

I-31 回転殻と内部または外部流体の連成固有振動解析

北海道大学 正員 芳村 仁
北海道大学 正員 三上 隆
北海道開発局 正員 新目 竜一

1. まえがき

液体とシェルの連成振動問題は、液体容器の振動などを考察する内部問題と液体が無限領域に存在する海洋構造物などの振動を考察する外部問題がある。特に海洋構造物では、液体に対する形態の整合性およびすぐれた力学特性を有する回転殻が注目を浴びている。

従来、この種の問題（特に円筒殻と流体の連成問題）の実用計算法としては、有限要素法および境界要素法などがあるが、前者は液体が無限に広がる外部問題に対しては無限要素の使用などの何らかの技巧が要求され、後者はその適用可能性が殻の支配方程式の基本解の存在に大きく左右されるなど問題点を有している。

本論文は、液体に接する任意回転殻の内部・外部自由振動問題のうちバルジング振動を取り上げ、流体領域を速度ポテンシャルに関する境界値問題として解析的に処理し、問題を支配する微積分方程式を導き、微分項に対してはLegendre多項式の零点を選点とする選点法、および積分項に対しては分点が選点を共有する補間型積分則を用いて、解析する手法について述べたものである。

2. 解析モデルと基礎方程式

図-1に示すように、液体に接する上端自由-下端固定の等方等質で一樣な厚さの回転殻を考える。 a は固定端における半径（以下、代表長とする）、 H は液体の深さ、 L は殻の高さ、 ρ_f は液体の密度、 ρ_s , h , E , ν はそれぞれ回転殻の密度、板厚、弾性係数、ポアソン比とする。

(1) 液体の基礎方程式と境界条件

流体領域に対する座標系を座標系 (r, θ, z) で表し、静止水面と回転殻の回転軸の交点を原点、鉛直下方に z 軸をとる。

液体運動は、非圧縮性、非粘性で渦無し流れとすれば、流体系の基礎方程式および境界条件は次のように表される。

$$\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}/r + \Phi_{,\theta\theta}/r^2 + \Phi_{,zz} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\Phi_{,z}|_{z=H} = 0 \quad \dots\dots(2) \quad P|_{z=0} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

$$\Phi_{,r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \dots\dots(4) \quad \Phi_{,n} = W_{,t} \text{ (殻表面上で)} \quad \dots\dots(5)$$

ここに、 Φ は流体速度を与える速度ポテンシャル、コンマに続く下添字は偏微分を表す。式(1)はラプラス方程式、式(2)は液底条件式、式(3)は重力の影響を無視した自由表面条件式、式(4)は外部問題に対する遠方条件式、式(5)は流体と殻側壁の速度の連続性に関する接触条件式（ n は殻表面に立てた外向き法線、 W は後述する殻の法線方向変位）である。式(3)中の P は圧力で、線形化ベルヌーイ式より次式で表される。

$$P = -\rho_f \Phi_{,t} \quad \dots\dots(6)$$

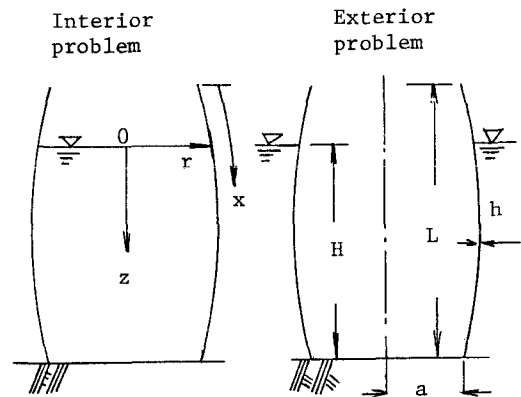


図-1 解析モデル

(2) 液体に接する円筒殻の基礎方程式と境界条件

殻の運動は変形が小さく、せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論¹⁾に従うものとする。殻の経線方向(x)、円周方向(θ)および法線方向に対応する変位成分をそれぞれ、 U 、 V および W 、(x 、 θ)軸に垂直な断面の回転角成分を(β_x 、 β_θ)で表す。

