

I-14 静水压を受ける曲線直交リブ補剛円板の解析

北海道大学工学部 正会員 荻澤憲吉
正会員 芳村 仁
学生員 木村隆之

1. まえがき

半径方向と円周方向の直交2方向に、密に配置された多数のリブによって補剛された円板が、その板面に対して垂直な方向からの荷重を受ける場合において、これまで、対称曲げについては、各種の変剛度板との比較などから力学的特性などを明らかにしてきた。

この報告は、さらに作用する荷重が非対称な場合を扱ったものである。まず、曲線直交異方性リブ補剛円板の非対称曲げについての基礎方程式を示し、静水压状の一定勾配の逆対称分布荷重が作用する場合の級数解を誘導した。さらに補剛板の剛比と変形、曲げモーメントの関係について解析例を示した。

2. 基礎方程式

リブで補剛された円板の曲げ変形だけを考えるものとして、板の曲げの中立面内に座標 r, θ をとり、その面と垂直に座標 z をとる。デッキプレートでは平面応力状態、補剛リブでは単軸応力状態として、曲げ変形の時に断面平面保持を仮定すると、曲げモーメント M_r, M_θ およびねじりモーメント $M_{r\theta}, M_{\theta r}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} - D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, & M_{r\theta} &= -[(1-\nu)D + C_r] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ M_\theta &= -D \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} - D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), & M_{\theta r} &= -[(1-\nu)D + C_\theta] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

ここで、これらのモーメント式には各曲げ剛性とねじり剛性が含まれていて、それぞれ、

D : デッキプレートの曲げ剛性、 D_r, D_θ : 半径方向および円周方向のリブ(のみ)の単位幅あたりの曲げ剛性、 C_r, C_θ : 半径方向および円周方向のリブ(のみ)の単位幅あたりのねじり剛性、である。

ここで直交2方向のリブの配置間隔を考えると、円周方向リブの間隔は一定であるが、半径方向リブの配置は放射状になるために外側に行くにしたがって間隔が広がる。すなわち、これらの剛性のうち、 D_r および C_r は半径 r に逆比例して変化し、剛性は外側にいくほど小さくなる。いま、円板の外縁 $r=a$ における半径方向リブによる曲げ剛性とねじり剛性を D_a および C_a とすると、それらの剛性は、

$$D_r = (a/r)D_a, \quad C_r = (a/r)C_a$$

と表わされる。

これらの式を、分布荷重 p_z をになう板要素の曲げのつりあい条件に代入すると、補剛円板の曲げの基礎方程式は次のように誘導される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + h \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^4} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^5} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + g \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + g \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - (g + f_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (g + f_1) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \\ + (2g + f_2 h) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - (2g + f_2 h) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + (4g + 2f_1 + f_2 h) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + (g + f_1) \frac{1}{r^4} \frac{\partial w}{\partial \theta} = p_z \frac{a^4}{D_a} \end{aligned}$$

ここで、半径 r のかわりに無次元座標 $\rho = r/a$ を導入してある。また、記号 f_1, f_2, g および h は上記の剛性間の剛比であり、次のように、外縁における半径方向リブの剛性を基準に定義してある。

$$f_1 = (D_\theta/D_a), \quad f_2 = (C_\theta/C_a), \quad g = (D/D_a), \quad h = (C_a/D_a)$$

3. 基礎方程式の解

荷重として、 $[p_z = q \rho \cos \theta]$ という形式の逆対称分布荷重を考え、基礎方程式の右辺に代入する。た

わみ w の級数解の形として、 $\rho=1$ のまわりに展開した解を求めるために、まず微分方程式の係数に含まれる $(1/\rho), (1/\rho^2), \dots, (1/\rho^6)$ を $\rho=1$ において Taylor 展開した形に改めてから、級数解を誘導すると、最終的に、方程式の一般解は、余解 w_0 および特解 w_p の和として、次のような形式で得られる。

$$W = W_0 + W_p = \frac{q a^4}{D_a} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-\rho)^n \cos \theta + \sum_{n=4}^{\infty} P_n (1-\rho)^n \cos \theta \right\}$$

