

I-29 スティブ・サイロの固有振動解析のための一離散的構造モデル

北海道大学工学部 正会員 佐々木 康彦
 北海道大学工学部 正会員 芳村 仁
 日本建設コンサルタント(株) 正会員 熊谷 健一

1. まえがき

“コンクリートスティブ・サイロ (concrete stave silo)” は経済的で施工性にも優れているため、欧米では70年来の使用実績を持ち、工業用・農業用大型貯蔵施設として広く普及している。しかし、このスティブ・サイロはコンクリートブロック(スティブ, stave)を円筒状に組合せて積上げ、外壁をリング状の鉄筋(フープ, hoop)で締付けるという不連続な壁体構造を持ち、その地震時挙動や耐震安全性について解明すべき点も多く残されている。

著者等はスティブ寸法の異なる二種類のサイロ模型による各種振動実験を実施し、このような不連続性を持つサイロ構造物の振動特性・地震時挙動と不連続性や内容物の影響などに関する実験的な検討を進めてきた^{1), 2)}。本報告は、さらにスティブ・サイロの動的挙動に関する解析的な検討をめざした、固有振動解析のための一構造解析モデルとその数値計算例について述べたものである。ここでは、スティブやフープ、スティブ継目などの壁体構成要素をそれぞれ離散的な構造要素にモデル化して組立てた後、解析モデルの簡略化と自由度の大幅な減少をねらった“スティブ・サイロ要素”への有限要素化を試みた。

2. 剛体-剛体間バネ-円弧梁(RSB)系モデル

2.1 壁体構成要素のモデル化

スティブ・サイロの標準的な壁体構造は、側面に円弧状凹凸の付いたスティブを図1のように組合せて構成される。外壁を締付けのフープはスティブかみ合せ部分とその中間位置に配置される。また、スティブ継目はモルタルなどによる目地結合ではなく、相互のスティブが直接に接合している。これらの壁体構成要素をそれぞれ次のような離散的構造要素にモデル化する。

個々のスティブは、ひずみが殆ど生じないという実験結果に基づいて²⁾、直方体形状の『剛体』と仮定する。リング状のフープはスティブとの接触点を節点とする、軸方向変形を考慮した『円弧梁』と考える。スティブ継目の複雑な挙動を厳密にモデル化することは現状では非常に困難である。ここでは、スティブ継目で凹凸や摩擦による抵抗機構を、剛体間に配置した『分布バネ・集中バネ』のバネ剛性としてモデル化する。これら三種類の構造要素で構成される

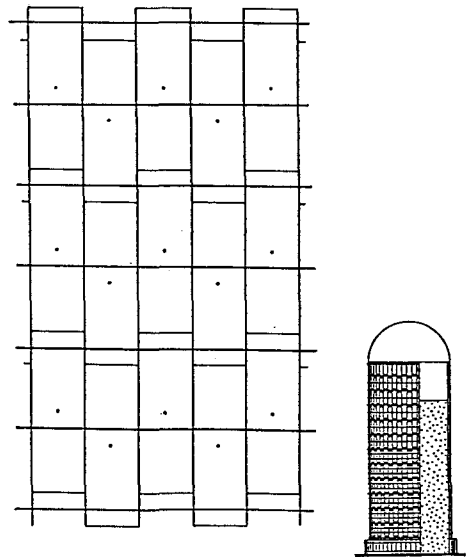


図1 スティブ・サイロ壁体構造の拡大図

“剛体-剛体間バネ-円弧梁”系モデル(以後、RS

B系モデルと略称する) のなかで最も単純でかつ基本となるRSB系モデルを図2に示す。このような剛体の配置によって、ステイブ相互のかみ合せも考慮出来る。

2.2 円筒状RSB系モデルの定式化

剛体を図1のようにかみ合せながら、円周方向N個、高さ方向M段に積上げた『円筒状RSB系モデル』を考える。円弧梁も剛体外面を全周に渡って配置するので、2M組のフープを構成する。このような円筒状RSB系モデルにおいて、系全体の質量・剛性マトリックス $[M_G]$, $[K_G]$ は、その構造要素である剛体、剛体間バネ、円弧梁の質量や剛性のほか、幾何学的寸法や隣接剛体間の運動学的関係によって定式化出来る。以下、その誘導過程の概要を述べる。

