

I-16 有限領域にある Inclusion 周辺の応力解析

室蘭工業大学

"

日本大学

正員 松岡 健一

" 岸 徳光

" 能町 純雄

1. はじめに

建設材料として多く用いられているコンクリート材料は、セメントペースト（又はモルタル）と骨材からなる複合材料であり、その変形特性は複雑である。コンクリート構造物の終局強度までを含めた合理的な設計理論の確立に当っては、コンクリート材料の変形特性を明らかにすることは必須条件であり、これに関する研究は現在各方面で盛んに行なわれている。

コンクリート材料の変形特性は、セメントペースト（又はモルタル）と骨材の相互作用により大きく影響されるが、この種の問題はモデル化すれば介在物問題（Inclusion Problems）に帰着する。

一方、介在物問題については、古くから2次元、3次元問題として、弾性論に基づいた解析が数多く行なわれており、塑性解析も若干行われている。

古典的な介在物問題としては、一軸又は二軸応力下にある無限弾性体中の球又は円柱周辺の応力集中があるが、これについてはSezawaとNishimura¹⁾、Goodier²⁾やEdwards³⁾により早くに解析されている。

その後、複数の介在物の影響^{4) 5)}、介在物周辺のcrackの影響^{6) 7)}や塑性材料中の介在物の影響等^{8) 9)}多くの研究がある。しかし、理論解析は無限弾性体を対象にしたものに限られ、有限領域の問題や非線形解析は有限要素法等数値解析が主体である。有限要素法は、複雑な条件のもとでの応力解析に適した方法として有効であるが近似解法である以上、常に何らかの厳密解との検証の上で利用しなければならない。特に、介在物問題は応力集中問題でありこの種の急激な応力変化を含む問題に対しては十分なcheckが必要であろう。

しかし、有限領域を対象とした介在物問題を理論的に扱った研究はほとんど見当たらない。本論文では、有限領域問題の簡単なものとして、円形有限領域中にある円形介在物周辺の応力解析を理論的に扱った。円形領域の境界での応力や変形を仮定し、主として介在物の大きさによる応力集中の変化を検討した。

2. 解析モデル

コンクリート材料は、セメントペースト（又はモルタル）と骨材が at random に混り合ったものであるが、理想化して考えれば骨材はFig. 1のように配列しているものと考えられる。これらが軸方向力を受けて変形すると介在物周辺に局部的な応力の不均衡が生ずるが、その変形はいずれもx軸およびy軸に対して対象変形となり4辺形ABCD (Fig. 1)を単位として考えれば、その変形は、Fig. 2 (a), (b)のように考えられる。

ここではこれをFig. 2 (C)のような円形領域に置き換え、円形境界での応力分布または変位分布を仮定した場合の解析

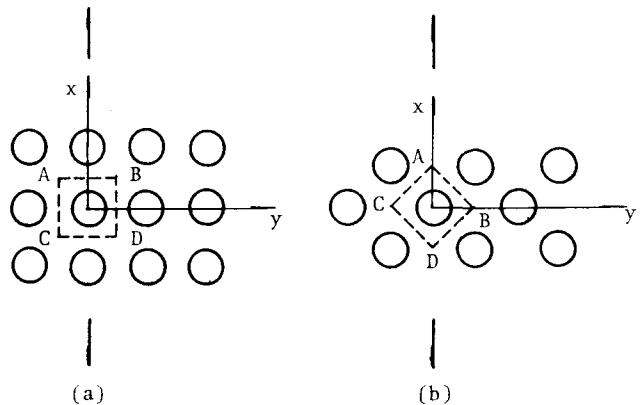


Fig. 1 A composite containing uniformly distributed circular inclusions

を行なう。

A) 応力分布を仮定する場合

介在物が存在しないとき、円形領域内で一様な一軸方向力 ($\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$) が与えられている場合を考え、円形外境界の応力分布を次のように仮定する。

