

I-15 周辺固定の横等方性円形厚板の軸対称曲げ

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒言

板厚が比較的大きい厚板に関する研究は、Reissner¹⁾及びMindlin²⁾に代表される様に、せん断変形の効果を導入して、薄板の曲げ理論を補正することから始まり、現在では、Lo³⁾に見られる高次理論と呼ばれる解法にまで発展している。長い間、攻勢を極めた厚板の曲げ理論も、最近は余り見受けられなくなり、等方性厚板の曲げに関しては、一応、峠を越えた感がある。これからの厚板理論は、異方性厚板に向うものと考えられるが、現時点でも、アムバルツミヤン⁴⁾及びSonoda及びHorikawa⁵⁾による研究が幾つか見受けられる。異方性厚板の場合には、座標系が異なるだけで、難度が著しく異なり、現在でも、横等方性及び円柱異方性(極異方性)円形或いは円環厚板などは、解析されていない様である。等方性円形或いは円環厚板に関しては、著者・本多及び芳村⁶⁾がLove理論⁷⁾の一改良理論を提案し、扇形厚板を解析している。この改良理論は、異方性体に関する同次解及び特殊解(3次元弾性解)が求められていれば、異方性厚板の曲げにそのまま適用できる理論であるが、異方性体に関する同次解及び特殊解を弾性論的に厳密に求めることが相当にむずかしく、この理論の適用性を大きく制限している。著者は、先に、異方性体の中でも弾性解が比較的容易に得られる横等方性体の3次元弾性解として、一般化されたElliottの解⁸⁾及び横等方性円形厚板の平面応力解・一般化平面応力解⁹⁾を求めた。

本研究は、上述した解を特殊解及び同次解として用いたLove理論により、周辺固定の横等方性円形厚板の軸対称曲げを解析するものである。横等方性材料としては、Magnesium結晶及びCadmium結晶が用いられ、等方性材料との比較により、異方性の効果が吟味されている。また、横等方性材料の場合には、応力の値に及ぼす板厚比の効果がいかなるかは、工学的に興味のあることであり、これについても検討されている。

2. 特殊解

Love理論によれば、板の上、下面における荷重条件を満たすために、特殊解が必要になる。この特殊解として、著者の提案による一般化されたElliottの解⁸⁾を用いる。横等方性円形厚板の座標系を図-1に示した様に取り、円柱座標 (r, θ, z) における変位成分を u_r, u_z 及び応力成分を $\sigma_{rr}, \dots, \sigma_{zr}$ と表わす。軸対称問題の場合には、その解は、次の様に表わされる。

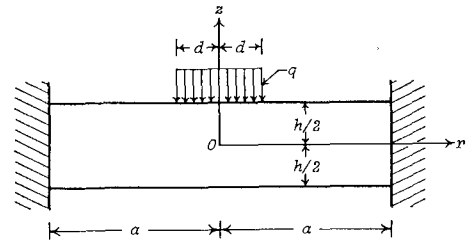


図-1 円形厚板の座標系

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_{01} + \phi_{02} + r_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - r_2 \phi_1 - r_3 \phi_3 \right] \quad (1.a)$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 (\phi_{01} - r_3 \phi_1) + k_2 (\phi_{03} - r_2 \phi_3) + r_1 \left(k_1 r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + k_2 z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right] \quad (1.b)$$

ここで、

$$\nabla_1^2 \phi_{01} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_{03} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_{03}}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_1 + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_3 + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.a \sim d)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & [\nu_1 = \nu_2] \\ 0 & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} \frac{2c_{11}\nu_2}{c_{11}\nu_2 - c_{44}} & [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \cdot \frac{c_{11}\nu_1 - c_{44}}{c_{11}\nu_2 - c_{44}} & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} 0 & [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} [\nu_1 \neq \nu_2] & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases} \quad (3.a \sim c)$$

また, c_{11} , ..., c_{44} を弾性定数, ν_1 及び ν_2 を, 次の二次方程式

$$c_{11}c_{44}\nu^2 + [c_{13}(c_{13}+2c_{44}) - c_{11}c_{33}]\nu + c_{33}c_{44} = 0 \quad (4)$$

の二つの根, k_1 及び k_2 を次式に示すパラメーターとする。

$$k_1 = \frac{c_{11}\nu_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad k_2 = \frac{c_{11}\nu_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \quad (5.a, b)$$

