

I-18 曲線テンドンを有するPCスラブの有限要素解析

北海道大学工学部 正員 上田 正 生

1 はじめに

曲線テンドンを有するPC (PPC) スラブ構造は、今日、土木のみならず建築の分野においても、大スパン空間構築のための有用な構造形式の一つとして注目され、比較的多くの使用例が散見されるようになった。然し乍ら、この種構造の設計理論は、著者の知る限りでは甚だ不備な段階に留まっており、「バラボリックテンドンによるプレストレスの効果を、これと近似的に等価な上向きの等分布荷重に置き替えて取り扱う」PC梁のための設計手法の“準用の域”を出ていないのが現状のようである。

著者は、ここ数年来、補強材の付着すべりを考慮したコンクリート構造部材の解析手法を確立すべく研究を行ってきたが、本報告では、これら既往の手法の拡張発展として、曲線テンドンを有するPCスラブの有限要素解析について報告する。

2 基本仮定事項

理論展開に当たって用いた基本仮定事項を以下に掲げる。

- ① 微小変形の仮定が成立するものとし、床板には、面外荷重と板の境界に面内荷重 (PC力を含む) が作用するものとする。
- ② コンクリートは等方弾性体であり、コンクリート断面には変形後も法線保持の仮定が適用できるものとする。
- ③ テンドンは直交するx, y方向に、2次曲線形を描いてそれぞれkおよびm層ずつ配置されており、しかも各テンドン層は板全体に一樣に等価配分された曲面層として存在するものとし、また各テンドンは配筋方向の軸力のみを負担する弾性線材として取り扱う。
- ④ x, y方向の個々の層のテンドンとコンクリートの間には、設置曲線に沿って付着すべりが生ずるものとし、任意の位置における或るテンドン層のすべり変位は、法線が保持されるコンクリート部分からの相対的なズレ変位で表示され、また、テンドン曲線に沿う付着応力とすべり変位の間には、線形関係が成り立つものとする。

のとする。

3 テンドンのすべりを考慮したPCスラブの有限要素解析

3-1 変位場、及び歪と応力

(1) 変位場

図1はPCスラブの断面記号とスラブ内部に配筋されている、xまたはy方向の任意のi層のPCテンドンの配置状況を図示したものである。前項の仮定よりこの問題を定式化するために設定しなければならない変位場は、通常のRCスラブの場合と同様、スラブ中央面内のxおよびy方向の変位u, vと、z方向の鉛直変位w、更にスラブ内のx, y方向にそれぞれ2次曲線を描いてk, m層ずつ配置されている全テンドン層のすべり変位 $S_{x1}, S_{x2} \cdots S_{xi} \cdots S_{xk}, S_{y1}, S_{y2} \cdots S_{yi} \cdots S_{ym}$ の計 $(3+k+m)$ 個の変位である。

(2) コンクリート部分の歪と応力

スラブの中央面からzだけ離れた任意点(x, y, z)のコンクリート部分の面内歪 $\{\epsilon_c\}$ は、次式で表される。

$$\{\epsilon_c\} = \{\epsilon_{cx}, \epsilon_{cy}, \gamma_{cxy}\}^T = \{\epsilon_0\} + z\{\phi\} \quad (1)$$

ここに、 $\{\epsilon_0\}$ はスラブ中央面の面内歪であるから、下式で与えられる。

$$\{\epsilon_0\} = \{\epsilon_{0x}, \epsilon_{0y}, \gamma_{0xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \quad (2)$$

また、(1)式中の $\{\phi\}$ はスラブの曲率であり次式で表示される。

$$\{\phi\} = \{\phi_x, \phi_y, \phi_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (3)$$

従って、同位置のコンクリートの応力 $\{\sigma_c\}$ は次のように表される。

$$\{\sigma_c\} = \{\sigma_{cx}, \sigma_{cy}, \tau_{cxy}\}^T = [D_c]\{\epsilon_c\} \quad (4)$$

ここに、 $[D_c]$ は平面応力下のコンクリートの応力-

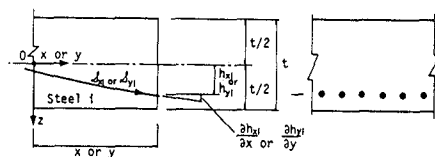


図1 PCスラブの断面記号とx, y方向の任意のテンドン層の配置状況

歪マトリックスで、

$$[D_c] = E_c / (1 - \nu^2) \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) / 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