一般に三次元運動の剛体は6自由度を持つが、ここでは図2に示した4個の支配的変位・回転成分を未知量とする。すなわち、剛体重心位置での円周方向・半径方向変位 v_G 、 w_G および2つの回転角 θ_G 、 ϕ_G である。したがって、剛体①の重心変位ベクトルは

$$\{\delta_G^i\} = [v_G^i \ w_G^i \ \theta_G^i \ \phi_G^i]^T$$

となる。ここで、上付添字^Tは転置を表す。この“剛体の重心変位”という未知量は、有限要素法の場合と異なっており、要素の節点変位のように重複しない。そのため、系全体の重心変位ベクトル $\{\delta_G\}$ の次数、すなわち総重心変位数は $4NM (=4 \times N \times M)$ となる。なお、NM は全剛体数である。

三種類の構造要素のうち、剛体間バネの質量は考えない。ステイブ・サイロの壁体重量とフープ重量との比較から、円弧梁の質量も十分無視出来る。したがって、円筒状RSB系モデル全体の質量マトリックス $[M_G]$ ($4NM \times 4NM$) は、重心変位ベクトル $\{\delta_G\}$ の成分に対応した各剛体の質量あるいは慣性モーメントを対角成分とする対角マトリックスとなる。 $[M_G]$ の成分は剛体の密度 ρ および剛体の幅 $2b$ 、高さ $2l$ 、厚さ $2h$ で決まる。また、円筒状RSB系モデル全体の剛性マトリックス $[K_G]$ ($4NM \times 4NM$) は、

$$[K_G] = ([K_S] + [K_H])$$

と表わすことが出来る。すなわち、剛体間分布バネ・集中バネのバネ剛性成分 $[K_S]$ と円弧梁の曲げ剛性・伸び剛性成分 $[K_H]$ とから成る。以下に、 $[K_S]$ と $[K_H]$ の概要を述べる。

上下に隣接する剛体①、②において(図2参照)、接触面での円周方向・半径方向の相対変位 v^{ik} 、 w^{ik} に抵抗する分布バネの剛性定数をそれぞれ k_v 、 k_w 、また2つの相対回転角 θ^{ik} 、 ϕ^{ik} に抵抗する集中バネの剛性定数を K_θ 、 K_ϕ とする。まず、剛体間バネの歪エネルギーを、これら4種類の剛性定数と接触面での相対変位ベクトル

