

II-21 山地河道の水面形遷移に関する研究

北海道大学 土木工学科 正 員 山田 正
 同 上 学生員 水子 龍彦
 同 上 学生員 竹本 典道

1. 研究の目的

一般に渓流と呼ばれるような山地河道における水流に関しては、その水面形、抵抗則、河床形状等、未だ十分に明らかにされておらず、河川水理学としても今後解明が待たれている分野の一つとなっている。ところで、開水路流れにおいては、河床に凹凸が存在するとき、常流及び射流の流れの他に部分的に跳水を伴ういわゆる chutes and pools (C & P) 現象が存在することが知られている。これに対して、著者らは山地河道の水面形とその遷移及び抵抗則に関して理論解析及び実験的検討を行ってきた。本研究はそれらの研究の延長上にあるものであり、著者らの行っている理論解析の結果を実験的に確認すると共に、より一般的な河床形状のもとでの水面形の遷移限界を理論的、実験的に明らかにすることを目的としている。本論文は、河床の凹凸及び、河幅の狭さくにとまって起こる跳水の発生限界に関して検討を行ったものである。

2. 従来の研究

対象とする流れの概要と記号は、図1（縦断面図）に示されている。ここに、 S は河床の平均河床面からの突起高さ、 h 、 ζ 、 V はそれぞれその点での水深、上流側一様水深に対する水面変位、平均流速、 h_0 、 V_0 はそれぞれ上流側一様水深部分での水深及び平均流速を示す。流れの基本式は、(1)式の連続式と(2)式の水面に対して適用したBernoulliの定理である。(1),(2)式により V を消去すると(3)式を得る。(3)式において河床を微小振幅波としてとらえると、(4)式の近似が成立し、このとき(3)式は簡単になり、(5)式となる。(5)式からわかるように微小振幅河床河の場合には、フルード数の大小に応じて上流と射流の2つの水面形のみが存在し、C & P現象は説明できないことがわかる。

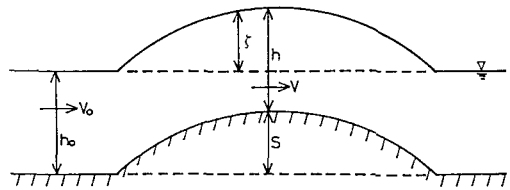


図. 1 流れの概要と記号の説明
(河床突起)

3. 水面形遷移に関する理論的解析

上記に示した微小振幅河床波の場合に対して、本研究では、(3)式あるいは抵抗を考慮した(19)式そのものを扱う。このとき、射流からC & Pに遷移するときは跳水によるエネルギー損失(Δh)を無視し、逆にC & Pから射流に遷移するときは考慮する。

1)射流から跳水への遷移限界：いま(7)式で示す無次元量を用いると、無次元水深 y に関して三次式の(8)式を得る。一般に $f(y)$ は図2に示す形状をしている。 $\eta = 0$ （すなわち $S = 0$ ）の平坦河床の場合には、 $f(y) = 0$ を満たす図中のA、Bの2点が必ず存在し、これらが射流と常流の水深に対応して