但し、 E_c : コンクリートのヤング係数

ν : コンクリートのポアソン比

(3) テンドンの歪と応力

テンドン層については、スラブ断面内のxおよびy方向の任意のi層についてのみ記述する。

[x方向の任意のテンドン層i]

この層のテンドンの配置曲線方向の歪 ϵ_{sxi} は、次式で表示することができる。

$$\epsilon_{sxi} = \epsilon_{ox} + h_{xi} \phi_x + \epsilon_{sxi} \quad (6)$$

但し、 ϵ_{sxi} : x方向のi層のテンドンの設置曲線に沿うすべり率

上式中の記号 h_{xi} は、図1に示すようにスラブ中央面からこの層のテンドンまでの距離で、先の仮定よりxの2次関数として次のように書かれる。

$$h_{xi} = a_{xi} + b_{xi}x + c_{xi}x^2 \quad (7)$$

また、(6)式中のテンドンのすべり率 ϵ_{sxi} は、図2を参照すると次式で表される。

$$\epsilon_{sxi} = \frac{\partial S_{xi}}{\partial \Delta x_i} = \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \Delta x_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2}} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \quad (8)$$

従って、このx方向のi層のテンドンの応力 σ_{sxi} は、

$$\sigma_{sxi} = E_{sxi} \epsilon_{sxi} \quad (9)$$

[y方向の任意のテンドン層i]

y方向のi層のテンドンの歪と応力に関する諸式は、x方向のテンドンの場合と同様にして求められ、(6)~(9)式と相似な諸式は、それぞれ次のようになる。

$$\epsilon_{syi} = \epsilon_{oy} + h_{yi} \phi_y + \epsilon_{syi} \quad (10)$$

$$h_{yi} = a_{yi} + b_{yi}y + c_{yi}y^2 \quad (11)$$

$$\epsilon_{syi} = \frac{\partial S_{yi}}{\partial \Delta y_i} = \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Delta y_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2}} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \quad (12)$$

$$\sigma_{syi} = E_{syi} \epsilon_{syi} \quad (13)$$

3-2 膜力とモーメント

前項で得たコンクリート部分と、x,y両方向のテンドンの応力に関する諸式より、スラブ断面の膜力 $\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T$ とモーメント $\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ は、各々次のように表示することができる。

$$N_x = \int_{-z/2}^{z/2} \sigma_{cx} dz + \sum \{A_{xi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx})\}$$

$$N_y = \int_{-z/2}^{z/2} \sigma_{cy} dz + \sum \{A_{yi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} (\sigma_{syi} - h_{yi} \sigma_{cy})\} \quad (14)$$

$$N_{xy} = \int_{-z/2}^{z/2} \tau_{cxy} dz$$

$$M_x = \int_{-z/2}^{z/2} \sigma_{cx} z dz + \sum \{A_{xi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx})\}$$

$$M_y = \int_{-z/2}^{z/2} \sigma_{cy} z dz + \sum \{A_{yi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} (\sigma_{syi} - h_{yi} \sigma_{cy})\} \quad (15)$$

$$M_{xy} = \int_{-z/2}^{z/2} \tau_{cxy} z dz$$

但し、 A_{xi} 、 A_{yi} : x及びy方向の任意のi層のテンドンのスラブ単位面積当りの断面積

上式中の記号 h_{xi} と h_{yi} は、x及びy方向のi層のテンドンと同じ位置におけるコンクリートの対応する方向の応力で、テンドンによるコンクリート断面の欠損を考慮するために必要となるものである。

