

## II-18 クリギング法による帯水層定数の 最適同定について

(株)土木技術コンサルタント 正員 谷口直弘  
室蘭工業大学 正員 藤間 聡

### 1. ま え が き

地下水資源の有効利用および水質保全対策について講ずるには、人為的、自然的要因による地下水応答を合理的かつ的確に予測することが重要である。このとき地下水流動方程式のパラメータである透水係数、透水量係数、貯留係数等を正確に知ることが必要となる。そのためには、帯水層の地質構成、成層構造、涵養量、揚水量等多数の地質学的、水文学的な情報を得なければならない。しかし、現行の地下水調査では種々の理由から調査地域は限定され、観測項目についても地下水位のみの場合が多い。

一方、透水係数、透水量係数、貯留係数等のパラメータは自然状態において空間分布を有していることが知られているのだが、従来の観測法ではその分布特性を流動方程式に反映することは困難であると思われる。

本報は逆問題として限られた地下水位観測値から帯水層パラメータの1つである透水量係数の空間分布を推定する方法を示すものである。

### 2. 透水量係数の推定

#### 2-1 解析対象帯水層および調査の概要

解析対象地域は北海道中央部に位置する旭川市街を貫流する石狩川水系牛朱別川の下流部左岸域で、東西約1,200m、南北約0.50kmの不圧帯水層であり、牛朱別川からの浸出水により十分の地下水涵養がなされている。この帯水層の地質は第四紀沖積層の氾濫原で構成されており、砂礫層がその主体で地表面下1m以深に分布している。地下水位変動はこの地域に不規則に配置された16箇所の内径50mmの塩ビ製パイプ井戸において一日一回定時観測されており、その期間は1984年3月11日から1985年3月31日までの約1年間である。本報ではこのうち1985年1月1日から同年3月1日までの冬期間連続60日の地下水位観測値を用いて透水量係数の空間分布を推定する。

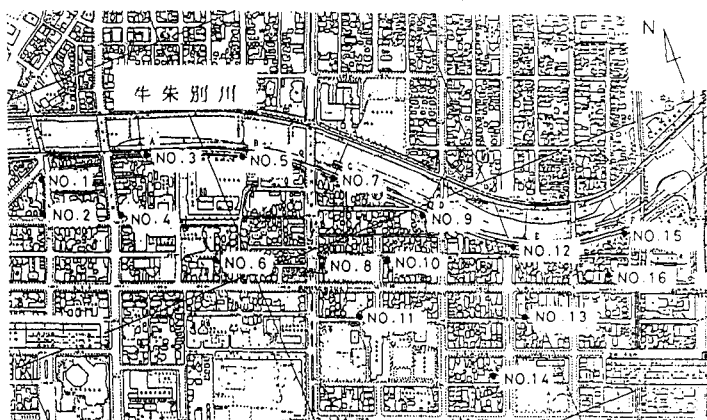


図-1 水位観測位置図 (・ 観測点)

## 2-2 地下水位変動の平滑推定

地下水位観測値から逆問題として帯水層パラメータを求める上で観測値に誤差が含まれていると、同定すべきパラメータは最適値に収束することなく、ときには物理的に容認できない負値をとるなど信頼性の低い結果を得ることになる。従って、本報においては次式で示されるカルマン・フィルタ理論の固定区間スムージング法<sup>1)</sup>を適用して誤差解析を行ない、地下水位の平滑推定値を求め、以後の解析において観測値として用いることとする。

$$h_{t/N} = h_{t/t} + C_t [h_{t+1/N} - h_{t+1/t}] \quad (t=N-1, \dots, 0) \quad (1)$$

$$C_t = P_{t/t} [P_{t+1/t} + Q]^{-1}, \quad P_{t/N} = P_{t/t} + C_t^2 = [P_{t+1/N} - P_{t+1/t}]$$

ここに、 $h_{t+1/t}$ 、 $h_{t/t}$ はカルマン・フィルタによる地下水位推定値、 $P_{t+1/t}$ 、 $P_{t/t}$ は同じく推定誤差共分散、 $C_t$ は平滑ゲイン、 $Q$ は地下水流動方程式のモデル化に伴う誤差の分散、 $N$ は観測日数をそれぞれ示す。