ポテンシャル関数 ϕ_{01} 及び ϕ_1 は, 厚板の特殊解としては不要なので除外し, ϕ_{03} 及び ϕ_3 を式 (2.b, d) から求めると次式となる。

$$\phi_{03} = \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\alpha_s r) (A_s^{(1)} \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_2}} + L_s^{(1)} \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_2}}) \quad (6.a)$$

$$\phi_3 = \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\alpha_s r) (C_s^{(1)} \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} + M_s^{(1)} \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}}) \quad (6.b)$$

ここで, $A_s^{(1)}$, ..., $M_s^{(1)}$ は, 荷重条件によって定められる未定定数であり, 助変数 α_s は, $\alpha_s = \lambda_s/a$ である。

式 (6.a, b) を式 (1.a, b) に代入すると, 変位成分の表現が得られる。その変位成分からひずみ成分を求め, 横等方性体に関する一般化されたHookeの法則を用いると, 応力成分の表現がそれぞれ得られる。一例として, 垂直応力 $\sigma_{zz}^{(1)}$ 及びせん断応力 $\sigma_{zr}^{(1)}$ について示せば, 次のとおりである。

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)} = & \sum_{s=1}^{\infty} (-\alpha_s^2) J_0(\alpha_s r) \{ A_s^{(1)} (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_2}) \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_2}} + L_s^{(1)} (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_2}) \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_2}} \\ & + C_s^{(1)} [\tau_1 (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_1}) \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} - \{ c_{13} \tau_3 + c_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\tau_1 - \tau_2) \} \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}}] \\ & + M_s^{(1)} [\tau_1 (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_1}) \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} - \{ c_{13} \tau_3 + c_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\tau_1 - \tau_2) \} \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}}] \} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^{(1)} = & c_{44} \sum_{s=1}^{\infty} (-\frac{\alpha_s^2}{\sqrt{\nu_2}}) J_1(\alpha_s r) \{ A_s^{(1)} (1+k_2) \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_2}} + L_s^{(1)} (1+k_2) \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_2}} \\ & + C_s^{(1)} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} [\{ \tau_1 (1+k_2) - (k_2 \tau_2 + \tau_3) \} \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} + \tau_1 (1+k_2) \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}}] \\ & + M_s^{(1)} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} [\{ \tau_1 (1+k_2) - (k_2 \tau_2 + \tau_3) \} \cosh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} + \tau_1 (1+k_2) \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}} \sinh \frac{\alpha_s Z}{\sqrt{\nu_1}}] \} \quad (8) \end{aligned}$$

3. 同次解

特殊解のみでは, 板の周辺の境界条件を満足できないので, 同次解が必要になる。その同次解として, 著者がすでに求めた横等方性円形厚板の平面応力解・一般化平面応力解⁹⁾を用いる。

3.1 平面応力解 非軸対称解を, $m=0$ と固定して, 軸対称解に変換すると, 軸対称問題の平面応力解は, 次式となる。

$$u_r^{(0,1)} = F_1 \cdot 2\tau_5 (\nu_1 \tau_6 - 1)r, \quad u_z^{(0,1)} = -F_1 \cdot 4\tau_5 \tau_6 k_1 z \quad (9.a, b)$$

$$\sigma_{rr}^{(0,1)} = -F_1 \cdot 2\tau_5 \{ c_{11} + c_{12} - \tau_6 [\nu_1 (c_{11} + c_{12}) - 2c_{13} k_1] \} \quad (9.c)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0,1)} = -F_1 \cdot 2\tau_5 \{ c_{12} + c_{11} - \tau_6 [\nu_1 (c_{12} + c_{11}) - 2c_{13} k_1] \} \quad (9.d)$$

$$\sigma_{zz}^{(0,1)} = \sigma_{zr}^{(0,1)} = 0 \quad (9.e)$$

ここで, F_1 は, 境界条件によって定められる未定定数であり, τ_5 及び τ_6 は, 次式に示す係数である。

$$\tau_5 = \frac{c_{44}}{c_{11}\nu_2 - c_{44}}, \quad \tau_6 = \frac{c_{13}}{c_{13}\nu_1 - c_{33}k_1} \quad (10.a, b)$$

