

I-21 パソコンによる

連続トラス橋の温度応力解析

北海道大学工学部 正員 小幡 卓司

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

近年、コンピュータ、特にパーソナルコンピュータの発達にはめざましいものがある。従来、大型計算機でしか可能でなかった計算も、今日では次第にパソコンに移行しつつある。したがって本論文は、大型計算機で行われていた連続トラス橋の温度応力解析を、プログラムに工夫を施し、パソコンを用いて行うものである。

2. 解析理論

2-1. 温度応力解析の概論

今、簡単なトラス構造物について考えてみる。

図-1のように、静定構造物に対して部材に温度差を与えても加熱された部材が膨張し全体が変形するだけで内部応力は発生しない。しかし図-2のような不静定構造物の場合、温度差が加われば各部材には、応力、変位、歪が生ずる。このような構造の解析は、次のような荷重に置き換えることによって処理できる。

① 状態 A

今、図-3.1において部材2に他の部材に対して $+\Delta t$ の温度差が生じたとする。当然、部材2は膨張しようとするが、不静定構造であるため変形が拘束され、内力が生じる。これを状態Aとする。

② 状態 B

状態Aは次のように考えることもできる。すなわち、状態Aで変形が拘束されることによって内力が生じると考えた。したがって、逆に部材2の拘束を解いた状態で加熱すればこの部材は膨張するが、これを完全に阻止するような外力を節点4に加えれば、これは状態Aと同じことである。これを状態Bとする。

③ 状態 C

状態Bで解いた部材2の拘束を再び元に戻し、部材2に温度差 $+\Delta t$ が生じ、節点4に状態Bの外力が作用した状態を考える。この場合温度差による内力(状態A)と変位を拘束する外力(状態B)は等価であるから互いに打ち消しあって熱応力だけが残る。これを状態Cとする。

したがって、以上の過程をまとめると次の関係が成り立つ。

$$(\text{状態A}) + (\text{状態B}) = (\text{状態C}) \quad (\text{自己平衡系})$$

具体的な計算手法は、①状態Aの温度差 Δt による内力を計算し、②状態Bの、状態Aにおける内力を計算し、③状態Aの内力に状態Bの部材応力を加えてやればよい(状態C)。この場合注意しなくてはならないのは、①の内力と②の外力は符号が逆になることである。

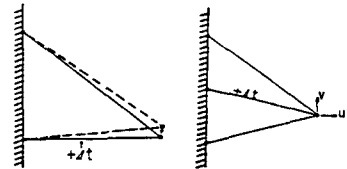


図-1

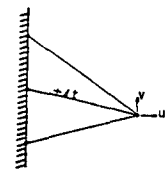


図-2

状態 A

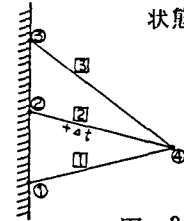


図-3.1

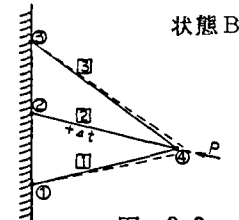


図-3.2

状態 B

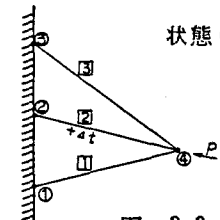


図-3.3

状態 C

2-2 剛性マトリックスによる温度応力解析

温度差及び外荷重を受ける2次元トラスの剛性方程式は右のように表される。

式(1)において、 X^0 はトラス部材の温度差による節点力を示している。この節点力は温度差による内力によって生ずるトラスの変形を拘束するために加えなければならない力(図-3.2、状態Bの節点荷重P)である。またXの列は、節点に作用する荷重を示している。今、トラス構造物に温度応力のみ生じた状態を考えると、これは自己平衡系であるから外力Xは $X=0$ であり、式(1)は式(2)のようになる。なお、 X^0 は一般に式(3)で求められる。

式(1)の剛性マトリックスKは通常の変形法による剛性マトリックスと全く同一である。図-4及び式(4)に剛性マトリックス式を示す。

したがって、以上の過程をプログラム化しパソコンで解けばよい。

2-3. 対称性のあるトラス構造の剛性マトリックスによる解法

一般に対称性を持ったトラス構造物を剛性マトリックス法によって解く場合、構造物を対称位置で切断し切断位置に全体形と等価になるような境界条件を与えて計算するのが普通である。