## 2-3 任意地点の地下水位の推定

前節の方法により観測誤差の処理を行なった後、観測値からトレンドを除いた変動量を確率変数として考え、非観測地点の地下水位を統計的手法を用いて推定する。この手法を適用する場合、一般に確率変数の統計的性質のうち平均、分散が一定であるとする弱定常過程を仮定する。しかし、自然状態における地下水位の分散は解析領域が広範囲になるに伴い大きくなる傾向を示すため、この過程は厳密には成立しないことになる。本報では確率変数の分散を一定とする代わりに、弱定常過程の成立条件を緩和すると共に実際の状態をより正確に表現すると考えられるDe l h o m eが提示したバリオグラム法<sup>2), 3)</sup>を導入する。これは次式で示されるように距離 $d$ はなれた二点間の地下水位の差の分散がその二点の位置によらず一定であるとするものである。

$$\gamma(d) = 1/2 \cdot E [(h(X+d) - h(X))^2] \quad (2)$$

ここに、 $\gamma(d)$ はバリオグラム、 $h(X)$ 、 $h(X+d)$ は地点 $X$ 、地点 $X$ から距離 $d$ はなれた位置の地下水位平滑推定値、 $E$ は期待値を示す。

任意の非観測地点における地下水位は、次式で示される線形回帰式により推定を行なう。

$$h^*(X_0) = \sum \lambda_i h(X_i), \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

ここに、 $h^*$ は非観測地点 $X_0$ における地下水位推定値、 $h$ は観測地点 $X_i$ における地下水位観測値、 $n$ は観測地点の総数、 $\lambda$ は重み係数をそれぞれ示す。

上式が不偏最良推定となるためには、次の二つの条件を満足しなければならない。

- a) 推定誤差の平均がゼロの不偏性を有する。
- b) 推定誤差共分散が最小となる。

この二つの条件から(3)式における重み係数 $\lambda$ は次式を満足しなければならない。

$$\sum \lambda_i \gamma(X_i - X_j) + \mu = \gamma(X_i - X_0), \quad \sum \lambda_i = 1 \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (4)$$

ここに、 $X_0$ は推定地点の位置座標値、 $X_i$ 、 $X_j$ は観測地点の位置座標値、 $\mu$ は未定係数をそれぞれ表わす。

上記の正規方程式により $n$ 個の重み係数 $\lambda$ が決定され、任意地点 $X_0$ の地下水位 $h^*$ が推定されることになる。また推定誤差共分散は次式から求められる。

$$\sigma^2 = \sum \lambda_i \gamma(X_i - X_0) + \mu \quad (5)$$

各観測地点におけるトレンドは観測値を時系列データと考えて処理を行ない、また非観測地点においては、観測値より3次多項式からなる回帰式を推定し、位置座標を関数としてその処理を行なう。

## 2-4 透水量係数の同定

透水量係数の同定法に関しては、一般に、地下水応答に基づく流動モデルを作成し、その計算値と地下水位観測値との差のノルムを最小にする透水量係数を探索する最小二乗法が多用されている<sup>4)</sup>。この同定法は観測値に限られた少数の場合にも適用することができるため、本報では同法を採用することとする。

平面二次元地下水流動は、次式の支配方程式をガラーキン有限要素法により定式化し、モデル化を行なう。

$$S(\partial h / \partial t) - \nabla_{xy} \cdot T(\nabla_{xy} h) + q = 0 \quad (6)$$

ここに、 $S$ は貯留係数、 $T$ は透水量係数、 $q$ は涵養あるいは揚水量、 $\nabla_{xy}$ は微分演算子、 $x, y$ は平面座標を示す。

地下水位は透水量係数の関数で表わされるため、その同定過程は非線形となる。従って、地下水位の線形化を行ない、次式により透水量係数を反復改良し、その最適推定値を探索することとする。

$$T(k+1) = T(k) + \Delta T, \quad \Delta T = (J^T J)^{-1} J^T [h - h_c(T)] \quad (7)$$