液体と殻の連成系は、円周方向波数 n および円振動数 ω の調和振動するものと仮定し、速度ポテンシャル Φ 、動液圧 P および変位成分(U 、 V 、 W 、 β_x 、 β_θ)を、 ϕ 、 p および(u 、 v 、 w 、 β_x 、 β_θ)を係数とする Fourier 級数展開する。たとえば、

$$\begin{aligned}\Phi &= i\omega \frac{\sigma a^3}{Eh} \sum_n \phi^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t}, & P &= \rho_f \omega^2 \frac{\sigma a^3}{Eh} \sum_n p^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t} \\ W &= \frac{\sigma a^2}{Eh} \sum_n w^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t}, & \beta_x &= \frac{\sigma a}{Eh} \sum_n \bar{\beta}_x^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t}\end{aligned}$$

.....(7.a~d)

ここで、 σ は参照応力、 i は虚数単位である。以下では Fourier 係数の添字(n)は省略する。

さて、液体に接する回転殻の運動方程式は、次の手順により求められる。

a) ラプラス方程式の解 式(2)、(3)、(4)を満足するラプラスの方程式(1)の解は、次のように表される。

$$\phi = \sum_{s=1}^{\infty} B_s I_n(\lambda_s \rho) f(\eta) \quad \text{[内部問題]} \quad \text{.....(8.a)}$$

$$\phi = \sum_{s=1}^{\infty} B_s K_n(\lambda_s \rho) f(\eta) \quad \text{[外部問題]} \quad \text{.....(8.b)}$$

ここに、 B_s は未定係数、 $\rho = r/a$ は無次元化された r 方向座標、 $\eta = z/H$ は区間 $[0, 1]$ で定義される流体領域の無次元化された z 方向座標、 I_n と K_n はそれぞれ、第1種変形、第2種変形 Bessel 関数である。さらに、 $f(\eta)$ は、式(2)、(3)を満たす Sturm-Liouville 型の固有値問題の解 (固有関数) である。

$$f(\eta) = \sin(\lambda_s H \eta / a) \quad \text{[ただし、}\lambda_s H / a = (2s-1)\pi/2\text{]} \quad \text{.....(9)}$$

b) 未定係数 B_s の決定 式(8)に現れる未定係数 B_s は、殻表面における接触条件式(5)を満足するように定められる。すなわち、式(8)を式(5)に代入し、さらに固有関数 (式(9)) で展開することにより、未定係数 B_s の満たすべき関係式は次のように得られる。

$$[b]\{B\} = \{c\} \quad \text{.....(10)}$$

$$\text{ここに、}\{B\}^T = (B_1, B_2, \dots, B_N) \quad \text{.....(11)}$$

であり、 $[b]$ および $\{c\}$ の成分 b_{ks} 、 c_k は次のように与えられる。

$$c_k = \int_0^1 w \sin(\lambda_k H \eta / a) d\eta \quad \text{.....(12)}$$

$$b_{ks} = \int_0^1 g_s(\eta) \sin(\lambda_k H \eta / a) d\eta \quad \text{.....(13)}$$

ただし、 $g_s(\eta)$ は内部問題に対して、

$$\begin{aligned}g_s(\eta) &= \{-n I_n(\lambda_s \rho(\eta)) / \rho(\eta) + \lambda_s I_{n-1}(\lambda_s \rho(\eta))\} \cdot n_r(\eta) \cdot \sin(\lambda_s H \eta / a) \\ &\quad + \lambda_s I_n(\lambda_s \rho(\eta)) \cdot n_z(\eta) \cdot \cos(\lambda_s H \eta / a)\end{aligned} \quad \text{.....(14)}$$

ここで、 n_r と n_z は殻表面における外向き法線方向余弦であり、 $\rho(\eta)$ 、 $n_r(\eta)$ および $n_z(\eta)$ は、 η の関数であることを意味する。なお、外部問題に対する $g_s(\eta)$ は、式(14)において、 I_n を K_n 、 I_{n-1} を $-K_{n-1}$ に置き換えればよい。