ここで、余解の項のうち、 A_0, A_1, A_2 および A_3 の4係数は任意に決められる定数である。それ以降の A_n ($n \geq 4$) は、順次前の項の係数によって決められる係数で、次のような一般式で与えられる。

$$A_n = \frac{-1}{(1+g)n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \left\{ (n-i-3) - 2g \right\} \\ - (n-i)(n-i-1) \left\{ \left(\frac{i}{2}\right) h + \left(\frac{i-1}{1}\right) S \right\} \\ - (n-i) \left\{ 2\left(\frac{i}{3}\right) h + \left(\frac{i-1}{2}\right) S \right\} - \left\{ 2\left(\frac{i}{4}\right) h + \left(\frac{i-1}{3}\right) S \right\} \end{array} \right] A_{n-i} \quad (n \geq 4)$$

また、 $P_n (n \geq 4)$ は特解項の係数で、 A_n と同様に次のようになる。

$$P_4 = \frac{1}{24(1+g)}, \quad P_n = \frac{-1}{(1+g)n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} (n-i)(n-i-1)(n-i-2) \left\{ (i+1)(n-i-3) + g(n-3-i-3) \right\} \\ - (n-i)(n-i-1) \left\{ \left(\frac{i+1}{3}\right) h + \left(\frac{i}{2}\right) S \right\} \\ - (n-i) \left\{ 2\left(\frac{i+1}{4}\right) h + \left(\frac{i}{3}\right) S \right\} - \left\{ 2\left(\frac{i+1}{5}\right) h + \left(\frac{i}{4}\right) S \right\} \end{array} \right] P_{n-i} \quad (n \geq 5)$$

ただし、これらの A_n および P_n 式において、 $S = 3g + f_1 + f_2 h$ であり、また、二項係数 $\left(\frac{n}{r}\right)$ において、 $n < r$ のときは $\left(\frac{n}{r}\right) = 0$ とする。

このように得られた解 w を代入することによって、曲げモーメントやせん断力、反力が A_n, P_n を含んだ式で表現される。そのうち、 A_0, A_1, A_2 および A_3 の4係数は解析される円板の境界条件などを満たすように決定されることになり、その条件は次のようである。

周辺単純支持の円板の場合

- 1) $\rho = 1$ で $w = 0$: $A_0 = 0$
- 2) $\rho = 1$ で $M_r = 0$: $A_2 = A_1 \cdot \nu g / 2(1+g)$
- 3) $\rho = 0$ で $w = 0$: $A_1 + A_2 + A_3 + \sum_{n=4}^{\infty} A_n = - \sum_{n=4}^{\infty} P_n$
- 4) 荷重と反力のつりあいから : $\left\{ \frac{\nu g^2}{1+g} + (3-\nu)g + f_1 + h + f_2 h \right\} A_1 - 6(1+g)A_3 = \frac{1}{4}$

周辺固定の円板の場合

- 1) $\rho = 1$ で $w = 0$: $A_0 = 0$
- 2) $\rho = 1$ で $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$: $A_1 = 0$
- 3) $\rho = 0$ で $w = 0$: $A_2 + A_3 + \sum_{n=4}^{\infty} A_n = - \sum_{n=4}^{\infty} P_n$
- 4) 荷重と反力のつりあいから : $-2A_2 - 6(1+g)A_3 = \frac{1}{4}$

4. リブ補剛円板の解析

補剛円板が静水圧を受ける場合の解析は、等分布荷重を受ける対称荷状態と直径軸に関して逆対称な等変分布荷重を受ける逆対称荷重状態に分けて行い、両者の結果を重ね合わせて断面力および変形を求めればよい。(図1)

対称荷状態の解析とその結果についてはすでに明らかにしているので、ここでは逆対称荷状態の場合の解析結果を示す。

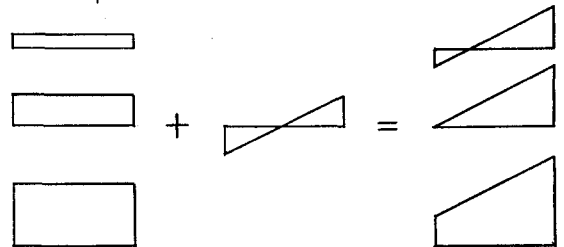


図1. 静水圧分布荷重

解析は周辺単純支持の場合と周辺固定支持の場合の両方に対して行なわれた。

数値計算は、級数の係数を20項目までとって行なったが、変形、断面力ともに良好な収束結果が得られた。

解析結果として示したのは、たわみ(w)、半径方向曲げモーメント($r \cdot M_r$)および円周方向曲げモーメント(M_θ)であり、それらの値を半径A O軸に沿ったグラフとして図に表わしている。