3.2 一般化平面応力解 非軸対称解を, $m=0$ と固定して, 軸対称解に変換すると, 軸対称問題の一般化平面応力解は, 次式となる。

$$u_r^{(0,2)} = -C_1 (\frac{\nu_2}{\nu_1}) \cdot 2\tau_5 z (\nu_2 \tau_7 - 1)r \quad (11.a)$$

$$u_z^{(0,2)} = A_1 - C_1 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right) \tau_5 k_2 \{ r^2 (\nu_2 \tau_7 - 1 + \nu_1 \frac{c_{11}}{c_{44}}) + \frac{h^2}{2k_2} [\tau_7 (1+k_2) - \frac{c_{11}}{c_{44}}] - 2\tau_7 z^2 \} \quad (11.b)$$

$$\sigma_{rr}^{(0,2)} = -C_1 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right) \cdot 2\tau_5 z \{ \tau_7 [\nu_2 (c_{11} + c_{12}) - 2c_{13} k_2] - (c_{11} + c_{12}) \} \quad (11.c)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0,2)} = -C_1 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right) \cdot 2\tau_5 z \{ \tau_7 [\nu_2 (c_{12} + c_{11}) - 2c_{13} k_2] - (c_{12} + c_{11}) \} \quad (11.d)$$

$$\sigma_{zz}^{(0,2)} = \sigma_{zr}^{(0,2)} = 0 \quad (11.e)$$

ここで、 C_1 及び A_1 は、境界条件によって定められる未定定数であり、 τ_7 は、次式に示す係数である。

$$\tau_7 = \frac{c_{13}}{c_{13} \nu_2 - c_{33} k_2} \quad (12)$$

4. 荷重条件及び境界条件

板の上面に同心円状に分布する部分荷重を受け、下面が自由の円形厚板を考えると、荷重条件は、次式となる。

$$z = h/2 \text{ において, } \sigma_{zr} = 0, \sigma_{zz} = -p(r) \quad (13.a, b)$$

$$z = -h/2 \text{ において, } \sigma_{zr} = 0, \sigma_{zz} = 0 \quad (14.a, b)$$

ここで、

$$p(r) = \begin{cases} q & [0 \leq r < d] \\ 0 & [d < r \leq a] \end{cases} \quad (15)$$

また、板の周辺を固定とすると、境界条件は、次式となる。

$$r = a \text{ において, } (u_r)_{z=0} = 0, (u_z)_{z=0} = 0, (\partial u_r / \partial z)_{z=0} = 0 \quad (16.a \sim c)$$

荷重条件を特殊解に課す前に、式 (15) の荷重関数 $p(r)$ を Bessel の級数に展開しておく必要がある。直交関係を用いて、Bessel 展開すると、式 (15) は次の様に表わされる。

$$p(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s J_0(\alpha_s r) \quad (17)$$

ここで、

$$e_s = 2q \left(\frac{d}{a} \right) \frac{J_1(\lambda_s d/a)}{\lambda_s J_1^2(\lambda_s)}, \lambda_s = J_0(\lambda_s) \text{ の zero's} \quad (18.a, b)$$

5. 未定定数の決定

式(17)を式 (13.b) の右辺に代入し、式 (13.a, b) 及び式 (14.a, b) の荷重条件を式 (7) 及び式 (8) に課すと、未定定数が次の様に求められる。

$$\begin{aligned} C_s^{(1)} &= \frac{e_s}{\alpha_s^2} \cdot \frac{1}{2a_1 \sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))}, A_s^{(1)} = -\frac{e_s}{\alpha_s^2} \cdot \frac{a_2}{2 \sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))}; \\ M_s^{(1)} &= \frac{e_s}{\alpha_s^2} \cdot \frac{1}{2b_1 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))}, L_s^{(1)} = -\frac{e_s}{\alpha_s^2} \cdot \frac{b_2}{2 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} \end{aligned} \quad (19.a \sim d)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\tau_1 \alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_1}) - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_2}) \coth \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_2}} [\tau_1 (1 + \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} \coth \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}}) - \frac{k_2 \tau_2 + \tau_3}{1+k_2}] \\ &\quad - [c_{13} \tau_3 + c_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\tau_1 - \tau_2)] \coth \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} \end{aligned} \quad (20.a)$$

$$a_2 = \frac{1}{a_1 \sqrt{\nu_1}} [\tau_1 (1 + \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} \coth \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}}) - \frac{k_2 \tau_2 + \tau_3}{1+k_2}] \quad (20.b)$$

$$b_1 = \frac{\tau_1 \alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_1}) - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (c_{13} - c_{33} \frac{k_2}{\nu_2}) \tanh \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_2}} [\tau_1 (1 + \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} \tanh \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}}) - \frac{k_2 \tau_2 + \tau_3}{1+k_2}]$$

$$- [c_{13}\tau_3 + c_{33}\frac{k_2}{\nu_1} (2\tau_1 - \tau_2)] \tanh \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} \quad \dots\dots\dots (20.c)$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} [\tau_1 (1 + \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}} \tanh \frac{\alpha_s h}{2\sqrt{\nu_1}}) - \frac{k_2 \tau_2 + \tau_3}{1 + k_2}] \quad \dots\dots\dots (20.d)$$