マトリックス $[b]$ の成分の被積分関数 (式(13)) は、回転殻の形状が与えられれば既知となるので、 $[b]$

の各成分は数値的に評価ができる。したがって、式(10)より未定係数 B_s は次式となる。

$$\{B\}=[b]^{-1}\{c\} \quad \dots\dots(15)$$

ただし、 $\{c\}$ の成分は式(12)より明らかなように、法線方向変位 w を未知関数とする積分形で与えられていることに注意されたい。

c) 液体に接する回転殻の運動方程式 式(6)より回転殻に作用する動液圧を求めれば、液体に接する回転殻の運動方程式は、次のように表される。

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2\{F\}\{X\}+\{P\} \quad \dots\dots(16)$$

ここに、 $(\quad)'=d(\quad)/d\xi$ 、 $\xi(=[0, 1])$ は液体と殻の接触領域で定義される経線方向座標 x の無次元化座標である。また

$$\{X\}^T=(u, v, w, \bar{\beta}_x, \bar{\beta}_\theta), \quad \{P\}^T=(0, 0, p_w, 0, 0) \quad \dots\dots(17)$$

であり、 $\{P\}$ は液体に接する回転殻の振動時に、流体との相互作用により発生する外圧力ベクトルで、その非零成分 p_w は内部問題に対して；

$$p_w=(\rho_f/\rho_s)\cdot(a/h)\sum_{s=1}^{\infty}B_s\cdot I_n(\lambda_s\rho)\sin(\lambda_s H\eta/a) \quad \dots\dots(18.a)$$

外部問題に対して；

$$p_w=-(\rho_f/\rho_s)\cdot(a/h)\sum_{s=1}^{\infty}B_s\cdot K_n(\lambda_s\rho)\sin(\lambda_s H\eta/a) \quad \dots\dots(18.b)$$

と表される (B_s は式(15)で与えられる)。さらに $[C],[D],[E]$ および $[F]$ は、殻の諸元のみで表される 5×5 次の行列 (具体的内容は文献2)を参照)、 Ω^2 は液体-回転殻系の固有円振動数パラメータである。

$$\Omega^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega^2/E \quad \dots\dots(19)$$

境界条件の規定に必要な合応力($N_x, N_{x\theta}, Q_x$)、曲げモーメント($M_x, M_{x\theta}$)は、それらのFourier係数を($n_x, n_{x\theta}, q_x$)、($m_x, m_{x\theta}$)と記せば、次のようにマトリックス表示される。

$$\{T\}^T=[G]\{X'\}+[H]\{X\} \quad \dots\dots(20)$$

ここに、

$$\{T\}^T=(n_x, n_{x\theta}, q_x, m_x, m_{x\theta}) \quad \dots\dots(21)$$

であり、 5×5 次の行列 $[G], [H]$ の成分は文献2)を参照されたい。

以上により、液体に接する回転殻の自由振動問題は、動液圧 p_w が未知関数 w の積分形で表される微積分方程式(16)を殻の端末で規定される境界条件の基で解く問題に帰着された。

3. 定式化

記述を容易にするため、ここでは水深 H と殻の高さ L が等しい場合を取り扱う。なお、液体と非接触な領域を有するときは、要素分割を施すことにより対処できる³⁾。

微積分方程式で記述された運動方程式の離散化は、微分項には選点法、積分項には補間型数値積分則を用いて行うものとする。

選点法による定式化の過程は、空中にある構造要素の動的問題を扱った文献2)に従うので、ここでは後の展開に必要なことのみを記す。

- ① 経線にそって $0=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_M<\xi_{M+1}=1$ の $M+2$ 個の点を配置する (この問題の全未知量は $5(M+2)$ 個)。
- ② 内部選点 ξ_i ($i=1\sim M$, M =内部選点数) には、区間 $[0, 1]$ で定義される M 次のshifted Legendre多項式の零点を採用する。
- ③ $\xi_0=0$ と $\xi_{M+1}=1$ は境界条件が規定される点に配置されるので端点と呼ぶ。