$$\{\delta^{ik}\} = [v^{ik} \ w^{ik} \ \theta^{ik} \ \phi^{ik}]^T$$

で表す。次に、剛体間の運動学的関係から、その相対変位ベクトル $\{\delta^{ik}\}$ を剛体①、②の重心変位ベ

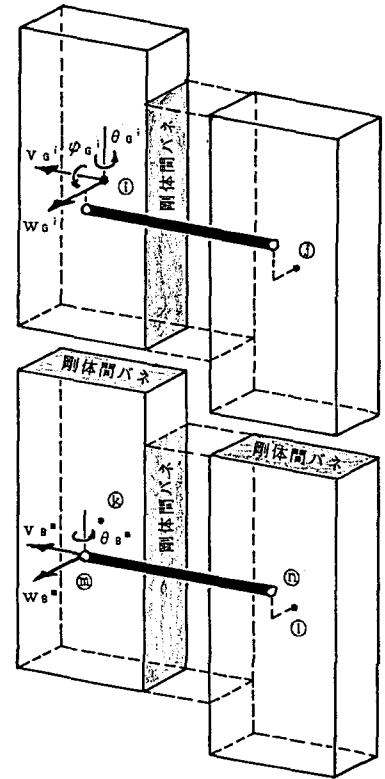


図2 剛体－剛体間バネ
－円弧梁(RSB)系モデル

クトル $\{\delta_g^i\}$ 、 $\{\delta_g^k\}$ に変換すると、Castigliano の定理から重心変位に対するバネ剛性 $[K^{ik}]$ が求まる。左右に隣接する剛体の場合は、2つの剛体が開き角を持つため幾分複雑ではあるが、同様な定式化が可能である。剛体間バネのバネ剛性成分 $[K_s]$ は、このようなバネ剛性 $[K^{ik}]$ を円筒状RSB系モデルにおけるすべての接触面で算定し、重ね合わせることで得られる。

円弧梁要素は両節点①、②において（図2参照）、それぞれ軸方向・半径方向変位 v_B 、 w_B および回転角 θ_B を未知量とする。したがって、要素の節点変位ベクトルは

$$\{\delta_B^E\} = [v_B^m \ w_B^m \ \theta_B^m \ v_B^n \ w_B^n \ \theta_B^n]^T$$

となる。軸方向変形を考慮した円弧梁要素の要素剛性マトリックス $[K_B^E]$ (6×6) の誘導過程については参考文献3)に譲る。円筒状RSB系モデル全体の節点変位ベクトル $\{\delta_B\}$ の次数（総節点変位数）は、円周上に剛体数と同じ N 個の節点を持つフープが2M組あるので、 $6NM$ ($=3 \times N \times 2M$) となる。また、この節点変位に対する円弧梁の全体剛性マトリックス $[K_B]$ ($6NM \times 6NM$) は、要素剛性マトリックス $[K_B^E]$ を重ね合わせる通常の方法で求められる。ここで、系全体の節点変位ベクトル $\{\delta_B\}$ と剛体の重心変位ベクトル $\{\delta_g\}$ に関して、

$$\{\delta_B\} = [T_B] \ \{\delta_g\}$$

という関係式が成立つ。この変換マトリックス $[T_B]$ ($6NM \times 4NM$) は、円弧梁要素の節点が剛体外面に接しているため、剛体の運動学的関係および剛体と円弧梁との接続条件から誘導出来る。したがって、剛体の重心変位に対する円弧梁の剛性成分 $[K_H]$ は

$$[K_H] = [T_B]^T [K_B] [T_B]$$

のように得られる。

3. スティブ・サイロ要素と構造特性マトリックスの誘導

円筒状RSB系モデルはスティブ・サイロの壁体構成要素を個々にモデル化して合成したものであり、前章で得られた系全体の質量・剛性マトリックス $[M_G]$ 、 $[K_G]$ を用いて、原則的にはスティブ・サイロの固有振動解析が可能となる。しかし、実際には数千自由度にも及ぶ大次元固有値問題となるため、この円筒状RSB系モデルのままでは適用限界が存在する。以下では、解析モデルの簡略化と自由度の大幅な低減を目的として、円筒状RSB系モデルの有限要素化を試みる。

円周方向 N 個の剛体で構成される円筒状RSB系モデルを、2つの

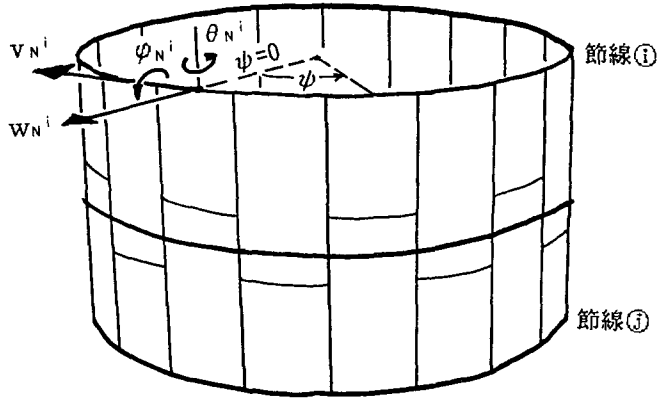


図3 スティブ・サイロ要素

水平面で切断して取出した“要素”を図3に示す。切断位置は円弧梁の配置位置と一致する。この要素の両境界上で、各剛体の切断面の中心点を連ねた円形曲線をそれぞれ節線①、②と呼び、各節線で4個の変位・回転角成分を未知量とする。さらに、これらの節線変位は円周方向に $\cos n\psi$ あるいは $\sin n\psi$