式 (19.a~d) により, 特殊解の未定数は, すべて, 厳密に求められたことになる。最初に得られていた特殊解に, 式 (19.a~d) を代入すると, 例えば $u_r^{(1)}$ 及び $u_z^{(1)}$ は, 次の様に表わされる。

$$u_r^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e_s}{2\alpha_s} J_1(\alpha_s r) [a_2 \frac{\cosh(\alpha_s z / \sqrt{\nu_2})}{\sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \frac{1}{a_1 \sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))} (\tau_1 \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} - \tau_3 \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}}) + b_2 \frac{\sinh(\alpha_s z / \sqrt{\nu_2})}{\cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \frac{1}{b_1 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))} (\tau_1 \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} - \tau_3 \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}})] \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$u_z^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-\frac{k_2 e_s}{2\alpha_s \sqrt{\nu_2}}) J_0(\alpha_s r) \{a_2 \frac{\sinh(\alpha_s z / \sqrt{\nu_2})}{\sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \frac{1}{a_1 \sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} [(\tau_1 - \tau_2) \times \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} + \tau_1 \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}}] + b_2 \frac{\cosh(\alpha_s z / \sqrt{\nu_2})}{\cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \frac{1}{b_1 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))} \times \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} [(\tau_1 - \tau_2) \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} + \tau_1 \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{\nu_1}}]\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式 (21) に見る様に, $u_r^{(1)}$ は, 式 (16.a, c) の境界条件を満足していない。この境界条件を満たすために, 式 (9.a, b), (11.a, b), (21) 及び式 (22) をそれぞれ加え, 式 (16.a~c) の境界条件を課すと, 式 (16.a), (16.b) 及び式 (16.c) から, 順次, 次の三つの方程式を得る。

$$F_1 \cdot 2\tau_5 (\nu_1 \tau_6 - 1) a + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a e_s}{2\lambda_s} J_1(\lambda_s) [\frac{a_2}{\sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} + \frac{\tau_3}{a_1 \sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))}] = 0 \quad \dots\dots\dots (23.a)$$

$$A_1 - C_1 (\frac{\nu_2}{\nu_1}) \tau_5 k_2 \{a^2 (\nu_2 \tau_7 - 1 + \nu_1 \frac{c_{11}}{c_{44}}) + \frac{h^2}{2k_2} [\tau_7 (1 + k_2) - \frac{c_{11}}{c_{44}}]\} = 0 \quad \dots\dots\dots (23.b)$$

$$-2\tau_5 (\frac{\nu_2}{\nu_1}) C_1 a (\nu_2 \tau_7 - 1) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e_s}{2\sqrt{\nu_2}} J_1(\lambda_s) [\frac{b_2}{\cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \frac{\tau_1 - \tau_3}{b_1 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}}] = 0 \quad \dots\dots\dots (23.c)$$

上の三つの方程式から, 未定数 F_1 , C_1 及び A_1 が次の様に求められる。

$$F_1 = -\frac{1}{4\tau_5 (\nu_1 \tau_6 - 1)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e_s}{\lambda_s} J_1(\lambda_s) [\frac{a_2}{\sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} + \frac{\tau_3}{a_1 \sinh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))}] \quad \dots\dots\dots (24.a)$$

$$C_1 = (\frac{\nu_1}{\nu_2}) \frac{1}{4\sqrt{\nu_2} \tau_5 (\nu_2 \tau_7 - 1) a} \sum_{s=1}^{\infty} e_s J_1(\lambda_s) [\frac{b_2}{\cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \frac{\tau_1 - \tau_3}{b_1 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))}] \quad \dots\dots\dots (24.b)$$

$$A_1 = \frac{ak_2}{4\sqrt{\nu_2} (\nu_2 \tau_7 - 1)} \{ \nu_2 \tau_7 - 1 + \nu_1 \frac{c_{11}}{c_{44}} + \frac{1}{2k_2} (\frac{h}{a})^2 [\tau_7 (1 + k_2) - \frac{c_{11}}{c_{44}}] \} \times \sum_{s=1}^{\infty} e_s J_1(\lambda_s) [\frac{b_2}{\cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_2}))} - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \frac{\tau_1 - \tau_3}{b_1 \cosh(\alpha_s h / (2\sqrt{\nu_1}))}] \quad \dots\dots\dots (24.c)$$