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta$$

σ_0 = 軸方向力

B) 変位分布を仮定する場合

介在物が存在しないとき、円形領域内で一様な変位分布 ($u_x = \varepsilon_0 x$, $u_y = -\nu_0 \varepsilon_0 y$) をする場合を考え、円形外境界の変位分布を次のように仮定する。

$$u_r = \frac{\varepsilon_0 r}{2}(1 - \nu_0) + \frac{\varepsilon_0 r}{2}(1 + \nu_0) \cos 2\theta$$

$$u_\theta = -\frac{\varepsilon_0 r}{2}(1 + \nu_0) \sin 2\theta$$

ε_0 : 軸方向歪、 ν_0 : ポアソン比

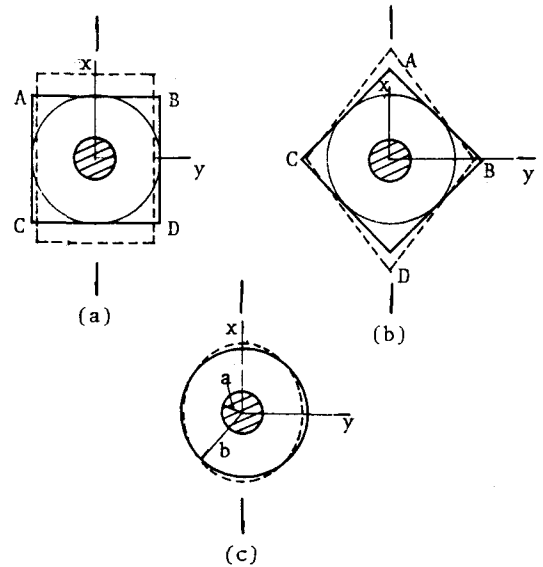


Fig. 2 An analytic model

3. 解析理論

この問題の解析方法はいろいろ考えられるが、ここでは、極座標で表わされている二次元応力問題の基本方程式をFourier-Hankel変換を用いて解析する方法を採用した。結果のみを示せば次のようになる。

$$u_{rj} = \frac{1}{\pi} \{ A_0 r_j + \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{A}_{mrj} + \tilde{B}_{mrj}) \cos m\theta \} \quad (1)$$

$$u_{\theta j} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{A}_{mrj} - \tilde{B}_{mrj}) \sin m\theta \quad (2)$$

円筒形領域に対して ($j = 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr1} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a^{2m} b^{2m}}{b^{2m} - a^{2m}} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{3\mu_1 + \lambda_1} \cdot \frac{a k^{2-m}}{r^{m+1}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{mk} + \frac{1}{2} \beta_{mk} + (2m\mu_1 - \mu_1 - \lambda_1) A_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. - (\mu_1 + \lambda_1) B_{mk} \right\} + f_{mp}^{(w)}(r) \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \alpha_{mk} + \frac{1}{2(2\mu_1 + \lambda_1)} \beta_{mk} + \frac{3\mu_1 + \lambda_1}{2\mu_1 + \lambda_1} (m+1) A_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{2\mu_1 + \lambda_1} (m-1) B_{mk} \right\} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr1} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{b^{2m} a^{2m}} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{3\mu_1 + \lambda_1} \cdot r^{m-1} \cdot a k^{m+2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{mk} + \frac{1}{2} \beta_{mk} + (\mu_1 + \lambda_1) A_{mk} \right. \right. \\ & \left. \left. + (2m\mu_1 + \mu_1 + \lambda_1) B_{mk} \right\} + f_{ms}^{(w)}(r) \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \alpha_{mk} - \frac{1}{2(2\mu_1 + \lambda_1)} \beta_{mk} + \frac{\mu_1 + \lambda_1}{2\mu_1 + \lambda_1} (m+1) \right. \right. \\ & \left. \left. A_{mk} + \frac{3\mu_1 + \lambda_1}{2\mu_1 + \lambda_1} (m-1) B_{mk} \right\} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

$$A_0 r = \frac{ab}{b^2 - a^2} \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) A_{01} - \frac{ab}{b^2 - a^2} \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) A_{02} \quad (5)$$

$$f_{mp}^{(k)}(r) = \frac{a^m b^m}{b^{2m} - a^{2m}} \left\{ \frac{a^{k-1}}{2(m+1)} \left(\frac{r}{a^{k-1}} \right)^{m+1} - \frac{a^{k-1}}{2} \left(\frac{a^{k-1}}{r} \right)^{m-1} + (1)^k \cdot \frac{2m a^{2m} b^{2m}}{(b^{2m} - a^{2m})^2} \right. \\ \left. - \frac{(f^2 - a^2)}{4(m+1)} \left(\frac{a^k}{a^{k-1}} \right)^m + \frac{1}{4(m-1)} \left(\frac{a^m b^2}{b^m} - \frac{a^2 b^m}{a^m} \right) \right\} \frac{1}{r} \left(\frac{a^{k-1}}{r} \right)^m \quad (6)$$