上の2式に(1)~(13)式の関係を代入して整理すると、膜力とモーメントは変位で表示され次のようになる。

$$N_x = \left[\frac{E_c t}{1 - \nu^2} + \sum \{A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2}\} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E_c t}{1 - \nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \sum \{A_{xi} E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2}\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum \{A_{xi} E_{sxi}\} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x}$$

$$N_y = \left[\frac{E_c t}{1 - \nu^2} + \sum \{A_{yi}^* E_{syi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2}\} \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu E_c t}{1 - \nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \sum \{A_{yi} E_{syi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2}\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum \{A_{yi} E_{syi}\} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y}$$

$$N_{xy} = \frac{E_c t}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$M_x = \sum \{A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2}\} \frac{\partial u}{\partial x} - \left[\frac{E_c t^3}{12(1 - \nu^2)} + \sum \{A_{xi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2}\} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\nu E_c t^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum \{A_{xi} E_{sxi} h_{xi}\} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x}$$

$$M_y = \sum \{A_{yi}^* E_{syi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2}\} \frac{\partial v}{\partial y} - \left[\frac{E_c t^3}{12(1 - \nu^2)} + \sum \{A_{yi}^* E_{syi} h_{yi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2}\} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\nu E_c t^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum \{A_{yi} E_{syi} h_{yi}\} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y}$$

$$M_{xy} = - \frac{E_c t^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

但し、 $A_{xi}^* = A_{xi} (1 - E_c / E_{sxi})$ 、 $A_{yi}^* = A_{yi} (1 - E_c / E_{syi})$

3-3 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

補強材の付着すべりを考慮した場合のコンクリート構造部材の全ポテンシャル・エネルギーは、次のように表される。

$$\Pi = U_{cn} + U_{st} + U_{bs} - V \quad (18)$$

ここに、 U_{cn} 、 U_{st} 、 U_{bs} は、それぞれコンクリート、テンドン、付着すべりに掛かる内部エネルギーであり、 V は外力のなす負荷ポテンシャル・エネルギーである。

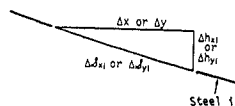


図2 δx_i 、 δh_{xi} 、 Δx 及び δy_i 、 δh_{yi} 、 Δy の関係

(1) 内部エネルギーU

内部エネルギーUのうちの $U_{e,x}$ と $U_{e,y}$ は、(1)~(13)の関係より容易にもとめられ次のようになる。

$$U_{e,x} = \frac{1}{2} \int_R \left[\sum_{i=1}^n A_{e,i} \varepsilon_{e,i}^2 \right] [D_e] \{ \varepsilon_e \} dz dx dy \\ - \frac{1}{2} \int_R \left[\sum_{i=1}^n A_{e,i} \varepsilon_{e,i}^2 \varepsilon_{e,i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \right] \\ + \sum_{i=1}^n A_{e,i} \varepsilon_{e,i}^2 \varepsilon_{e,i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \right] dx dy \quad (19)$$

$$U_{e,y} = \frac{1}{2} \int_R \left[\sum_{i=1}^n A_{e,i} \varepsilon_{e,i}^2 \varepsilon_{e,i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \right] \\ + \sum_{i=1}^n A_{e,i} \varepsilon_{e,i}^2 \varepsilon_{e,i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \right] dx dy \quad (20)$$

但し、 $\varepsilon_{e,i} \varepsilon_{e,i}$ 、 $\varepsilon_{e,i} \varepsilon_{e,i}$ ：x及びy方向のi層のテン

ドンと同じ位置のコンクリートの歪

また、基本仮定事項④より、x、y各方向の各 tendon 層の境界に生ずる付着応力とすべり変位の間には、次の関係が成立するから、

$$\tau_{bxi} = K_{bxi} S_{xi}, \quad \tau_{byi} = K_{byi} S_{yi} \quad (21)$$

但し、 τ_{bxi} 、 τ_{byi} ：x及びy方向の任意のi層の tendon の付着応力

K_{bxi} 、 K_{byi} ：x及びy方向の任意のi層の tendon の付着係数

従って、付着すべりに掛かる内部エネルギー $U_{b,s}$ は、下式で表示することができる。

$$U_{b,s} = \frac{1}{2} \int_R \left[\sum_{i=1}^n \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \right] \\ + \sum_{i=1}^n \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \right] dx dy \quad (22)$$