例えば図-5.1のような構造物の場合、図-5.2のようなモデルに置き換えて計算する。この場合、注意しなければならないのは、対称軸に一致する部材断面積及び荷重を1/2にすることである。

また、この様なモデル化を行う場合、対称性の種類によって取扱が異なる点がある。本論文では紙面の関係上詳しい説明は避けるが、これらは「対称性のある骨組構造の変形法による解析方法の研究」(渡辺、薄木、日野、土木学会北海道支部研究発表論文集 昭和44年度)に詳細が報告されているので参照されたい。

3. プログラム

本論文で用いたプログラムは16ビットパソコンを使用して作成した。具体的には表-1のハードウェア、ソフトウェア構成で作動するようになっている。プログラム本体の計算方法

は特に変わった方法は用いていないが、本体メモリが限られているため、剛性マトリックスの解を求める時

に、逆マトリックスを用いず、より直接的な方法である消去法を用いている。Gauss-Jordan法に代表される消去法は非常に精度の良い効率的な方法であり、使用メモリも逆マトリックス法の半分程度で計算

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1^0 \\ Y_1^0 \\ X_2^0 \\ Y_2^0 \\ \vdots \\ X_n^0 \\ Y_n^0 \end{bmatrix}$$

$$X = K \cdot U + X^0 \quad (1)$$

$$-X^0 = K \cdot U \quad (2)$$

(図-3.2 状態B 計算手法②)

$$X_i^0 = A_i \cdot E_i \cdot \epsilon_{T_i} = A_i \cdot E_i \cdot \alpha \cdot \Delta T_i \quad (3)$$

X_i^0 : 温度差による節点荷重 A_i : 部材断面積 E_i : ヤング率
 ϵ_{T_i} : 熱膨張 $\epsilon_{T_i} = \alpha \Delta T_i$ α : 線膨張係数 ΔT_i : 部材の温度差

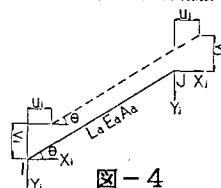


図-4

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{bmatrix} = \frac{E_a A_a}{L_a} \begin{bmatrix} \alpha_a^2 - \alpha_a \beta_a & -\alpha_a^2 & \alpha_a \beta_a & \alpha_a^2 \\ -\alpha_a \beta_a & \beta_a^2 & \alpha_a \beta_a & -\beta_a^2 \\ -\alpha_a^2 & \alpha_a \beta_a & \alpha_a^2 & -\alpha_a \beta_a \\ \alpha_a \beta_a & -\beta_a^2 & -\alpha_a \beta_a & \beta_a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$\alpha_a = \cos \theta_a, \quad \beta_a = \sin \theta_a$$

(4)

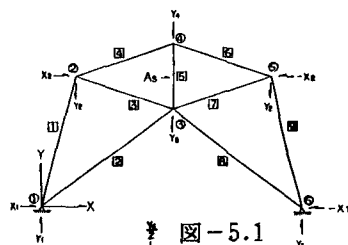


図-5.1

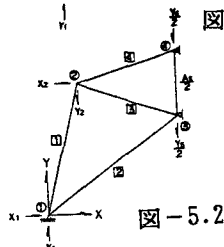


図-5.2

ハードウェア	16ビットパーソナルコンピュータ	NEC	PC-9801
	ユーザズメモリ		640KB
	ディスクドライブ		1MBタイプ 2台
ソフトウェア	MS-DOS		Ver 3.10
	MS-FORTRAN		Ver 3.20

表-1

可能である。また、LU分解法も使用メモリが非常に少なく有効である。表-2にGauss-Jordan法、表-3にLU分解法のSubroutineを示す。

```

SUBROUTINE GAUJOR(N,N)
COMMON/AA/A(80,81)
DO 10 K=1,N
P=0.0
DO 20 J=K,N
IF(P.GE.ABS(A(I,K))) GO TO 20
P=ABS(A(I,K))
L=I
CONTINUE
DO 40 J=1,M
T=A(K,J)
A(K,J)=A(L,J)
A(L,J)=T
CONTINUE
P=A(K,K)
DO 60 J=K,M
A(K,J)=A(K,J)/P
CONTINUE
DO 80 I=1,N
IF(I.EQ.K) GO TO 80
Q=A(I,K)
DO 70 J=K,M
A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*Q
CONTINUE
CONTINUE
RETURN
END

