

I-24 平面骨組構造物の固有値と

その精度に関する一考察

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎

1. まえがき

近年、地形および地域の自然環境との調和を配慮した道路線形設計上の観点から、広幅員の連続高架橋あるいは斜角のきつい方杖橋、アーチ橋の施工例が数多く見受けられるようになってきた。このように、構造物が非対称でかつ大型化あるいは複合化されると、構造物の質量の中心点が大きく偏心することにより、固有値が接近する現象が現れてくる。特に、構造物の動的応答解析には、その用いる解法によっては動的応答値を過大あるいは過小に評価してしまう場合がある。一般的に、構造物の動的応答は構造物に作用する外力（地震、風、走行荷重等の動的な外力）の持つ性質と、構造物自身の固有振動性状（固有振動数、固有振動モード、減衰定数等）によって決定される。したがって、固有振動数および固有振動モードを低次から高次振動まで精度よく計算することは、構造物の動的設計および動的応答の評価を行う上で重要な問題であるといえる。

有限要素法による振動解析が一般的に普及し、さらに、電子計算機の急進的な発展により数値計算が容易になった今日においても、構造物の要素分割数とその固有値の精度について数値解析的にかつ数学的立場から明確に検討した論文は意外と少なかったように思われる。そこで、本研究は平面骨組構造物の中でも基本的な連続桁、アーチ橋およびVレググラーマン橋を数値計算例として取り上げ、集中質量法、整合質量法および連続質量法により数値計算し、求められた固有値の精度について詳しく検討する。また、必要な精度を満たす固有振動モード次数と近似解法の要素分割数との関係について調査し、要素分割数の妥当性とその算定方法の提案を試みる。

2. 固有振動解析

平面骨組構造物は軸変形および曲げ変形を受ける骨組部材より構成されているものとする。すなわち、骨組部材は軸力、せん断力および曲げモーメントのみを受け、ねじり変形あるいはそり変形はないものとする。また、固有振動解析には一般的な変位法（有限要素法）を適用することにする。

構造物の固有振動解析は、その構造物のモデル化によって離散座標系による解と分布座標系による解に大きく2つに分類することができる^{1), 2)}。さらに、前者には部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に等しく置換する集中質量法と、軸変形には1次式および曲げ変形には3次式の変位関数を用いて部材要素の質量を両節点に配分する整合質量法による2通りの方法がある。後者には骨組構造物の質量、剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法がある。この解析方法は軸要素あるいは曲げ要素の自由振動の基礎微分方程式

の一般解を必要とするが、正確な固有値を求めることができる。一般的に、離散座標系による解は標準的な固有値問題に、分布座標系による解は超越方程式を解く問題に帰着される。前者による解は近似解を、後者による解は厳密解を与える¹⁾。ここに、述べた骨組構造物の固有振動解析の概念的な分類が図-1に示されている。

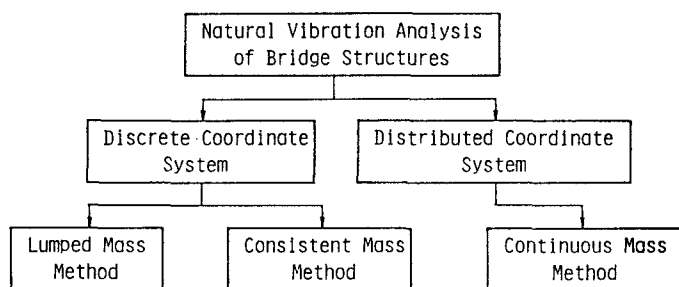
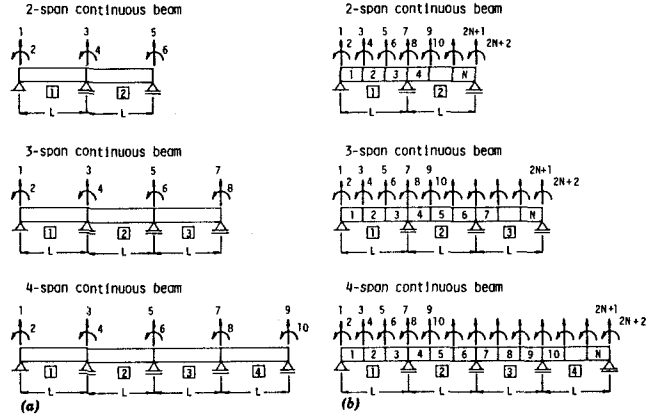


図-1 骨組構造物の固有振動解析の分類

3. 数値計算例

3-1. 連続桁

数値計算例として、等断面および等支間長を有する連続桁の固有値について考えてみよう。図-2は分布座標系(a)および離散座標系(b)における連続桁の要素分割の状況を示している。分布座標系における全要素数は連続桁の支間数と一致している。一方、離散座標系における連続桁の要素分割は各支間長を等分割し、全要素数はNで表されている。