$$f_{ms}^{(k)}(r) = \frac{a^m b^m}{b^{2m} - a^{2m}} \left\{ \frac{a^{k-1}}{2} \left(\frac{r}{a^{k-1}} \right)^{m+1} + \frac{a^{k-1}}{2(m-1)} \left(\frac{a^{k-1}}{r} \right)^{m-1} - (-1)^k \cdot \frac{2m a^{2m} b^{2m}}{(b^{2m} - a^{2m})^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{4(m+1)} \left(\frac{a^{m+2}}{b^m} - \frac{b^{m+2}}{a^m} \right) + \frac{a^2 - b^2}{4(m-1)} \left(\frac{a^k}{a^{k-1}} \right)^m \right\} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{a^{k-1}} \right)^m \quad (7)$$

円形介在物に対して ($j = 2$)

$$\tilde{A}_{mr2} = f_{mp}(r) \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \alpha_m - \frac{1}{2(2\mu_2 + \lambda_2)} \beta_m + \frac{3\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} (m+1) A_m + \frac{\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} (m-1) B_m \right\} \quad (8)$$

$$\tilde{B}_{mr2} = \frac{1}{3\mu_2 + \lambda_2} \left(\frac{r}{a} \right)^{m-1} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_m - \frac{1}{2} \beta_m + (\mu_2 + \lambda_2) A_m + (2m\mu_2 + \mu_2 + \lambda_2) B_m \right\} \\ - f_{ms}(r) \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \alpha_m - \frac{1}{2(2\mu_2 + \lambda_2)} \beta_m + \frac{\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} (m+1) A_m + \frac{3\mu_2 + \lambda_2}{2\mu_2 + \lambda_2} (m-1) B_m \right\} \quad (9)$$

$$\tilde{A}_{0r2} = \left(\frac{r}{a} \right) A_0 \quad (10)$$

$$f_{mp}(r) = \frac{a}{2(m+1)} \left(\frac{r}{a} \right)^{m+1} \quad (11)$$

$$f_{ms}(r) = \frac{a}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^{m+1} - \frac{ma}{2(m+1)} \left(\frac{r}{a} \right)^{m-1} \quad (12)$$

ここで、 α , β , A , B は境界の物理量として与えられる積分定数であり、 A_m , B_m , A_m , B_m は次の条件を満足していなければならない。

$$A_m = a \tilde{A}_{mr1} \quad r=a \quad k=1, 2 \quad (13) \quad B_m = a \tilde{B}_{mr1} \quad r=a \quad k=1, 2 \quad (14)$$

$$A_m = a \tilde{A}_{mr2} \quad r=a \quad (15) \quad B_m = a \tilde{B}_{mr2} \quad r=a \quad (16)$$

ただし、 a は円形介在物の半径、 b は円筒領域の外半径である。

また、 μ_1 , λ_1 , μ_2 , λ_2 はそれぞれ円筒領域と円形介在物のLame定数であり、 $a_1 = b$, $a_2 = a$, $a_0 = a$ とする。なお、 m は Fourier変換の次数である。

4. 境界条件

円形外境界では2の仮定を満足しなければならない。したがって、 m は0に相当する初項と $m=2$ のもののみを考慮すればよい。

円形介在物と弾性媒体との接触面の条件は種々考えられるがここでは、変位および応力は連続するものとする。また、弾性媒体の外周では2のように仮定するものとする。

すなわち、

i) $r = a$ で

$$u_{r1}(r=a) = u_{r2}(r=a), \quad u_{\theta,1}(r=a) = u_{\theta,2}(r=a) \\ \sigma_{r1}(r=a) = \sigma_{r2}(r=a), \quad \tau_{r\theta,1}(r=a) = \tau_{r\theta,2}(r=a)$$

ii) $r = b$ で

A) の場合

$$\sigma_{r1})_{r=b} = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\tau_{r\theta 1})_{r=b} = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta$$