分布形を示すとし、基準方向 $\psi=0$ での節線変位振幅ベクトルを

$$\{\delta_N^E\} = [v_N^i \ w_N^i \ \theta_N^i \ \phi_N^i \ v_N^j \ w_N^j \ \theta_N^j \ \phi_N^j]^T$$

と表わす。ここで、 n は円周方向波数、 ψ は円周方向座標である。

次に、2つの水平面で切断された領域でのRSB系モデルについて考える。この領域内には（一部切断された）剛体が円周方向 N 個、高さ方向2段あり、その重心変位ベクトル $\{\delta_G^G\}$ の次数は $8N (=4 \times 2N)$ となる。また、領域に含まれる剛体の質量、剛体間バネ・円弧梁の剛性だけを算定することにより、要素内部RSB系モデルの質量・剛性マトリックス $[M_G^G]$ ($8N \times 8N$)、 $[K_G^G]$ ($8N \times 8N$)が得られる。

ここで、剛体の重心変位の円周方向分布形にひとつの規定を設ける。すなわち、円周上の任意位置にある剛体の切断面中心点での変位は、同じ点での節線変位に等しいとする。この変位分布規定と剛体の運動学的関係に従うと、剛体の重心変位ベクトル $\{\delta_G^G\}$ と要素の節線変位振幅ベクトル $\{\delta_N^E\}$ には

$$\{\delta_G^G\} = [T_G] \{\delta_N^E\}$$

という関係式が成立する。したがって、この有限要素の要素質量・剛性マトリックス $[M_N^E]$ (8×8)、 $[K_N^E]$ (8×8)は、変換マトリックス $[T_G]$ ($8N \times 8$)を用いて、

$$[M_N^E] = [T_G]^T [M_G^G] [T_G]、 \quad [K_N^E] = [T_G]^T [K_G^G] [T_G]$$

のように求まる。

以上、円筒状RSB系モデルを基礎にして、ひとつの新しい有限要素を開発し、その構造特性マトリックスの誘導過程を示した。以降は、この有限要素を『ステイブ・サイロ要素』と呼ぶことにする。このステイブ・サイロ要素によると、要素分割や要素質量・剛性マトリックスの重ね合わせが非常に簡略化される。また、円筒状RSB系モデルによる総重心変位数 $4NM$ の固有振動解析も、ステイブ・サイロ要素によると総節線変位振幅数が $4(M-1)$ となり、大幅な自由度の低減が可能となる。

4. ステイブ・サイロ要素における剛体間バネの剛性定数の算定方法

前章で誘導したステイブ・サイロ要素を実物ステイブ・サイロやステイブ・サイロ模型に適用する上で、剛体間に導入した分布バネ・集中バネの剛性定数をどのように決定すべきかが、最も重要な問題となる。この章では、剛体間バネの剛性定数に関するひとつの算定方法を提示する。解析すべきステイブ・サイロ壁体構造と同一材料・寸法の円筒殻を考え、それと等価な剛性定数を基準値とし、さらに模型実験結果に基づいて、ステイブ継目による壁体剛性の低減率を決定するものである。

4.1 円筒殻と等価な剛性定数（基準値）の計算式

上下あるいは左右に隣接する剛体の接触面に相対変位・回転角を与えると、剛体間分布バネ・集中バネに力やモーメントが生じる。他方、円筒殻理論⁴⁾における歪・曲率変化を前述の相対変位・回転角で差分近似するとともに、対応する断面力・断面モーメントを剛体接触面での力やモーメントと等しくする。このようにして、円筒殻の伸び・せん断・曲げ・振り剛性と等価な剛性定数の計算式が得られる。以下に、剛体間分布バネ・集中バネの計算式を示す。