④数値計算の簡易化のために、 ξ に関する1, 2階微分を内部選点と端点における関数値(変位の値)に結びつける次式を用いる。

$$\{X''\} = [A]\{X\}, \quad \{X'\} = [B]\{X\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 $X=u, v, w, \beta_x, \beta_\theta$ であり、 $\{X\}$ 等は次のようなものである。

$$\{X\}^T = (X(\xi_0), X(\xi_1), \dots, X(\xi_{M+1})) \quad \dots\dots\dots(23)$$

次に動液圧 p_w (式(18))の表示式に現れる積分(式(12),(15))の離散化表示を考える。積分を補間型数値積分公式⁴⁾によって評価し、殻の経線に沿って配置される内部選点の位置と積分における分点(標本点)を共有させることにすれば、 M 次のshifted Legendre多項式の零点を分点とする積分則(Gauss-Legendre型積分則に同等)を用いて次のように表される。

$$\int_0^1 w \sin(\lambda_k H \eta / a) d\eta = [Y]\{w_0\} \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここで、

$$\{w_0\}^T = (w(\xi_1), w(\xi_2), \dots, w(\xi_M)) \quad \dots\dots\dots(25)$$

である。なお、行マトリックス $[Y]$ の成分は、式(24)の左辺が η に関する積分なので、積分法による変数変換($\eta \rightarrow \xi$)により作成されるものである。

さて、以上の準備の基に、問題を解くのに必要な $5(M+2)$ 個の未知数に対する条件式は次のようになる。

1) 5M個の条件式

この条件式は、式(16)の内部選点における残差条件より求められ、内部選点と端点における未知の量に分離すれば、次のように表示される。

$$[\alpha_0]\{\delta_0\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} = \Omega^2 ([M_0^s] + [M_0^f])\{\delta_0\} \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここで、 $\{\delta_0\}$ は内部選点における変位を成分とする5M次、 $\{\delta_e\}$ は端点における変位を成分とする10次のベクトル、 $[\alpha_0]$ および $[\alpha_e]$ は、式(22)のマトリックス $[A], [B]$ の成分で構成されるそれぞれ、5Mx5Mおよび5Mx10次のマトリックス、 $[M_0^s]$ は殻自体の慣性力の係数を成分とする5Mx5M次のマトリックスである。さらに $[M_0^f]$ は、内部選点における法線方向変位を成分とするベクトル $\{w_0\}$ (式(25))に対応するサブマトリックスのみが非零となる流体の付加質量マトリックスである。

2) 10個の条件式

10個の条件式は、殻の端末で指定される境界条件によって定まり、ここでは便宜上次式で表しておく。

$$[\gamma_0]\{\delta_0\} + [\gamma_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 $[\gamma_0], [\gamma_e]$ はそれぞれ、10x5Mおよび10x10次のマトリックスである。

3) 固有振動数方程式

式(26)および(27)より、 $\{\delta_0\}$ を消去すれば、内部選点における未知ベクトル $\{\delta_e\}$ を固有ベクトルとする次の固有振動数方程式が得られる。

$$([\alpha_0] - [\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_0])\{\delta_e\} = \Omega^2 ([M_0^s] + [M_0^f])\{\delta_e\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

なお、液体と部分的に接する場合($L > H$)の固有振動数方程式は、液体との接触領域で成立する式(26)、非接触領域で成立する式(26)に類似な条件式($[M_0^f] = 0$)、殻の端末で規定される境界条件および接触、非接触領域の境界で成立する殻の力学量と変形量に関する接続条件を考慮することにより導かれる。

4. 数値解析例

本節では、今までに述べた手法の適用例を示す。ただし、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\rho_s = 8.00 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$, $\rho_f = 1.02 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$, $\nu = 0.3$ およびせん断補正係数 $\kappa = \pi^2/12$ とした。なお、1要素内の内部選点数 M には、空の回転殻の適用例⁵⁾より判断して $M=11$ を採用した。以下に、球殻および双曲殻の数値解析