```

表-2

```

SUBROUTINE LUB(N)
COMMON/AA/A(160,160),U(160),B(160),NST(160),L27(160)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
IF(I.EQ.1) GO TO 10
DO 15 K=1,I-1
A(I,J)=A(I,J)-(A(K,I)*A(K,J)/A(K,K))
CONTINUE
DO 20 I=1,M
U(I)=B(I)/A(I,I)
IF(I.EQ.1) GO TO 20
DO 25 J=1,I-1
U(I)=U(I)-A(J,I)/A(I,I)*U(J)
CONTINUE
K=0
DO 30 I=1,M
I=N-K
K=K+1
IF(I.EQ.N) GO TO 30
DO 35 J=I,N-1
L=J+1
U(I)=U(I)-A(I,I)/A(I,I)*U(L)
CONTINUE
RETURN
END

```

表-3

4. 計算例

例(1) 図-6のようなトラス構造物に対し実際に計算を行ってみる。

部材断面積 $A = 8.0 \text{ cm}^2$ (全部材一定) 線膨張係数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$

ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6$

温度差 部材2に $\Delta t = +30^\circ\text{C}$

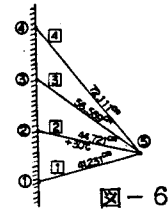


図-6

1 節点反力

	反力(kg)
1	.1656E+04
2	-.4141E+03
3	.1930E+04
4	.9651E+03
5	.1162E+04
6	.1162E+04
7	.6614E+03
8	.9921E+03

温度差による内力P

$$\begin{aligned}
 P &= \sigma A = \varepsilon_t EA \\
 &= 1.2 \times 10^{-5} \times 30^\circ\text{C} \times 2.1 \times 10^6 \times 8.0 \\
 &= 6048 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

2 節点変位

	u	v
1	.0000E+00	.0000E+00
2	.0000E+00	.0000E+00
3	.0000E+00	.0000E+00
4	.0000E+00	.0000E+00
5	-.6021E-02	-.2804E-02

変位を拘束する外力P'

$$P'u = -6048 \times 40.0 / 44.721 = -5410 \text{ kg}$$

$$P'v = -6048 \times 20.0 / 44.721 = -2705 \text{ kg}$$

3 部材軸力

	S	S
1	-.1707E+04	S 2 = -.2158E+04
3	-.1643E+04	S 4 = -.1192E+04

表-4

Check

$$H 1 = -1707 \times 40.0 / 41.231 = -1656 \text{ kg}$$

$$V 1 = -1707 \times 40.0 / 41.231 = -1656 \text{ kg}$$

$$H 2 = 3890 \times 40.0 / 44.721 = 3479 \text{ kg}$$

$$V 2 = 3890 \times 40.0 / 44.721 = 3479 \text{ kg}$$

$$H 3 = -1643 \times 40.0 / 56.569 = -1162 \text{ kg}$$

$$V 3 = -1643 \times 40.0 / 56.569 = -1162 \text{ kg}$$

$$H 4 = -1192 \times 40.0 / 72.111 = -661 \text{ kg}$$

$$V 4 = -1192 \times 40.0 / 72.111 = -661 \text{ kg}$$

$$\Sigma H = 0.0 \text{ kg}$$

$$\Sigma V = 0.0 \text{ kg}$$

図-7

以上より自己平衡系であることがわかる。

例(2) 断面積、諸定数は例(1)と同じとする。

温度差 部材2、5に $\Delta t = +30^\circ\text{C}$ 内力 $P = \sigma A = \varepsilon_t EA = 6048 \text{ kg}$

外力 $P'u = -6048 \times \cos 60^\circ = -5410 \text{ kg}$

$P'v = -6048 \times \sin 60^\circ = -2705 \text{ kg}$

Check (節点2) 1) 外力

2) 自己平衡系

$$\Sigma H = 806.3 + 2621.0 + 3024.0 + 403.2 \div 0.0 \text{ kg} \quad \text{OK}$$

$$\Sigma H = 866.3 + 403.2 + 403.0 \div 0.0 \text{ kg} \quad \text{OK}$$

$$\Sigma V = 698.4 - 4540.0 - 698.0 \div 0.0 \text{ kg} \quad \text{OK}$$

$$\Sigma V = 698.4 - 698.0 \div 0.0 \text{ kg} \quad \text{OK}$$

図-8.1の構造物の対称性を利用してモデル化すると図-8.2のようになる。その解を表-5に示す。

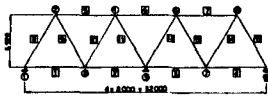


図-8.1

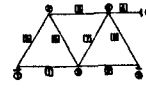


図-8.2

1 節点反力

	反力(kg)
1	.2218E+04
2	-.4539E+04
3	-.5012E-03
4	-.1397E+04
5	-.2218E+04
6	-.4539E+04