1) 上下に隣接する剛体間バネの剛性定数：

$$\begin{aligned} kv &= Eh/2(1+\nu) \ell、 & kw &= Eh^3/2(1+\nu) \ell b^2、 \\ K\theta &= Eh^3b/3(1+\nu) \ell、 & K\phi &= 2Eh^3b/3(1-\nu^2) \ell \end{aligned}$$

2) 左右に隣接する剛体間バネの剛性定数：

$$\begin{aligned} kv &= Eh/(1-\nu^2) b、 & kw &= Eh^3/2(1+\nu) b d^2、 \\ K\theta &= 2Eh^3d/3(1-\nu^2) b、 & K\phi &= Eh^3d/3(1+\nu) b \end{aligned}$$

ここで、 E 、 ν は弾性係数とポアソン比、 $2b$ 、 2ℓ 、 $2h$ はそれぞれ剛体の幅・高さ・厚さ、 d は剛体の

かみ合せ部分の長さを表わす。

ここで得られた計算式の妥当性を検証するため、振動実験で用いた二種類のステイブ・サイロ模型の諸元を計算モデルとして固有振動解析を行なった。縮尺1/8模型は直径80cm、高さ200cmで、円周方向50個、高さ方向13段のモルタル製模型用ステイブ（単位体積重量 2.09gf/cm^3 ；幅5.0cm、高さ15.2cm、厚さ2.0cm）と32組のフープ（4mm径）で構成されている。同様に、縮尺1/6模型は直径100cm、高さ203cmで、円周方向40個、高さ方向8段のモルタル製模型用ステイブ（単位体積重量 2.38gf/cm^3 ；幅8.0cm、高さ26.5cm、厚さ2.2cm）と15組のフープ（5mm径）から成る。また、いずれも弾性係数を $2.5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比を1/6とした。サイロ模型の諸元を用いた計算モデル（剛体－剛体間バネ系）は円弧梁の剛性を零としたステイブ・サイロ要素により、またそれと同一材料・寸法の片持ち円筒殻は軸対称円筒要素でモデル化し、固有振動解析はサブ・スペース法によった。

表1は剛体－剛体間バネ系と円筒殻との固有振動数を比較したものである。また、両者の固有振動モードも良く対応していた。以上の結果から、ここで得られた計算式は円筒殻と等価であるという明確な物理的意味付けを持つとともに、ステイブ・サイロ要素における剛体間バネの剛性定数を算定する時の基準値として十分な精度を有することが明らかになった。

4.2 模型実験結果に基づく剛性定数の低減率

ステイブ・サイロの壁体構造は一体式構造に比べると、ステイブ継目の影響によって剛性が低めである。ここでは、ステイブ・サイロ要素を用いた固有振動解析を行ない、模型実験結果に基づいてステイブ・サイロ壁体剛性の低減率に関する目安を求める。

解析すべき縮尺1/8ステイブ・サイロ模型を図4に示す。模型を高さ方向に12分割してステイブ・サイロ要素を適用する。計算に必要な諸元は、前節で示したほか、フープの弾性係数 $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ がある。また、剛体間バネの剛性定数は、前節で得られた円筒殻と等価な剛性

表1 固有振動数 f (Hz) の比較

(a) 縮尺1/8模型の諸元モデル

	円周方向 波数 n	高さ方向次数 m 1	2	3
剛体－剛体間バネ系	1	210	587	835
円筒殻		215	615	924
剛体－剛体間バネ系	2	145	398	610
円筒殻		148	405	638

(b) 縮尺1/6模型の諸元モデル

	円周方向 波数 n	高さ方向次数 m 1	2	3
剛体－剛体間バネ系	1	190	497	617
円筒殻		183	513	747
剛体－剛体間バネ系	2	128	347	501
円筒殻		122	340	529