以上により, 特殊解及び同次解に含まれていた未定数がすべて決定され, 薄板の場合と同様に, 横等方性円形厚板の軸対称曲げが, 厳密な級数解により解析されたことになる。

数値計算を行うために, 未定数及び Fourier 係数を次の様に置き換えて, 数式の無次元化を計るのが都合良い。

$$\frac{c_{44} R}{q} = \bar{F}_1, \quad \frac{c_{44} C_1 a}{q} = \bar{C}_1, \quad \frac{c_{44} A_1}{qa} = \bar{A}_1, \quad \frac{e_s}{q} = \bar{e}_s \quad \dots\dots\dots (25.a~d)$$

6. 計算結果

数値計算は, 載荷円形領域の半径 d と円板の半径 a との比 d/a が 0.3, 板厚 h と円板の直径 $2a$ との比 $e = h/(2a)$ (板厚比) が種々の値を持った横等方性及び等方性円形厚板について行った。級数の項数は, s について, 最初の 56 項を用いた。横等方性材料の一例として, Magnesium 結晶及び Cadmium 結晶を用いた。等方性材料については, ボアソン比 ν を 0.25 とした。Magnesium 結晶及び Cadmium 結晶の弾性定数の値は, Huntington¹⁰⁾

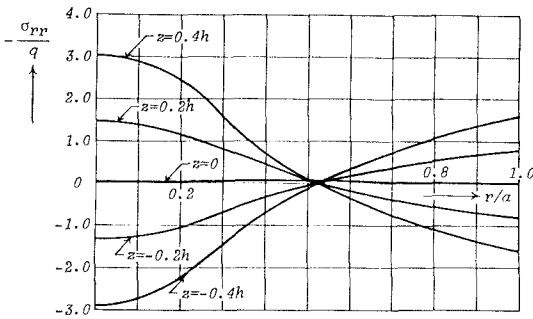


図-2 σ_{rr} の分布 (Magnesium, $e=1/8$)

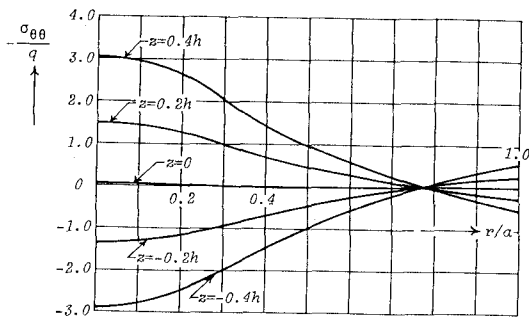


図-3 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布 (Magnesium, $e=1/8$)

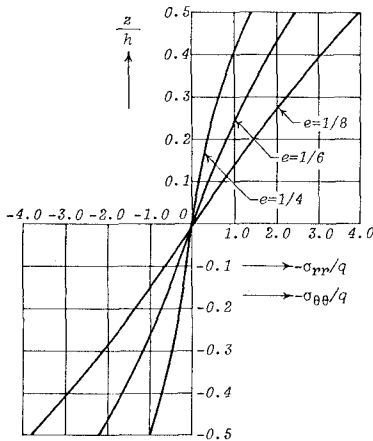


図-4 板厚比の影響
($r=0$, Magnesium)

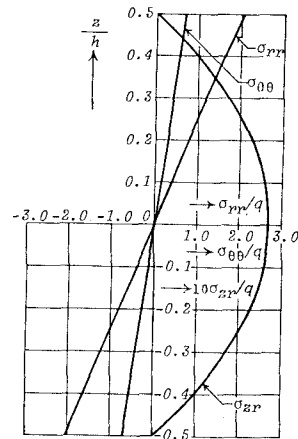


図-5 板厚方向の応力分布
(Magnesium, $r=a$, $e=1/8$)

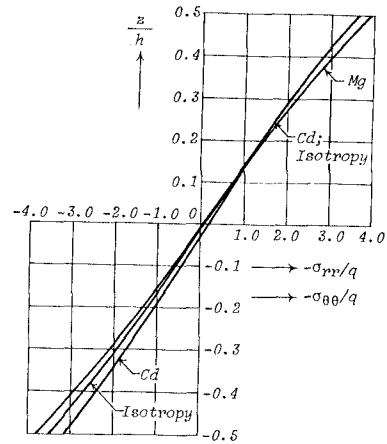


図-6 応力値の比較
($r=0$, $e=1/8$)