B) の場合

$$u_{r1})_{r=b} = \frac{\varepsilon_0 b}{2} (1 - \nu_0) + \frac{\varepsilon_0 b}{2} (1 + \nu_0) \cos 2\theta$$

$$u_{\theta 1})_{r=b} = -\frac{\varepsilon_0 b}{2} (1 + \nu_0) \sin 2\theta$$

ここで、 ν_0 は弾性媒体と円形介在物のポアソン比をそれぞれ ν_1 , ν_2 とするとき

$$\nu_0 = \{ (b^2 - a^2) \nu_1 + \nu_2 a^2 \} / b^2$$

で表われるものとする。

5. 数値解析

ここでは、弾性媒体のヤング率およびポアソン比をそれぞれ $E_1 = 13790 \text{ N/mm}^2$, $\nu_1 = 0.2$ また、円形介在物のそれらを $E_2 = 34475 \text{ N/mm}^2$, $\nu_2 = 0.26$ とし、 b/a を変化させ、主として介在物境界の弾性媒体の応力に注目し解析を行なった。

結果を Fig. 3 及び Fig. 4 に示す。図はいずれも横軸に b/a をとり、縦軸は介在物が存在しないとしたときの x 方向応力と介在物境界における弾性媒体の応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ の最大値及び、 $\theta = 45^\circ$ の最大・最小主応力の比を示している。

いずれも b/a が大きくな

るに従い、無限体中に円形介在物が存在する場合の値に近づいている。

Fig. 3 は円形外境界で応力分布を仮定した場合 (A) であるが、この場合 $\sigma_{r \max}$ 及び σ_1 は b/a が小さいとき 1.0 付近の値を与え、 b/a が大きくなるに従い増加し、無限体の場合に近づいている。 $\sigma_{\theta \max}$, $\tau_{r\theta \max}$ については、多少の変化はあるもののほぼ一定に近い。また、 $\theta = 45^\circ$ のとき最小主応力が負になり、作用応力とは逆の応力が生ずることは、無限体中の介在物問題と同様であるが、 b/a が小さい時絶対値が約 50% 増加する様子がうかがえる。 $b/a > 5.0$ では、各応力ともほぼ無限体の場合と同じ値であり、この範囲では無限領域を仮定しても良いと思われる。

一方、Fig. 4 は円形外境界で変位分布を仮定した場合 (B) であるが、この場合 b/a の小さな範囲で (A) の場合とは異なり、かなりの応力集中が見られる。 $\sigma_{r \max}$, $\sigma_{\theta 1 \max}$, $\tau_{r\theta \max}$, σ_1 については (A) の場合

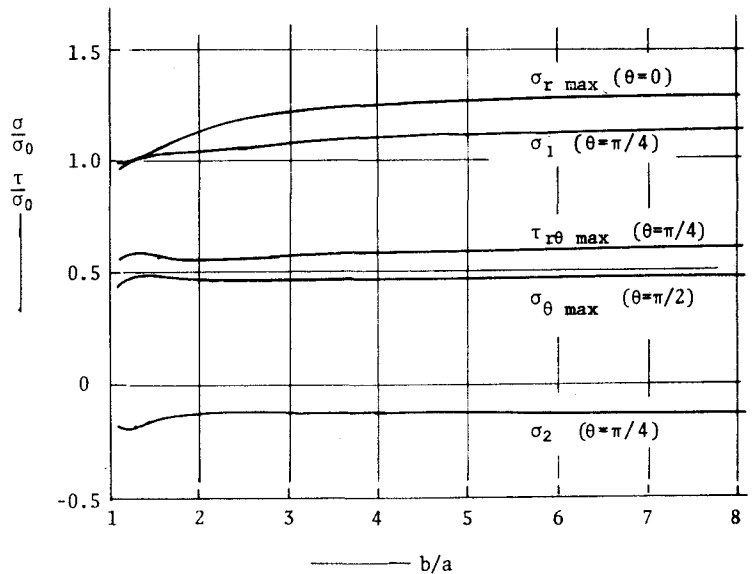


Fig. 3 Stress intensity factor of elastic body at interface of inclusion (uniaxial stress state)

の約2倍になっており、 b/a が大きくなるに従い(A)と同様、一軸応力を受ける介在物を有する無限体の値に近づいている。また、この場合も $\theta=45^\circ$ における小主応力 σ_2 は負の値をとるが、絶対値は(A)に比べて小さく、 b/a が小さいときの増加もそれ程大きくはない。この場合は、 $b/a=5.0$ 付近ではまだ無限体の場合に比べ多少増加しており、 $b/a>7.0$ くらいで無限体の場合とほぼ等しくなっている。

6. まとめ

以上、円形介在物を有する円形有限領域の応力集中問題を、円形外境界で応力分布が与えられる場合と変位分布が与えられる場合について解析し、無限領域との相違を検討した。この結果