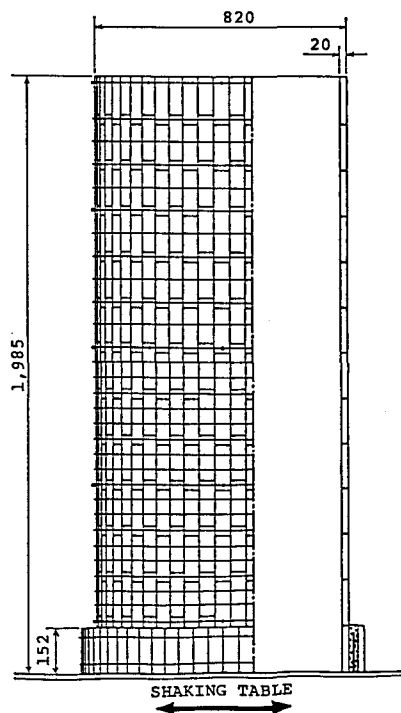


図4 縮尺1/8ステイブ・サイロ模型

定数を基準値とし、段階的に低減させていった。なお、4種類の剛体間バネの低減率について、今回はすべて一律とした。

剛性定数の低減率と基本固有振動数に関する縮尺1/8模型の計算結果を図5に示す。対応する共振振動数の実験値は31Hzなので、この縮尺1/8模型の場合の低減率は $\alpha=1.1/100$ となる。一体式構造に比べて、かなり低い壁体剛性であると言えよう。さらに、縮尺1/6模型に関しても同様な検討を行ない、 $\alpha=1.7/100$ という低減率が得られた。2つのサイロ模型は模型用スチープの寸法や円周方向・高さ方向のスチープ个数、フープ本数などが異なるにもかかわらず、同じオーダーでかつ類似した低減率を持つことは、スチープ・サイロ壁体剛性における特徴的な結果である。

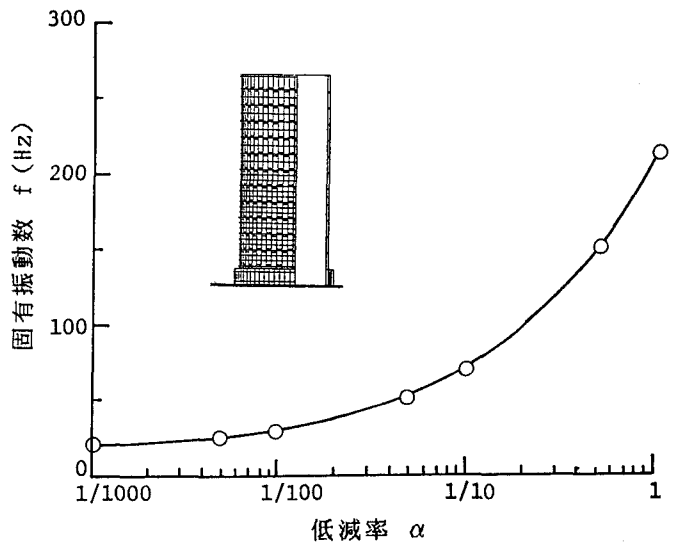


図5 剛性定数の低減に伴う基本固有振動数の低下状況

5. まとめ

スチープ・サイロの固有振動解析のために、新しい解析モデル『スチープ・サイロ要素』を考案した。また、二種類のスチープ・サイロ模型実験結果に基づき、円筒殻と等価な剛性定数を基準とした時の、スチープ・サイロ壁体剛性の低減率の目安が得られた。

《 参考文献 》

- 1) 佐々木康彦、山本広祐、芳村 仁：一体式構造との比較による不連続なサイロ構造物の地震応答性状、第19回地震工学研究発表会講演概要、pp.473-476、1987。
- 2) 佐々木康彦、芳村 仁：コンクリートスチープ・サイロの地震時挙動に関する実験的研究、農業施設、第17巻第2号、pp.24-33、1986。
- 3) 鷲津久一郎他編：有限要素法ハンドブック（I．基礎編）、培風館、pp.231-232、1981。
- 4) 西村敏雄：ベクトルとシェル構造、彰国社、pp.110-112、1977。