結果を示す。

(1) 下端固定の半球殻

解析モデルは、頂点が閉じた半球殻で、諸元は殻厚比(h/a)が0.01、液位比(H/a)が0.5である。表-1は、液体と接触する領域を殻の経線に沿って2要素に等分割して解析した場合の、固有関数の展開項数 N の固有円振動数パラメータ Ω に与える影響をみたものである。円周方向波数 $n=1, 5$ の経線方向モード次数 $m=1 \sim 5$ に対する本解析値は、展開項数 N によらず一定値を示している。

表-2は、本解析法の妥当性を確認するため、Rayleigh-Ritz解と比較したものである。Rayleigh-Ritz解は、まず空中にある半球殻の自由振動を選点法により解析し、次にそこから得られた固有モードを基準関数に採用し、その5項の重ね合わせにより求めたものである。円周方向波数 $n=1 \sim 5$ の基本固有円振動数 Ω に対する本解析値は、厳密解に対して上限値を与えるRayleigh-Ritz解より低めの値を与えており妥当なものと思われる。

(2) 片持ち形式の双曲殻

図-2に示すように、スロート部の半径 R_t を種々変化させ円筒殻 (Case 5) を含む数種の形状の双曲殻 (Case 1~Case 4) を解析する。液位比 $H/a = 2.0, 2.5$ 、波数 $n=1$ に対する無次元化基本固有振動数 Ω の結果を図-3 (内部問題) および図-4 (外部問題) に示す。図から明らかなように、スロート部の半径 R_t が大きくなるほど

(Case 1→Case 4)、固有振動数は円筒殻のそれに漸近していく。

図-5は、図-2に示したCase 1とCase 3の場合の固有振動数曲線 (液位比 $H/a=2.5$ のときの周方向波数 n に対する固有振動数の変化) をモード次数 $m=1$ について示したものである。これによれば、外部問題の固有振動数

(Ω_E) は内部問題の振動数 (Ω_I)

より大きく、その比は円周方向波数 n の低いとき ($n=0, 1$) ほど大きいこと、さらに $n \geq 2$ であれば $\Omega_E/\Omega_I \approx 1$ であることがわかる。なお、 $\Omega_E/\Omega_I \approx 1$ となる最小の波数 n は、たとえば円筒殻の $n=5$ な

表-1 展開項数 N の解 Ω に与える影響 (球殻)

(a) Interior Problem

N	n	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
8	1	0.366	0.633	0.732	0.896	0.939
10		0.365	0.632	0.731	0.895	0.938
12		0.365	0.632	0.731	0.895	0.937
8	5	0.596	0.750	0.946	0.985	1.048
10		0.596	0.749	0.945	0.983	1.047
12		0.596	0.748	0.944	0.983	1.047

(b) Exterior Problem

N	n	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
8	1	0.438	0.663	0.763	0.898	0.942
10		0.438	0.663	0.763	0.898	0.942
12		0.438	0.663	0.763	0.898	0.942
8	5	0.643	0.779	0.947	0.988	1.053
10		0.643	0.779	0.947	0.988	1.053
12		0.643	0.779	0.947	0.988	1.053

表-2 Rayleigh-Ritz解との比較 (球殻)

Harmonic Number	Interior Problem		Exterior Problem	
	Present	R.R.M.	Present	R.R.M.
1	0.365	0.367	0.438	0.439
2	0.484	0.494	0.576	0.584
3	0.535	0.546	0.609	0.619
4	0.569	0.575	0.628	0.633
5	0.596	0.599	0.643	0.646