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & V_0^2 h_0 = V(h_0 + \zeta - s) \quad (2) \quad V_0^2 / 2g = V^2 / 2g + \zeta \\
 (3) \quad & V_0^2 [1 + (\zeta - s) / h_0]^2 + 2g\zeta = V^2 \quad (4) \quad |\zeta - s| / h_0 < 1 \\
 (5) \quad & \zeta = -s Fr_0^2 / (1 - Fr_0^2) \quad (6) \quad Fr_0 = V_0 / \sqrt{gh_0} \\
 (7) \quad & (h_0 + \zeta - s) / h_0 = h / h_0 = y, \quad s / h_0 = \eta \\
 (8) \quad & f(y) = y^3 - (1 + Fr_0 - \eta)y^2 + Fr_0 = 0 \\
 (9) \quad & a = -(1 + Fr_0^2 / 2 - \eta), \quad c = Fr_0^2 / 2, \quad a_1 = -a^2 / 3, \\
 & b_1 = 2a^3 / 27 + c \\
 (10) \quad & y^3 + ay^2 + c = 0 \quad (11) \quad x = y + a/3, \quad (y = x - a/3) \\
 (12) \quad & x^3 + a_1 x + b_1 = 0 \\
 (13) \quad & \omega = \exp(2\pi i / 3), \quad R = b_1 / 4 + a_1 / 27, \\
 & u = \sqrt{-b_1 / 2 + \sqrt{R}}, \quad v = \sqrt{-b_1 / 2 - \sqrt{R}} \\
 (14) \quad & x_1 = u + v, \quad x_2 = \omega u + \omega^2 v, \quad x_3 = \omega^2 u + \omega v \\
 (15) \quad & R < 0 \quad (16) \quad (1 + Fr_0^2 / 2 - \eta)^3 > 27 Fr_0^2 / 8 \\
 (17) \quad & \eta < 1 + Fr_0^2 / 2 - 3 Fr_0^2 / 2 \\
 (18) \quad & \eta = 1 + Fr_0^2 / 2 - 3 Fr_0^2 / 2
 \end{aligned}$$

いる。しかし、上流側のフルード数 Fr_0 が同じでも η がある値より大きくなると、A、B 2 点は存在しなくなる。この場合が本研究で主張する C & P に相当している。つまり、水面形が存在しなくなる限界波高が C & P の発生限界になっている。これは、(8) 式の 3 次方程式の 2 根 A、B が存在しなくなる場合に相当することから、この条件は容易に導くことができ、(8) 式が 3 実根を持つ条件を導けばよい。このとき (9) 式のように置き換える。まず、(8) 式を (10) 式のように置き換える。(10) 式で (11) 式を用いて変数変換を行い、(12) 式を得る。(12) 式の 3 根をカルダノ公式を用いてとくと (13) 式の置換の後、(14) 式を得る。ここで、(14) 式が 3 実根となる必要十分条件は (15) 式である。これは (16) 式と同じであり、これを解くことにより (17) 式を得る。従って、(17) 式を等号に置き換えた (18) 式で表される曲線が C & P への遷移限界を示す曲線となる。(18) 式は、エネルギー損失を無視しているため、射流（上流）から C & P への遷移限界を与える式と見なし得る。

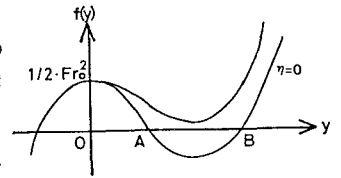


図. 2 $f(y)$ の一般的な形状

2) C & P の消滅する遷移限界：ここでは理論を簡明にするために上流側に跳水をもつながらの射流から跳水への遷移限界としてとらえている。

この場合は、(2) 式の代わりに (19) 式を用いる。ここに、 Δh は損失水頭をあらわす。(1) 式と (19) 式を用いて上記と同様の解析を行うと、(17) 式の代わりに (20) 式を得る。(21) 式は (20) 式を等号に置き換えたものである。この場合はエネルギー損失を考慮しており、C & P から射流の水面形への遷移限界を表しているといえる。ここで (21) 式のエネルギー損失として完全跳水による損失を考えると損失水頭 Δh は、(22) 式で表される。(22) 式の両辺を h_0 で割り、上流側フルード数 Fr_0 を用いて表すと、(23) 式となる。従って、(21) 式は (24) 式のように表される。以上の結果を踏まえ、(18) 式と (24) 式を用いて $Fr_0 - \eta$ を図示したものが図 3 である。図中の曲線 (a) は (18) 式、(b) は (24) 式である。