- 1) 応力分布を仮定する場合
 b/a が小さい時最小

主応力の絶対値に約50%の増加が見られる。

- 2) 変位分布を仮定する場合、やはり b/a が小さい時最小主応力を除く応力が無限体の場合に比べ約60~80%の増加が見られる。

ことが解った。

この解析は円形領域を仮定しているので、コンクリート材料などの実際の場合とは b/a の小さな場合、必ずしも一致しないが、コンクリート材料などをFig-2のようにモデル化すれば(B)の場合の解析は必要であり、本解析でもある程度傾向を知ることができるものと思われる。

※ 参考文献

- 1) Sezawa, K. and Nishimura, G.; Stresses under Tension in a Plate with a Heterogeneous Insertion, Rep. Aero. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ., Vol. 6, No. 68 (1932) pp. 25-43.
- 2) Goodier, J. N.; Concentration of Stress Around Spherical and Cylindrical Inclusions and Flaws, J. Appl. Mech., Vol. 1 (1933) pp. 39-44.
- 3) Edwards, R. H.; Stress Concentrations Around Spheroidal Inclusions and Cavities, J. Appl. Mech., Vol. 18 (1951) pp. 19-30.
- 4) Shioya, S.; On the Tension of an Infinite Thin Plate Containing a Pair of Circular Inclusions,

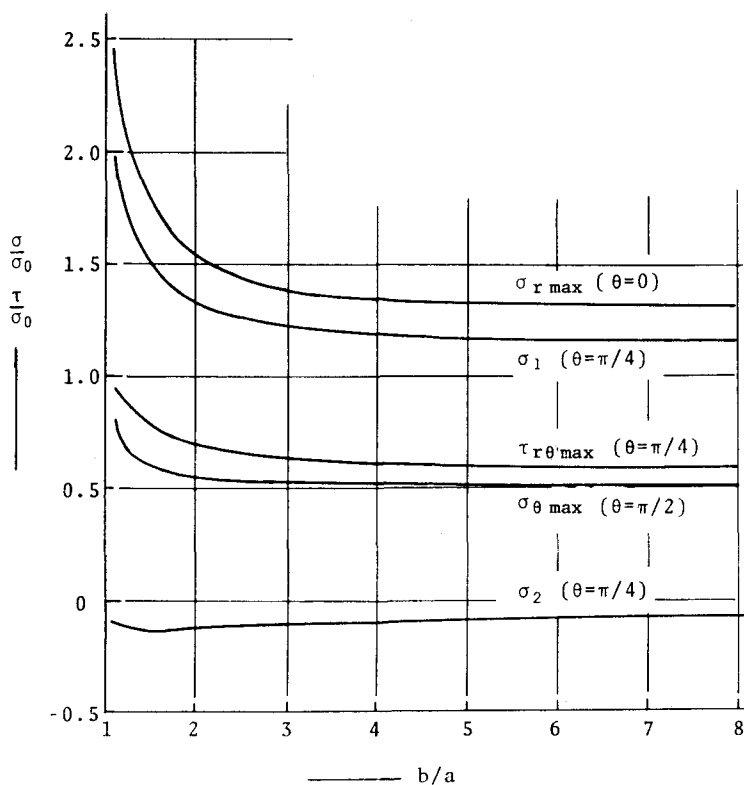


Fig. 4 Stress intensity factor of elastic body at interface of inclusion (uniaxial strain state)

Bull.JSME, Vol.14 (1971) pp.117-126.

- 5) Goree, J.G.; In-Plane Loading in an Elastic Matrix Containing Two Cylindrical Inclusions, J. Comp.Mat., Vol.1 (1967) pp.404-412
- 6) England, A.H.; An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion, J.Appl.Mech., Vol.33 (1966) pp. 637-641.
- 7) Viola, E. and Piva, A.; Fracture Behavior by Two Cracks Around an Elliptic Rigid Inclusion, Eng. Frac.Mech., Vol.15 (1981) pp.303-325.
- 8) Orr, J. and Brown, D.K.; Elasto-Plastic Solution for a Cylindrical Inclusion in a Plane Strain, Eng.Frac.Mech., Vol.6 (1974) pp.261-274.
- 9) Thomson, R.D. and Hancock, J.W.; Local Stress and Strain Fields Near a Spherical Elastic Inclusion in a Plastically Deforming Matrix, Int.J.Frac., Vol.24 (1983) pp.209-226.