リブ補剛円板の場合、変形も曲げモーメントも剛比 f_1, f_2, g, h によって影響されることになるが、その影響は、リブ同士の剛比によるものとデッキプレートとリブとの剛比によるものとに分かれる。そこで、これらのうち、 f_1, f_2 を変化させることによって、半径方向リブと円周方向リブの直交2方向のリブの剛比による影響を解析して示したのが図3である。また、別に、 g を変化させてデッキプレートとリブとの剛比による影響を示しているのが図4である。

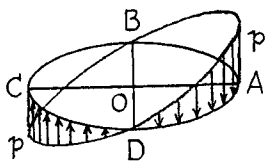


図2. 逆対称静水压荷重

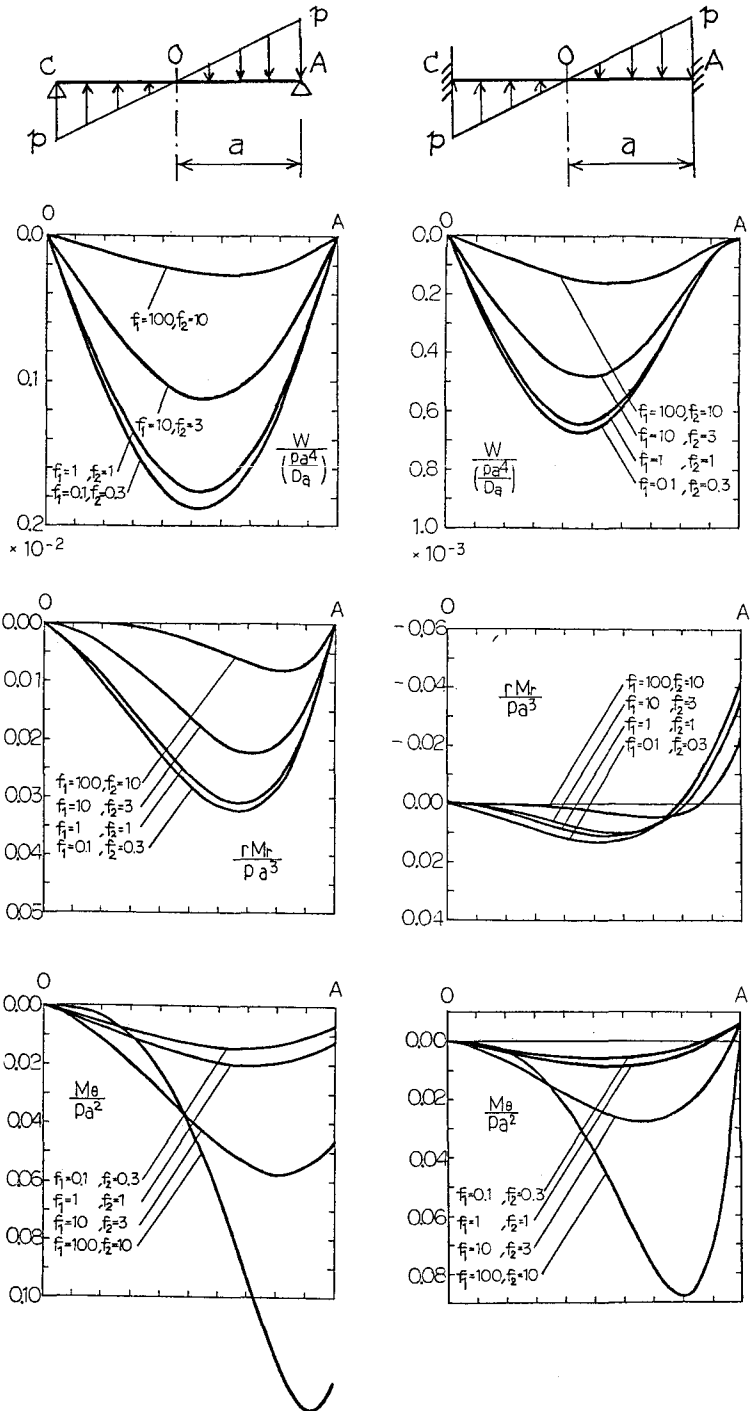


図3. 解析結果：逆対称静水压荷重を受けるリブ補剛円板のたわみ、曲げモーメント分布
(剛比 $g = 1, h = 0.1, \nu = 0.3$ の場合)

5. あとがき

非対称な曲げをうける曲線直交異方性リブ補剛円板の基礎方程式を誘導し、逆対称荷重が作用する場合の解を級数解のかたちで求めた。

その解を用いて、周辺単純支持補剛円板と周辺固定補剛円板の解析を試み、良好に収束した解析結果を得て、その剛比と変形、曲げモーメントの関係について図に示した。

さらに、リング状になった場合や、部分分布荷重が作用する場合についても同様な手法によって、解析できるものとおもわれる。

(参考文献)