R.R.M.: Rayleigh-Ritz method

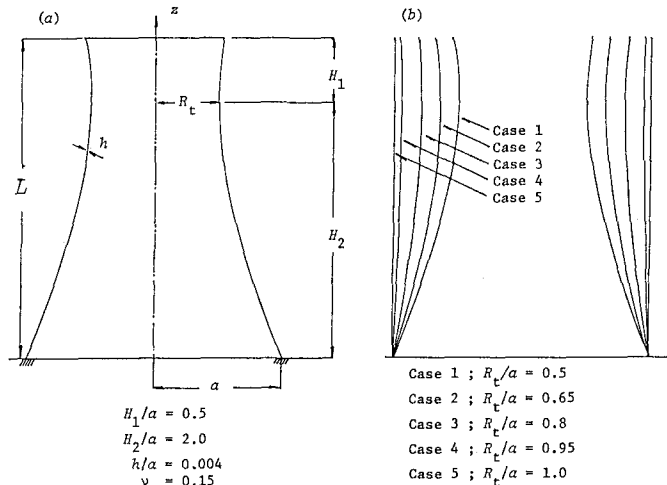


図-2 双曲殻の解析モデル

ど³⁾に比べて小さいが、これはガウス曲率が負である双曲殻の構造特性によるものである。

5. おわりに

本論文では、液体に接する回転殻の自由振動問題を微積分方程式で記述し、その微分項を選点法および積分項を補間型数値積分則により離散化し解析する手法を提示した。さらに、球殻と双曲殻の内部、外部問題の解析を通じて、手法の妥当性を確認した。

参考文献

- 1) Magrab, E.B.: Vibrations of Elastic Structural Members, Sijhoff & Noordhoff, 1979.
- 2) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析，土木学会論文集，第374号 / I-6, pp.319-328, 1986.
- 3) 三上 隆・芳村 仁：液体に接する円筒殻の自由振動，構造工学論文集, Vol.34a, pp.785-796, 1988.
- 4) Davis, P.J. and Rabinowitz (森 正武訳)：計算機による数値積分法，日本コンピュータ協会，1980.
- 5) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集，第335号，pp.69-78, 1983.

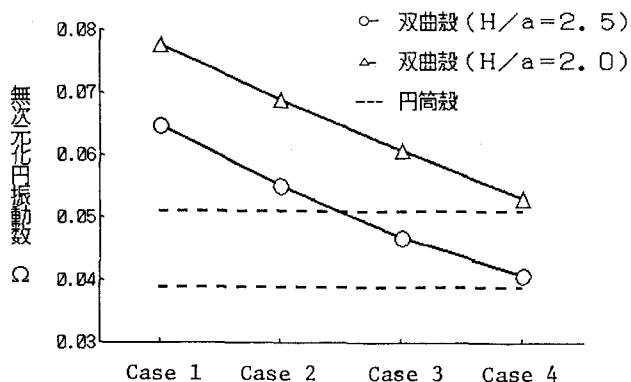


図-3 双曲殻の固有振動数 Ω (内部問題, $n=1, m=1$)

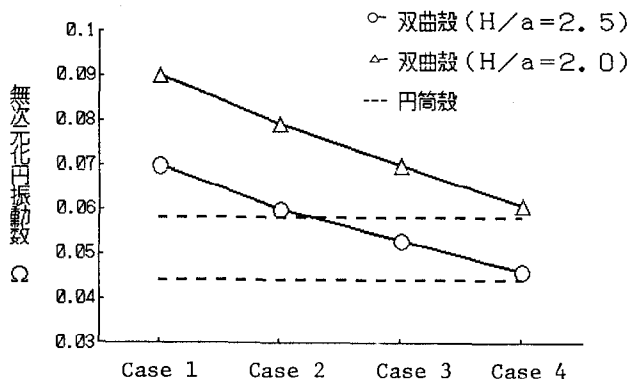


図-4 双曲殻の固有振動数 Ω (外部問題, $n=1, m=1$)

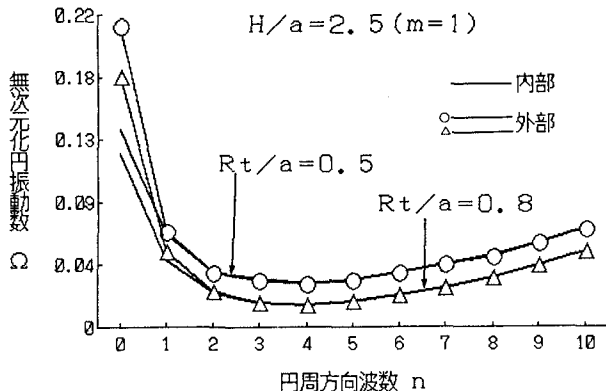


図-5 固有振動数 Ω と波数 n の関係 (双曲殻)