2 節点変位

	u	v
1	.0000E+00	.0000E+00
2	-.7680E-01	.2439E+00
3	-.1920E-01	-.1441E+00
4	-.3840E-01	.6651E-01
5	.0000E+00	.0000E+00
6	.3840E-01	.6651E-01
7	-.1920E-01	.1441E+00
8	.7680E-01	.2439E+00
9	.0000E+00	.0000E+00

3 部材軸力

	S	S
1	.4032E+03	.4032E+03
2	-.4032E+03	.4032E+03
3	.8063E+03	.1613E+04
4	.8063E+03	-.5242E+04
5	-.8064E+03	.8064E+03
6	-.8064E+03	-.8064E+03
7	.8064E+03	-.8064E+03
8	.8064E+03	.1613E+04
9	-.5242E+04	.4032E+03

1 節点反力

	反力(kg)
1	.2218E+04
2	-.4539E+04
3	-.8064E+03
4	-.3944E+03
5	.1613E+04
6	.0000E+00

2 節点変位

	u	v
1	.0000E+00	.0000E+00
2	-.7680E-01	.2439E+00
3	-.1920E-01	.1441E+00
4	-.3840E-01	.6651E-01
5	.0000E+00	.0000E+00
6	.0000E+00	.0000E+00

3 部材軸力

	S	S
1	.4032E+03	.4032E+03
2	.8063E+03	.1613E+04
3	-.5242E+04	.8064E+03
4	.8064E+03	-.8064E+03

表-5

例(3)

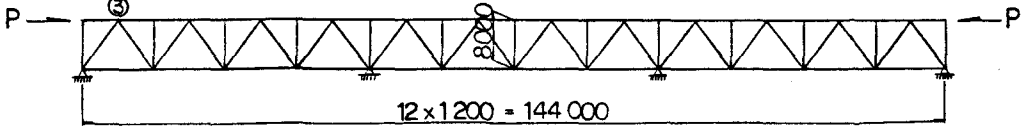


図-9

上弦材 $A=500.0 \text{ cm}^2$ 下弦材 $A=500.0 \text{ cm}^2$ Check (節点3)

斜材 $A=250.0 \text{ cm}^2$ 垂直材 $A=250.0 \text{ cm}^2$

線膨張係数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$ ヤング率 $E = 2.1 \times 10^8$

温度差 上弦材に $\Delta t = +30^\circ\text{C}$

温度差による内力 $P = \sigma A \epsilon; EA$

$$= 1.2 \times 10^{-5} \times 30^\circ\text{C} \times 2.1 \times 10^8 \times 500.0 = 378000 \text{ kg}$$

1) 外力 $\Sigma H = 388000.0 - 289400.0 \times 2 \times \cos \theta \approx 0.0 \text{ kg OK}$

$\Sigma V = 73840.0 \times \sin \theta - 73840.0 \times \sin \theta \approx 0.0 \text{ kg OK}$

2) 自己平衡系 $\Sigma H = 88600.0 - 73840.0 \times 2 \times \cos \theta \approx 0.0 \text{ kg OK}$

$\Sigma V = 73840.0 \times \sin \theta - 73840.0 \times \sin \theta \approx 0.0 \text{ kg OK}$

1 節点反力

	反力(kg)
1	-.1772E+06
2	.5907E+05
3	-.1772E+06
4	.5907E+05
5	-.1772E+06
6	.5907E+05
7	-.1772E+06
8	.5907E+05