(2) 負荷ポテンシャル・エネルギーV

一方、図3,4に示すように、 C_i によって表されるスラブの境界上のx及びy方向に、境界側面の単位面積あたりの量で定義される面内分布外荷重 $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ が作用するものとする、このときの負荷ポテンシャル・エネルギーVは次式で与えられる。

$$V = \int_R q_x w dx dy + \int_C \{ \Omega_{xi} u + \Omega_{yi} v + \bar{M}_{xi} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{yi} \frac{\partial w}{\partial y} \} dx dy \quad (23)$$

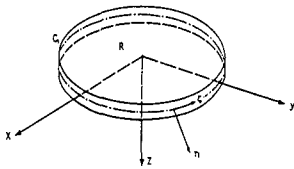


図3 スラブの境界と座標系

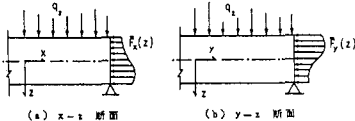


図4 スラブ境界側面に作用する分布荷重 $\bar{F}_x$ と $\bar{F}_y$

(3) 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

以上で得た(19),(20),(22),(23)式に、先の(1)~(13)式の関係を用いて整理すると、全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π は、次式のように表される。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_R \left[\frac{E_c t^3}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 E_c t}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ + \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ + \frac{E_c t}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ + \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \\ + \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{A_{e,i} E_{e,i}}{\sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2}} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right)^2 + \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \right\} \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{A_{e,i} E_{e,i}}{\sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2}} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right)^2 + \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \right\} \\ - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} \} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} \} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\ + 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} + 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} - 2 q_x w \} dx dy \\ - \int_C \{ \bar{M}_{xi} u + \bar{M}_{yi} v + \bar{M}_{xi} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{yi} \frac{\partial w}{\partial y} \} dx dy \quad (24)$$

(4) 近似仮定の導入と簡略化された汎関数

前項で得た(24)式の汎関数は、先に掲げた基本仮定事項に従う厳密なものであり、この式からは曲線 tendon を有するPCスラブの基礎微分方程式を導くこともできる。然し乍ら、この汎関数に基づいて有限要素法への展開を行おうとすると、剛性マトリックスの誘導が極めて複雑なものとなる。従ってここでは、有限要素展開を容易にするため、許容可能な以下の近似を導入することとする。

$$\sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial x)^2} = \sqrt{1 + (\partial h_{e,i} / \partial y)^2} = 1 \quad (25)$$

容易に指摘し得るように、この近似は各 tendon の設置曲線の傾きが微小であることを要求するものであるが、この種の近似が十分な妥当性をもつものであることは、既にPC梁に適用して確認済みである²。結果として先の汎関数は簡略化されて下式となる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_R \left[\frac{E_c t^3}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 E_c t}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ + \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{E_c t}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ + \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i}^2 \} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i}^2 \} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right)^2 + \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right)^2 + \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} - 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} h_{e,i} \} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\ + 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} + 2 \sum_{i=1}^n \{ A_{e,i} E_{e,i} \} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} - 2 q_x w \} dx dy$$

$$- \{c\} \{N_{xx}, u + N_{xy}, v + N_{yy}, \frac{\partial w}{\partial x} + M_{xx}, \frac{\partial w}{\partial y} + M_{xy}\} dx dy \quad (26)$$

3-4 有限要素法への定式化

(1) PCスラブ要素の変位関数と歪

本解析では矩形のPCスラブ要素を用いる。この要素の設定変位 $u, v, w, S_{xi} (i=1 \sim k), S_{yi} (i=1 \sim m)$ の各変位関数は、それぞれ以下のである。

[面内変形]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{Bmatrix} \{a_o\} = [f_o] \{a_o\} \quad (27)$$

但し、 $\{a_o\}$ ：面内変位の一般化変位

従って、要素内の面内歪 $\{\epsilon_o\}$ は下式で表される。

$$\{\epsilon_o\} = [b_o] [C_o] \{\delta_o\} \quad (28)$$

但し、 $[b_o]$ ：(27)式中の $[f_o]$ を微分して得られる

係数マトリックス、 $\{\delta_o\}$ ：節点変位ベクトル、 $[C_o]$ ：各節点の座標値を(27)式の $[f_o]$

に代入して得られる係数マトリックス

[曲げ変形]

$$W = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^3 \end{Bmatrix} \{a_b\} = [f_b] \{a_b\} \quad (29)$$