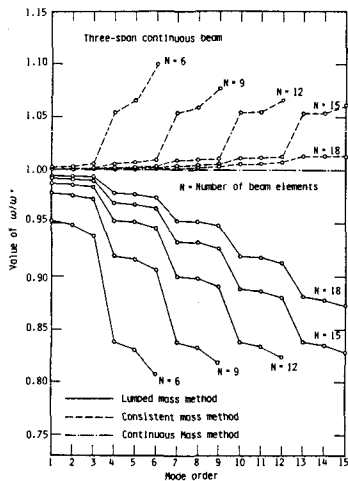


図-3 3 径間連続桁

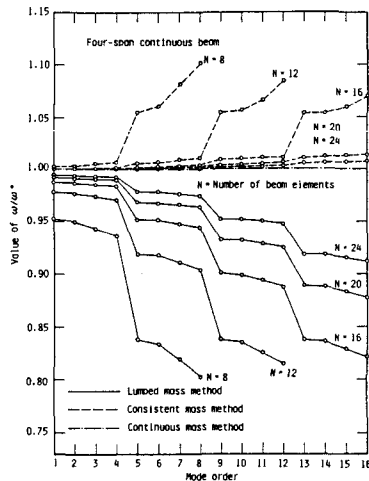


図-4 4 径間連続桁

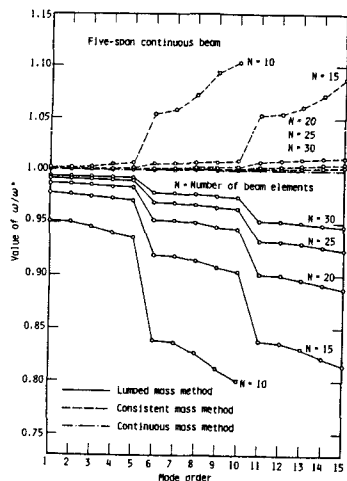


図-5 5 径間連続桁

数 n に応じた固有モード群が形成されており、その固有値の精度も群の中ではほぼ一定になる傾向がある。特に、その傾向は集中質量法により求められた固有値に顕著に現れていることがわかる。

3-2. アーチ橋

次に、アーチ橋の固有値について考えてみよう。数値計算例として、支間長 5.9 m、ライズ長 1.0 m のランガー橋と支間長 7.0 m、ライズ長 1.0.2 m のローゼ橋を取り上げることにする。その数値計算に必要な断面諸元は表-2 に与えられている。境界条件としては、左端がヒンジ支承、右端がローラー支承である。また、両者の節点数は

表-2 アーチ橋の断面諸元

Structural properties	Langer bridge			Lohse bridge		
	Lower chord member	Upper chord member	Vertical member	Lower chord member	Upper chord member	Vertical member
Cross sectional area: $A(m^2)$	0.023	0.014	0.005	0.052	0.050	0.007
Moment of inertia : $I(m^4)$	0.0084	0.0065	0.0016	0.0093	0.0077	0.0018
Dead load : $w(t/m)$	2.78	0.11	0.04	3.67	0.39	0.06

図-6、7 は数値計算により求められた固有値の比をそれぞれランガー橋とローゼ橋について示したものである。一般的に、整合質量法により求められた固有値は集中質量法による解に比べて、かなり精度が良いことがわかる。また、集中質量法により求められた解の中で、ランガー橋では、縦振動の卓越する第 2、6、10 次の固有振動モードおよびローゼ橋では、第 2、5、9 次の固有振動モードが他の曲げ振動のものより、良い精度で解が求められている。この場合も、集中質量法および整合質量法により求められた固有値はそれぞれ厳密解に