$$(19) \quad V_0^2/2g = V^2/2g + \zeta + \Delta h$$

$$(20) \quad \eta < 1 + Fr_0^2/2 - 3Fr_0^{2/3}/2 - \Delta h/h_0$$

$$(21) \quad \eta = 1 + Fr_0^2/2 - 3Fr_0^{2/3}/2 - \Delta h/h_0$$

$$(22) \quad \Delta h = (h - h_0)^3 / (4hh_0)$$

$$(23) \quad \Delta h/h_0 = (\sqrt{1+8Fr_0^2} - 3)^3 / (16(\sqrt{1+8Fr_0^2} - 1))$$

$$(24) \quad \eta = 1 + Fr_0^2/2 - 3Fr_0^{2/3}/2 - (\sqrt{1+8Fr_0^2} - 3)^3 / (16(\sqrt{1+8Fr_0^2} - 1))$$

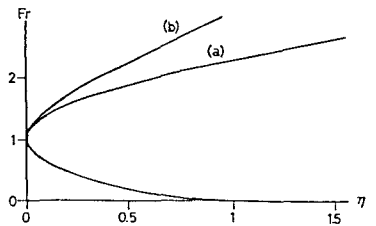


図. 3 η をパラメータとした $y - Fr$ の関係

4. 実験及びその結果と理論との比較

本研究で用いた実験水路は 2 種類あり、そのうちの 1 つは幅 22cm、長さ 8m であり、ここに波長 20cm、全振幅 1.00cm の正弦波形状をした塩化ビニル製水路床を設置したものである。他の 1 つは幅 50cm、長さ 14m の水路で、波長 53cm、全振幅 5cm の正弦形状をしたアクリル製水路床を設置したものである。本実験では、水路勾配を一定に保ち流量を変化させた場合と、流量を一定に保ち水路勾配を変化させた場合の 2 通りの方法で C & P の遷移限界を観察した。

(1) $\eta - Fr$ 表示：理論で与えられた $\eta - Fr$ グラフに合わせるために、実験で得られた単位幅流量 q_0 (cm^2/s) と水路勾配 i を用いて $\eta - Fr$ 表示に変換する。各実験値に対して上流側一様水深部の等流水深は、抵抗係数の定義の式 (25) 式と滑面对数則の近似式である Blasius 式 (26) 式を等置して得られる (27) 式で与える。ここに、 g ：重力加速度 (cm/s^2) $A = 0.316$ (滑面) ν ：動粘性係数 ($= 0.01$) である。このようにして得られた上流側水深 h_0 を用いて (28) 式と (29) 式により上流側フルード数 Fr_0 と無次元波高 η を得る。これにより、実際の $\eta - Fr$ 関係を示したものが、図 4、図 5 である。図 4 は、水路幅 22cm の場合である。これは、理論解析の結果とよく一致していると見なし得よう。図 5 は、水路幅 50cm の場合である。これ

$$(25) \quad f = 8gih_0^3/q^2 \quad (26) \quad f = A(\text{Re})^{1/4} = A(\nu/4q)^{1/4}$$

$$(27) \quad h_0 = (Aq^2/8gi)^{1/3} (\nu/4q)^{1/12}$$

$$(28) \quad Fr_0 = q_0/\sqrt{gh_0^3} \quad (29) \quad \eta = s/h_0$$

に関しても、理論と実験はよく一致している。

(2) $i-q$ 表示: 次に、

実測した単位幅流量

q_a (cm²/s) と勾配 i を

用いた $q-i$ グラフを

示す。抵抗係数 f とし

ては、Blasius式(30)式

を用いる。ここで Re

: レイノルズ数、 U :

平均流速(cm²/s)、 R :

径深(cm)である。また

径深 R を水深 h (cm) で

近似した場合が(31)式

である。さらに(32)式により、フルード数 Fr を用

いて単位幅流量 q (cm²/s) を表すと(33)式を得る。

(31)式と(33)式により抵抗係数は(34)式のように表

され、(35)式を得る。これにより、 $q-i$ グラフを

示したものが図8~12である。ここに図8~11

は、幅22cmの水路を用いた場合である。図6は径深

R 、図7はこれを水深 h で近似したものである。図

6、図7ともに、よく理論と一致していると見なし得よう。なお、径深 R と水深 h の違いは、両者を比較

するとわかるように、ほとんどその差は認められない。図8は、幅50cmの水路を用いた場合であり、上記

と同様に理論とよく一致している。

図. 4 $Fr-\eta$ に関する実験と理論解の比較 ($B=22$ cm)