によって求められた値を用いた。図-2及び図-3には、Magnesium結晶の r 方向における垂直応力 σ_{rr} 及び $\sigma_{\theta\theta}$ の分布をそれぞれ示した。板厚比 e が $1/8$ と小さいため、 σ_{rr} 及び $\sigma_{\theta\theta}$ 共に、 $z=0$ に関して、ほぼ対称な分布になっている。図-4には、板の中心 $r=0$ におけるMagnesium結晶の $\sigma_{rr}(=\sigma_{\theta\theta})$ の板厚方向の分布を示した。板厚比 e が小さくなるにつれ、 σ_{rr} は、直線分布に漸近するが、 $e=1/8$ の場合においても、直線分布とは、まだわずかなへだたりがある。図-5には、固定端 $r=a$ におけるMagnesium結晶の σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 及びせん断応力 σ_{zr} の板厚方向の分布を示した。板厚比 e は、 $1/8$ の場合であるが、 σ_{rr} 及び $\sigma_{\theta\theta}$ は、図-4における値より、より直線分布に近く、 σ_{zr} は、ほとんど放物線に近い分布となっている。図-6には、Magnesium結晶、Cadmium結晶及び等方性($\nu=0.25$)の三つの材料の間における $\sigma_{rr}(=\sigma_{\theta\theta})$ の値の比較を $r=0$ において

示した。応力の負の側では、Cadmium結晶と等方性材料とがほとんど等しく、Magnesium結晶がこれらとやや相異している。応力の正の側では、三つの材料の間でやや相異がみられ、 $z = -0.5h$ における Magnesium結晶の値は、等方性材料の値より、9.6%大きく、Cadmium結晶の値は、8.7%小さい。

7. 結 語

一般化されたElliottの解と横等方性円形厚板の平面応力解・一般化平面応力解との一応用例として、周辺固定の横等方性円形厚板の軸対称曲げを解析した。特殊解及び同次解共に、厳密な弾性解を用いるのが Love理論の長所であり、本論文で述べた解法も、その長所を忠実に守っている。固定端の曲げに関する条件の一つは、Love理論では、薄板と同様に、たわみ角で規定するが、本論文では、Reissnerが提案した横断面の回転角で規定した。Love理論或いはその改良理論は、薄板の場合と同様に、厳密な級数解で厚板の曲げを解析することができ、厚板理論として大きな長所を有している。本論文では、円形厚板の簡単な軸対称曲げを解析したが、非軸対称問題に関する解がすでに求められているので、円形或いは円環厚板の非軸対称曲げへの発展は、比較的容易である。近年の複合材料の目覚ましい開発に伴い、横等方性厚板、円柱異方性厚板或いは直交異方性厚板などの解析方法或いは解析理論は、座標系を問わずに、今後ますます重要な課題になると考える。また、3次元解析が困難となる様な中程度の厚さを持った異方性厚板の熱応力解析も重要になると考える。これらの観点から、本論文で述べた横等方性円形厚板の軸対称解析は、今後の発展を勘案して、十分に意義あると考える。

参考文献

- 1) Reissner, E. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol.12, pp.A69~A77, 1945.
- 2) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol.18, pp.31~38, 1951.
- 3) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M. : A high-order theory of plate deformation, J. Appl. Mech., Vol.44, pp.663~668, 1977.
- 4) アムバルツミャン, S.A. (神谷紀生訳) : 異方弾性板の理論, 第2章, 森北出版, 1975.
- 5) Sonoda, K. and Horikawa, T. : Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, pp.117~126, 1981.
- 6) 奥村 勇・本多祐也・芳村 仁 : 一厚板理論による扇形平板の解析について, 土木学会論文報告集, 第326号, pp.15~28, 1982.
- 7) Love, A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap.XXII, 4th ed., Dover Pub., 1944.
- 8) Okumura, I.A. : Generalization of Elliott's solution to transversely isotropic solids and its application, 土木学会論文集, No.386/I-8, pp.185~195, 1987.
- 9) Okumura, I.A. : Solutions to stretching and bending of transversely isotropic, circular thick plates and their application, 土木学会論文集, No.398/I-10, pp.89~98, 1988.
- 10) Huntington, H.B. : The elastic constants of crystals, Solid State Physics, edited by Seitz, F. and Turnbull, D., Vol.7, p.213, Academic Press, 1957.