1) 荻澤憲吉・芳村仁：構造的に曲線直交異方性をもつ円板およびリング板の横荷重による対称曲げ、第36回応用力学連合講演会講演予稿集、1986.12

2) 荻澤憲吉・芳村仁・野口浩：構造的に曲線直交異方性をもつ円板の対称曲げ、土木学会北海道支部論文報告集、第43号、1987.2

3) 荻澤憲吉・芳村仁・野口浩：構造的に曲線直交異方性円板の曲げにおける剛性の評価について、土木学会第42回年次学術講演会講演概要集、I、1987.9

4) 荻澤憲吉・芳村仁：リブ補剛円板およびサンドイッチリブ円板の横荷重による対称曲げ、第37回応用力学連合講演会講演予稿集、1987.12

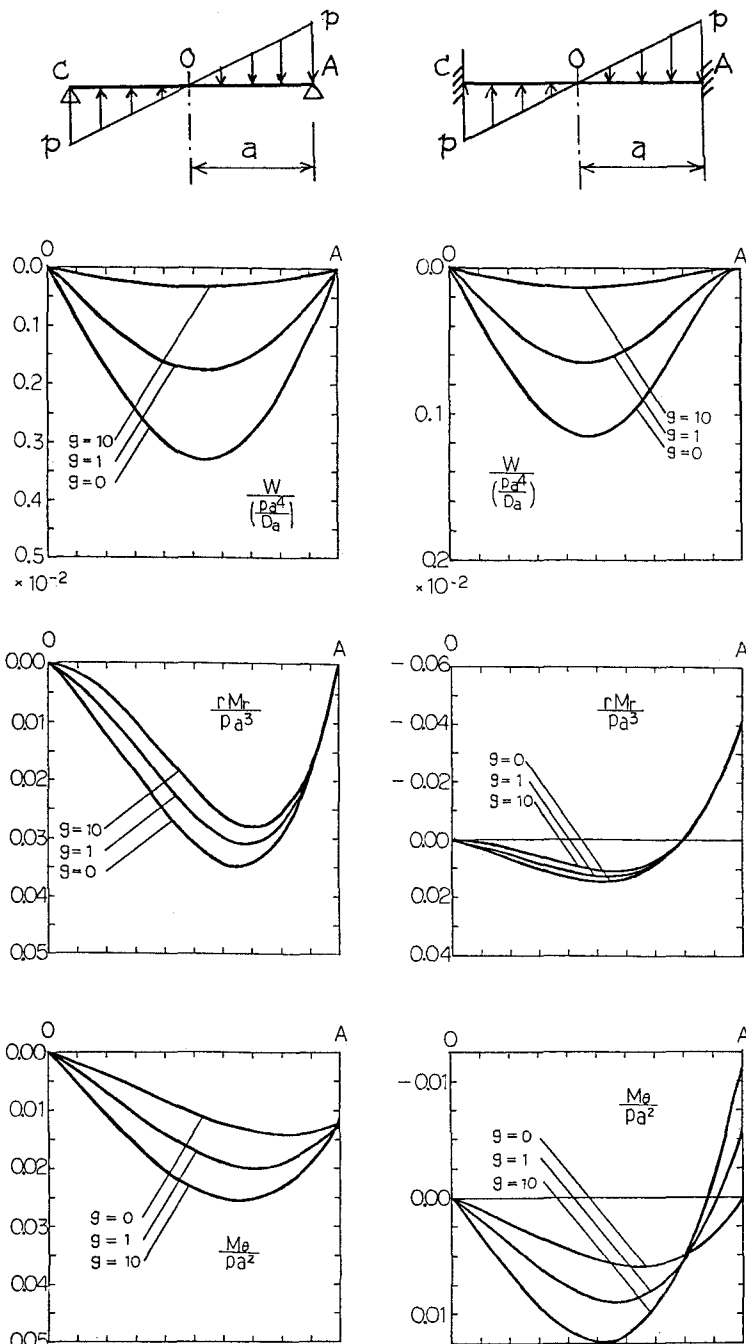


図4. 解析結果：逆対称静水荷重を受けるリブ補剛円板のたわみ、曲げモーメント分布
(剛比 $f_1 = 1, f_2 = 1, h = 0.1, \nu = 0.3$ の場合)