図. 5 $Fr-\eta$ に関する実験と理論解の比較 ($B=50$ cm)

$$(30) f = A(Re)^{-1/4} = 0.316(4UR/0.01)^{-1/4}$$

$$(31) f = 0.316(4Uh/0.01)^{-1/4}$$

$$(32) Fr = U/\sqrt{gh} = q/\sqrt{gh^3}$$

$$(33) q = Fr\sqrt{gh^3} \quad (34) f = 0.316(Fr\sqrt{gh^3}/0.01)^{-1/4}$$

$$(35) i = fFr^2/8 = 0.316Fr^2(Fr\sqrt{gh^3}/0.01)^{-1/4}/8$$

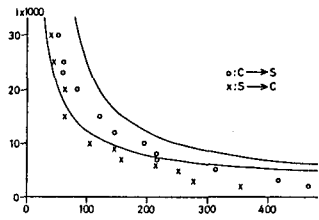


図. 6 流量—勾配関係で表示した C&P の出現領域と実験値の比較 ($B=22$ cm, 径深 R)

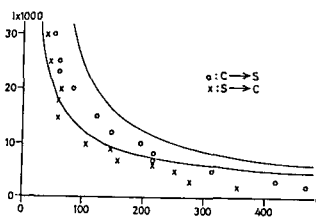


図. 7 流量—勾配関係で表示した C&P の出現領域と実験値の比較 ($B=22$ cm, 水深 h)

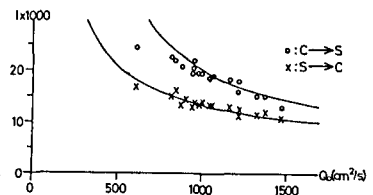


図. 8 流量—勾配関係で表示した C&P の出現領域と実験値の比較 ($B=50$ cm)

5. 側壁突起がある場合の水面形遷移に関する理論解析及び実験

(1) 理論解析

本節は、図9に示されるように河床は平面で、側壁は兩岸から突起を出している場合の水面形遷移に関する理論解析を行ったものであり、さらに実験との比較検討を行ったものである。図9は、本研究で対象とする流れの概要と記号を示したものである。ここに、 B_0 は上流側一様水路幅、 B は最狭部水路幅、 S は片側突起幅、 h_0 は上流側一様水深、 V_0 は上流側平均流速、 h は突起部の水深、 ζ はその点での水面変位、 V はその点での平均流速を示す。流れの基本式としては、(36)式で与えられる連続式と、(37)式、(38)式で与えられる水面に対して適用したBernoulliの定理式である。(37)式は、エネルギー損失を無視した場合、

(38)式は、エネルギー損失(Δh)を考慮した場合である。次に、(39)式に示す無次元突起幅を用いると(40)式を得る。

A) エネルギー損失を無視した場合：(36),(37),(40)式より、(41)式を得る。次に、(42)式に示す無次元量を用いると、無次元水深 y に関しての3次式である(43)式並びに(43)式より導いた(44)式を得る。(44)式を前節と同様にして解くことにより、常流あるいは射流が存在する条件として(45)式を得、さらにこれを等号に置き換えた(46)式を得る。(46)式は、エネルギー損失を無視しているので、射流からC&Pへの遷移限界を与える式と見なせる。

B) エネルギー損失を考慮した場合：(36),(38),(40)式より、上記と同様の解析を行い、(47)式を得、これを等号に置き換えた(48)式を得る。(48)式は、エネルギー損失を考慮しているので、C&Pから射流への遷移限界を与える式と見なせる。以上の結果を踏まえ、(46)式と(48)式を図示したものが図10である。図中の曲線(a)は(18)式、(b)は(24)式を示している。