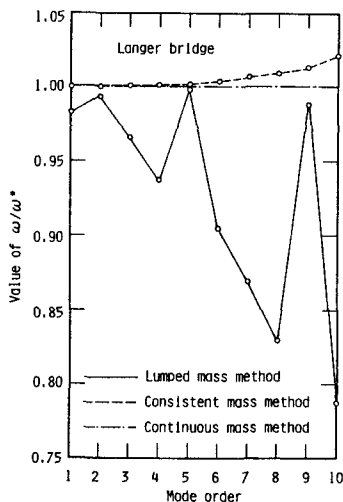


図-6 ランガー橋

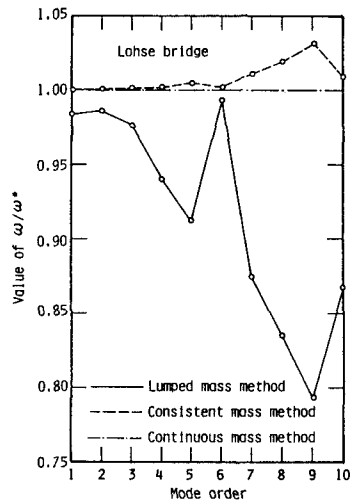
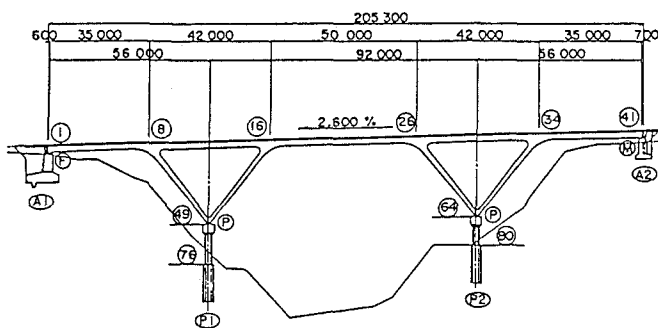


図-7 ローゼ橋

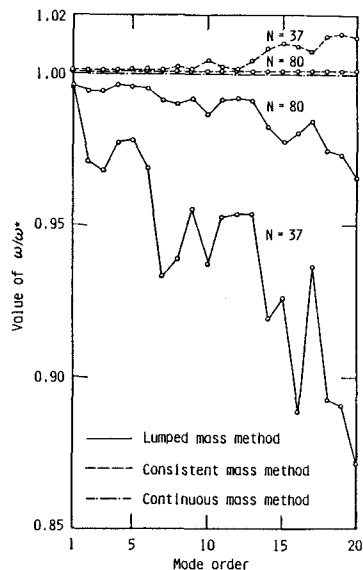


図一8 Vレグラーメン橋の側面図

対して下解値および上解値を与える。

3-3. Vレグラーメン橋

図一8に示すようなVレグラーメン橋（シビチャリ1号橋）の断面諸元を用いて固有値計算を行う。図一9には、近似解と厳密解との比が各固有モード次数に対して示されている。連続桁の場合と同様に、分割要素数Nが増えるにつれて近似解は徐々に厳密解に近づく傾向がある。また、同じ要素分割数では、整合質量法による解は集中質量法による解に比べて、かなり精度が良いことがわかる。さらに、前者は上界値を、後者は下界値を与える。ここで用いた3種類の質量マトリックスの数学的位置関係については、連続質量法による固有剛性マトリックスの各要素を固有円振動数 ω についてTaylor展開することにより確認することができる^{1), 4)}。



図一9 Vレグラーメン橋

以上の連続桁、アーチ橋およびVレグラーメン橋の固有値計算から以下のことが言える。集中質量法より整合質量法による解が、かなり精度が高いことから、平面骨組構造物の固有振動解析には集中質量法を用いるよりも整合質量法を用いることを強く推奨したい。また、固有値計算する上で要素分割数と精度との関係について言及するならば、もし整合質量法により0.1%以内の良い精度で解を得るためには

$$(\text{構造物全体の要素分割数}) = (1 \text{ 節点の自由度}) * (\text{必要な固有振動モード次数})$$

という算定式が有効であろう。特に、連続桁あるいはVレグラーメン橋のように開いた平面骨組構造物の固有振動解析には上式による算定式が役立つであろう。しかし、アーチ橋のように閉じた平面骨組構造物については、多少の工夫が必要となる。

4. あとがき

本研究は平面骨組構造物の固有値計算を集中質量法、整合質量法および連続質量法により行い、求められた固有値の精度および要素分割数との関係について検討したものである。得られた結論および今後の研究課題についてまとめると以下のようになる。

(1) 一般的に、集中質量法により求められた平面骨組構造物の固有値は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与える。(2) 要素分割数が増加するにつれて、近似解法による解は徐々に厳密解に近づく傾向がある。また、同じ要素分割数では、固有値は集中質量法よりも整合質量法を用いる方がかなり精度が良いことがわかった。(3) 今後は、そり変形の影響を考慮した曲線格子桁橋あるいは立体骨組構造物の固有値とその精度について検討する必要がある。

(参考文献) 1) Hayashikawa, T. and Watanabe, N., Proc. of ASCE, Vol. 111, No. EM5, 1985.
2) Clough, R.W. and Penzien, J., Dynamics of Structures, 1975. 3) Ayre, R.S. and Jacobsen, L.S., J. of Applied Mechanics, Vol. 17, No. 4, 1950. 4) Paz, M., Structural Dynamics, 1980.