳密解 本略算式	24.7695 24.8121	18.5681 18.6288
7	厳密解 本略算式	66.8631 66.8792	49.8381 49.8668

＜参考文献＞

1) 土木学会編；　土木技術者のための振動便覧，p.417，1985．

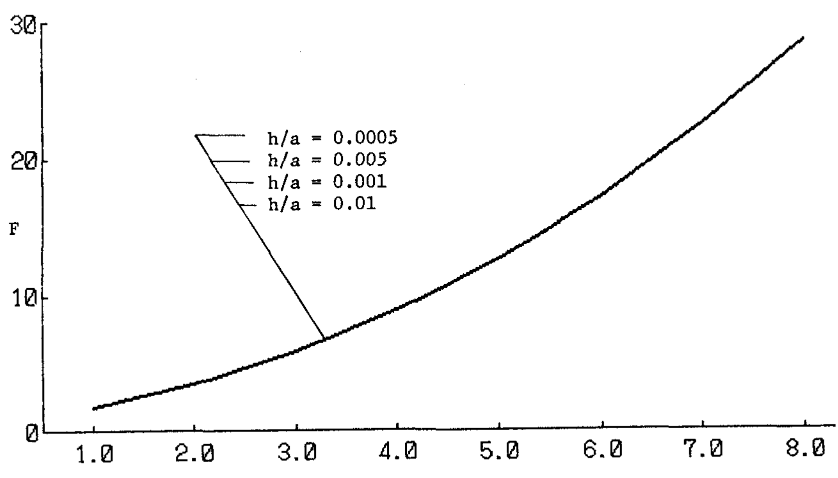
2) 清水信行他；　円筒タンクの耐震設計法に関する研究（第２報），日本機械学会論文集（Ｃ編），48巻427号，pp.328-348，1982．

3) 飯島延恵・萩原敏雄；　円筒シェル水槽の耐震計算について，土木学会誌，44巻，10号，1959．

4) Thomson, W.T.;　Mechanical Vibrations, pp.162-167, GEORGE ALLEN & UNWIN LTD, London, 1960.
酒井忠明；　構造力学，p.389，技報堂，1970．

5) 三上　隆・芳村　仁；　液体に接する円筒殻の自由振動，構造工学論文集，Vol.34A，pp.785-796，1988．

6) Haroun, M.A. and Housner, G.W.; Complications in free vibration analysis of tanks, Proc. ASCE, Vol.108, No.EM2, pp.801-818, 1982.



図－２　種々のh／aに対するFとL／aの関係