(2) 実験

本研究で用いた実験水路は、突出部のない上流側平坦部での幅14cm、長さ6mであり、ここに波長20cm、片側全振幅1.00cmの正弦波形状をした塩化ビニル製水路側壁を両側に設置したものである。C&Pの遷移限界の判定は、前節と同様に水路勾配を一定に保ち、流量を変化させた場合と、流量を一定に保ち、水路勾配を変化させた場合の2通りで行った。

(3) 理論値と実験値の比較

以上で求めた理論曲線と実験値を η - Fr グラフで比較したのが、図11である。図中の実線が理論的に求めたものであり、○印および×印が実験値である。(46)式あるいは(48)式に示す理論解析の結果では、水路上流側のフルード数 Fr_0 が与えられるとC&Pの水面形遷移を示す限界幅は一意的に与えられるのに対して、実験では、同一の狭さく幅を与えても遷移限界を示す上流側フルード数は数多く存在してしまうという結果になっており、側壁狭さくがある場合の水面形遷移に関しては本理論は実験結果を説明できないことがわかる。

6. 水面形状の特性

1) 2次元正弦波河床上に現れる水面形

図13は、2次元正弦波形の河床を持つ水路上で現れた水面形を、流量は一定に保ち勾配を急から緩にして示したものである。この図より、網目状の波が水面に現れていることがわかる。このときの特徴とし

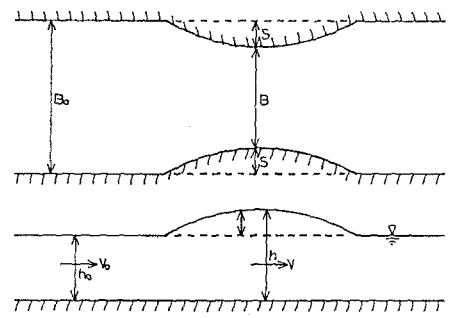


図. 9 流れの概要と記号の説明
(側壁突起, 上: 平面図、下: 断面図)

$$(36) V_0 h_0 B_0 = V(h_0 + \zeta) B$$

$$(37) V_0^2/2g = V^2/2g + \zeta \quad (38) V_0^2/2g = V^2/2g + \zeta + \Delta h$$

$$(39) \epsilon = 2s/B_0 \quad (40) B = B_0(1-\epsilon)$$

$$(41) 1 = \{(h_0 + \zeta)/h_0\}^{-2}/(1-\epsilon)^2 + 2\{V_0/\sqrt{gh_0}\}^{-2}\{(h_0 + \zeta)/h_0 - 1\}$$

$$(42) Fr_0 = V_0/\sqrt{gh_0}, y = (h_0 + \zeta)/h_0$$

$$(43) 1 = y^{-2}/(1-\epsilon) + 2Fr^{-2}(y-1)$$

$$(44) f(y) = y^3 - (1 + Fr_0^2/2)y^2 + Fr_0^2/2(1-\epsilon)^2$$

$$(45) \epsilon < 1 - \sqrt{27Fr_0^2/8(1 + Fr_0^2/2)^3}$$

$$(46) \epsilon = 1 - \sqrt{27Fr_0^2/8(1 + Fr_0^2/2)^3}$$

$$(47) \epsilon < 1 - \sqrt{27Fr_0^2/8[1 + Fr_0^2/2 - (\sqrt{1 + 8Fr_0^2 - 3})^3]/(16(\sqrt{1 + 8Fr_0^2 - 1}))}]$$

$$(48) \epsilon = 1 - \sqrt{27Fr_0^2/8[1 + Fr_0^2/2 - (\sqrt{1 + 8Fr_0^2 - 3})^3]/(16(\sqrt{1 + 8Fr_0^2 - 1}))}]$$