但し、 $\{a_b\}$ ：曲げ変形の一般化変位

また、回転各 θ_x, θ_y は、

$$\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [f_b] \{a_b\} \quad (30)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [f_b] \{a_b\} \quad (31)$$

従って、スラブの一般化歪 $\{\phi\}$ は次式で表示される。

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_b] & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f_b] & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f_b] \end{Bmatrix} \{a_b\} = [b_b] [C_b] \{\delta_b\} \quad (32)$$

但し、 $[C_b]$ ： $[C_o]$ の場合と同様にして求められる曲げに関する係数マトリックス、

$\{\delta_b\}$ ：変位成分 w, θ_x, θ_y に対応する節点変位ベクトル

[すべり変位]

x方向のテンドン層 i ：

$$S_{xi} = [1 \ x \ y \ xy] \{\alpha_{xi}\} = [f_x] \{\alpha_{xi}\} \quad (33)$$

但し、 $[f_x]$ ：全てのテンドン層に共通の形状関数

$\{\alpha_{xi}\}$ ：x方向のテンドン層 i のすべり変形の一般化変位

従って、x方向のテンドン層 i の配置曲線方向のすべり率 ϵ_{sxi} は、

$$\epsilon_{sxi} = [b_{sxi}] [C_s] \{\delta_{sxi}\} \quad (34)$$

但し、 $[b_{sxi}]$ ： $[f_x]$ を x で微分して得られる係数マトリックス

$\{\delta_{sxi}\}$ ：x方向の i 層のテンドンの節点すべり変位ベクトル

y方向のテンドン層 i ：

x方向のテンドンの場合と同様にして、うえの(33)、(34)式と相似な式が得られ次のようになる。

$$S_{yi} = [1 \ x \ y \ xy] \{\alpha_{yi}\} = [f_y] \{\alpha_{yi}\} \quad (35)$$

但し $\{\alpha_{yi}\}$ ：x方向のテンドン層 i のすべり変形の

$$\epsilon_{sxi} = [b_{sxi}] [C_s] \{\delta_{sxi}\} \quad (36)$$

但し、 $[b_{sxi}]$ ： $[f_y]$ を y で微分して得られる係数マトリックス

$\{\delta_{sxi}\}$ ：y方向の i 層のテンドンの節点すべり変位ベクトル

(2) 有限要素方程式

前項で得た各式と(26)式の汎関数より、曲線テンドンを有するPCスラブの解析のための有限要素方程式が得られ、下式となる。

$$\begin{Bmatrix} K_{oo} & K_{ob} & K_{ox} & K_{oy} \\ K_{bo}^T & K_{bb} & K_{bx} & K_{by} \\ K_{xo}^T & K_{xb}^T & K_{xx} & 0 \\ K_{yo}^T & K_{yb}^T & 0 & K_{yy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_b \\ \delta_{sx} \\ \delta_{sy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_b \\ P_{sx} \\ P_{sy} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

但し、 $\{\delta_{sx}\}$ ：x方向の全テンドン層の付着すべりに関する節点変位ベクトル

$\{\delta_{sy}\}$ ：y方向の全テンドン層の付着すべりに関する節点変位ベクトル

$\{P_o\}$ ：変位 u, v に対応する面内外荷重ベクトル

$\{P_b\}$ ：変位 w, θ_x, θ_y に対応する曲げ外荷重ベクトル

$\{P_{sx}\}$ ：x方向の全テンドン層に関する緊張外荷重ベクトル

$\{P_{sy}\}$ ：y方向の全テンドン層に関する緊張外荷重ベクトル

4 おわりに

本報では、曲線テンドンを有するPCスラブの、テンドンの付着すべりを考慮した場合の有限要素展開について論じた。尚、実際の数値計算例については、当日、講演会場で報告する予定である。

[参考文献]

- 1) 上田正生、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリートはり部材の曲げ変形解析、土木学会論文集、No.372号/V-5、1986-8
- 2) Ueda, M., Sugimoto, A., Hirose, M.: Finite Element for Evaluation of Stiffness of Prestressed Concrete Beams of Post-Tensioned Type, Transaction of the Japan Concrete Institute, Vol.10, 1988