2 節点変位

	u	v
1	.0000E+00	.0000E+00
2	.9718E+00	.0000E+00
3	.7558E+00	.3911E+00
4	.1519E+00	.6682E+00
5	.5905E+00	.6682E+00
6	.4251E+00	.6973E+00
7	.2023E+00	.6884E+00
8	.3103E+00	.6884E+00
9	.1956E+00	.5074E+00
10	.1519E+00	.3644E+00
11	.1315E+00	.3644E+00
12	.6738E-01	.1253E+00
13	.0000E+00	.0000E+00
14	.5391E-01	.0000E+00
15	.4043E-01	.3033E-01
16	-.7732E-08	.6065E-01
17	.2698E-01	.6065E-01
18	.1348E-01	.7076E-01
19	-.4656E-08	.8087E-01
20	.2905E-08	.8087E-01
21	-.1348E-01	.7076E-01
22	-.2246E-08	.6065E-01
23	-.2698E-01	.6065E-01
24	-.4043E-01	.3033E-01
25	.0000E+00	.0000E+00
26	-.5391E-01	.0000E+00
27	-.6738E-01	.1253E+00
28	-.1519E+00	.3644E+00
29	-.1315E+00	.3644E+00
30	-.1956E+00	.5074E+00
31	-.2023E+00	.6884E+00
32	-.3103E+00	.6884E+00
33	-.4251E+00	.6973E+00
34	-.5905E+00	.6682E+00
35	-.7732E+00	.6682E+00
36	-.7558E+00	.3911E+00
37	.0000E+00	.0000E+00

3 部材軸力

	S	S
1	.1329E+06	.4430E+05
2	-.4430E+05	.1329E+06
3	-.6753E-02	.2689E-02
4	.2109E-02	.1965E-02
5	-.1329E+06	.4430E+05
6	.4430E+05	.1329E+06
7	-.3780E+06	.1441E+06
8	-.2894E+06	.1441E+06
9	-.2894E+06	.1441E+06
10	-.2894E+06	.1441E+06
11	-.2894E+06	.1441E+06
12	-.2894E+06	.1441E+06
13	-.2894E+06	.1441E+06
14	-.2894E+06	.1441E+06
15	-.2894E+06	.1441E+06
16	-.2894E+06	.1441E+06
17	-.2894E+06	.1441E+06
18	-.2894E+06	.1441E+06
19	-.2894E+06	.1441E+06
20	-.2894E+06	.1441E+06
21	-.2894E+06	.1441E+06
22	-.2894E+06	.1441E+06
23	-.2894E+06	.1441E+06
24	-.2894E+06	.1441E+06
25	-.2894E+06	.1441E+06
26	-.2894E+06	.1441E+06
27	-.2894E+06	.1441E+06
28	-.2894E+06	.1441E+06
29	-.2894E+06	.1441E+06
30	-.2894E+06	.1441E+06
31	-.2894E+06	.1441E+06
32	-.2894E+06	.1441E+06
33	-.2894E+06	.1441E+06
34	-.2894E+06	.1441E+06
35	-.2894E+06	.1441E+06
36	-.2894E+06	.1441E+06
37	-.2894E+06	.1441E+06
38	-.2894E+06	.1441E+06
39	-.2894E+06	.1441E+06
40	-.2894E+06	.1441E+06
41	-.2894E+06	.1441E+06
42	-.2894E+06	.1441E+06
43	-.2894E+06	.1441E+06
44	-.2894E+06	.1441E+06
45	-.2894E+06	.1441E+06
46	-.2894E+06	.1441E+06
47	-.2894E+06	.1441E+06
48	-.2894E+06	.1441E+06
49	-.2894E+06	.1441E+06
50	-.2894E+06	.1441E+06
51	-.2894E+06	.1441E+06
52	-.2894E+06	.1441E+06
53	-.2894E+06	.1441E+06
54	-.2894E+06	.1441E+06
55	-.2894E+06	.1441E+06
56	-.2894E+06	.1441E+06
57	-.2894E+06	.1441E+06
58	-.2894E+06	.1441E+06
59	-.2894E+06	.1441E+06
60	-.2894E+06	.1441E+06
61	-.2894E+06	.1441E+06
62	-.2894E+06	.1441E+06
63	-.2894E+06	.1441E+06
64	-.2894E+06	.1441E+06
65	-.2894E+06	.1441E+06
66	-.2894E+06	.1441E+06
67	-.2894E+06	.1441E+06
68	-.2894E+06	.1441E+06
69	-.2894E+06	.1441E+06
70	-.2894E+06	.1441E+06
71	-.2894E+06	.1441E+06
72	-.2894E+06	.1441E+06
73	-.2894E+06	.1441E+06

表-6

5. あとがき

表-1の機種構成(ユーザーズメモリ 640KB)では約100節点までの計算が可能である。これは、連続ワレントラス橋で考えれば、格間数で50程度の計算が可能であり、格間長8.0mとすれば橋長400m程度、格間長12.0mとすれば橋長600m程度まで計算できる。また、対称構造であれば橋長800mから1200m程度までの連続ワレントラス橋の計算がパソコンで可能である。

参考文献 H. C. マーチン「マトリックス法による構造力学の解法」 培風館