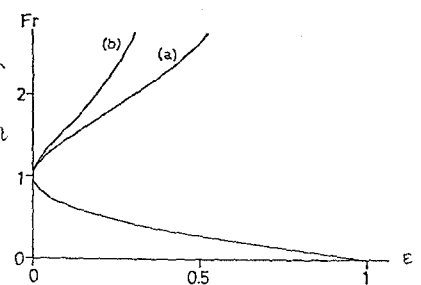


図. 10 ϵ をパラメータとした
 y - Fr の関係

では、勾配が急なときには射出角が小さくて1つ1つのひし形の形が細長く、水路横断方向に発生するひし形の数が多い。一方、勾配が緩くなると射出角が大きくなりひし形の形は幅が増えてくる。さらに勾配を緩くして行くと、ある勾配の時に急にひし形の数1つ減少する。このことから、この現象は斜め衝撃波に関する固有値問題を形成しているものと予想される。一般に斜め衝撃波は水路側壁のなんらかの突起により誘起されて発生するが、本実験のように側壁になんかの突起を持たない場合においても斜め衝撃波が発生することは興味深い。

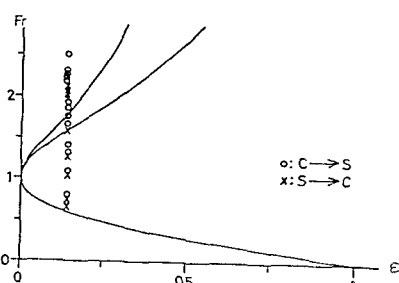


図. 1.1 $Fr-\epsilon$ に関する実験と理論解の比較 ($B=22\text{cm}$)

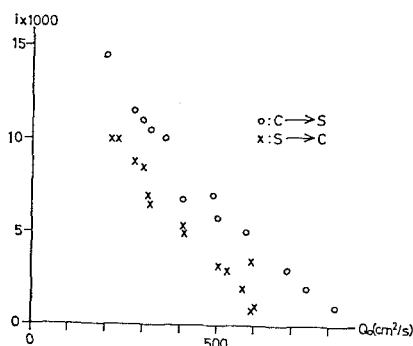


図. 1.2 流量—勾配関係で表示したC&Pの出現領域

2) 2次元正弦波形をした側壁を持つ水路に現れる水面形

図1.4は、2次元正弦波形の側壁を持つ水路上で水面形について、1)と同様にして示したものであり、この場合網目状の波が水面に現れていることがわかる。特徴は1)と

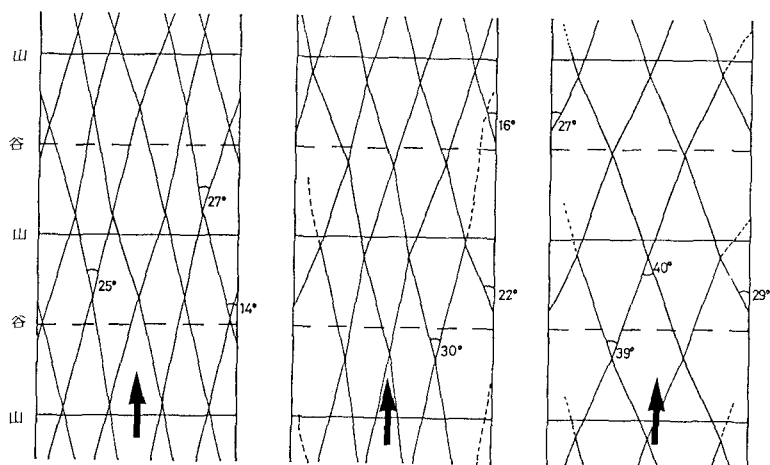


図. 1.3 水面に出現した網目模様の表示 (河床突起, 単位幅流量: $338\text{cm}^2/\text{s}$, 左からそれぞれ、水路勾配: $3/100, 2/100, 1/100$, 等流水深: $2.0, 2.3, 2.9\text{cm}$, 上流側フルード数: $3.8, 3.1, 2.2$)

似ているものの、水路床勾配が緩くなったときのひし形の形はより丸く膨らんでいるのが認められ、平面図では前記と同様の形に見えるものの、立体的にはかなり性質の異なった波動のようにも見受けられる。なお、水理条件によって水路幅内に存在するひし形の数急変する点は前記と同様である。

7. 結論

本研究で得られた結論は以下のようである。

- (1) 河床突起を設けたときのC & Pの遷移限界を定める理論解析の結果は、実験とよく一致する。
- (2) 射流からC & Pへの遷移に対して、C & Pから射流への履歴現象は、跳水によるエネルギー損失を考慮することにより説明することができる。つまり、C & Pから射流への遷移限界は、射流からC & Pへの遷移限界よりも、跳水によるエネルギー損失の分だけ、同一勾配ならば流量が、同一流量ならば勾配が、それぞれ大きくなる。
- (3) 側壁からの突起に対しては、河床突起と同じ理論を用いると、1つの狭さく幅に対して遷移限界を示す上流側フルード数が多数存在してしまい、実験結果を説明できない。

(4) 2次元正弦河床波で側壁になんらの突起を持たない水路に斜め衝撃波の発生が観察された。

(5) 平面河床で2次元正弦波形の側壁を持つ水路上でも斜め衝撃波が発生した。これは、(4)の斜め衝撃波よりも丸く膨らんでいる。

(6) (4)と(5)に共通して、衝撃波によって形成されるひし形の横断方向の数が急に変わる勾配が存在するのが認められた。

謝辞

本研究の遂行にあたり、著者の一人(山田)は文部省科学研究費(吉川秀夫早大教授)の補助を受けている。ここに記して感謝の意を捧げる。

参考文献

- (1) 山田正, 池内正幸, 村上良宏: 湍流を模擬した開水路流れの水面形遷移と抵抗則に関する研究, 第30回水理講演会論文集, pp.73-78, 1986.
- (2) 山田正, 池内正幸, 堀江良徳: 不規則底面を持つ開水路流れに関する研究, 第28回土木学会水理講演会論文集, pp.149-155, 1984.
- (3) 山田正, 池内正幸, 堀江良徳: 固定床不規則底面を持つ開水路流れに関する研究, 第38回年次学会学術講演会講演概要集第2部, pp.605-606, 1984.
- (4) Jaeger, C: Engineering Fluid Mechanics, Blackie & Son, pp.157-171, 1956.
- (5) 芦田和男: 開水路断面急拡部の水理に関する研究(2) 一段落ち部の水理, 建設省土木研究所報告, 第105号, pp.133-156, 1960.
- (6) 石原藤次郎, 志方俊之: 開水路断面急拡部の水理学的性状に関する研究に関する研究, 土木学会論文集, 第128号, pp.12-28, 1966.
- (6) 例えば、応用数学便覧, p.14, 丸善.

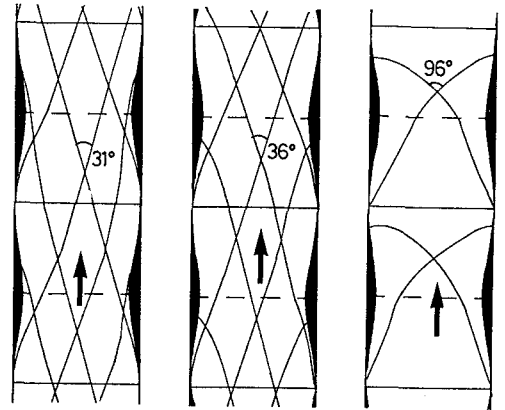


図. 1.4 水面に出現した網目模様の表示
(側壁突起, 単位幅流量: $170 \text{ cm}^2/\text{s}$, 左からそれぞれ、水路勾配: $3/100, 2/100, 1/100$, 等流水深: $1.3, 1.5, 1.9 \text{ cm}$, 上流側フルード数: $3.5, 2.9, 2.0$)