ここに、 $\Delta T$ は透水量係数の修正量、 $k$ は反復回数、上付き英字 $T$ は転置、 $h$ は地下水位観測値、 $h_c$ はその計算値をそれぞれ示す。また、 $J$ はヤコビアン行列と呼称される地下水位の透水量係数に関する偏微分係数である。

## 3. 解析結果

固定区間スムージングにより誤差処理を行なった地下水位平滑推定値からトレンドを除いた変動量を求め、観測点間距離80m刻みで階級分けを行ない変動量のバリオグラムを求めた。その結果を図-2に示す。この図から相互に有意な傾向が認められる範囲はおよそ500mまでである。従って、任意の非観測地点の地下水位の推定には、解析対象帯水層内のすべての観測点を用いることなく、推定地点を中心とする半径250mの円内にある観測点のみを考慮すると良いことになる。この方法は近傍の観測点のみを使用することから観測点間の情報不足に基づく推定精度の低下が避けられ、同時に(3)式中の同定すべき係数を減少し、計算処理を軽減できる。

得られたバリオグラムは次式で与えられる。

$$\gamma(d) = 0.5126 \times 10^{-5} \cdot d \quad (d \leq 500 \text{ m}) \quad (8)$$

上式を(4)式に代入して得られる重み係数 $\lambda$ により(3)式が不偏最良推定となることを次式で検証する。

$$E[\hat{h}(X_i) - h(X_i)] = 0, \quad E[(\hat{h}(X_i) - h(X_i))^2] / \sigma^2 = 1 \quad (9)$$

ここに、 $\hat{h}$ は(3)式から求められる地下水位推定値、 $h$ は観測値を示す。

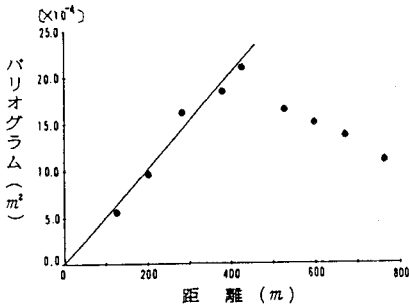


図-2 地下水位変動量のバリオグラム

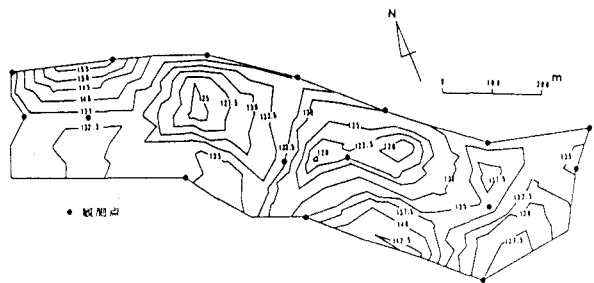


図-3 透水量係数の空間分布推定 単位 (m/day)

その結果、残差の平均は $0.705 \times 10^{-3}$ であり、また残差の分散と(5)式から得られる理論上の最小分散との相対比は1.095となる。従って、推定値に偏りがなく同時に最小の分散を有することから、(8)式は(3)式が線形不偏最良推定となるための設定条件を満足することがわかる。なお、貯留係数に関するバリオグラムは有意な傾向を示さず、空間分布構造を有しないランダム変数となる。

また、(8)式で示されるバリオグラムは距離のみの関数であるが、これは解析帯水層において円形小領域内では等方性と考えられることを示している。異方性の場合のバリオグラムは距離と方位で表わされる。

非観測地点の透水量係数は、帯水層を70節点、52個の小矩形領域に分割し、60日間の地下水位観測値を与えて有限要素法による数値モデルで推定を行ない、図-3に示す結果を得た。この図は地下水位観測値と計算値との差のノルムが $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 以下で、かつ反復過程のノルムの変化量が $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ 以下の場合に最適推定値に収束したと判定したものである。ただし、有限要素法においては要素内で一定の透水量係数が同定されるため、各節点における地点透水量係数はその節点を共有する要素群の平均値で与えた。

地下水位から透水量係数を求める逆問題において、同程過程が非線形であるために最適推定値に収束しない場合が生じる<sup>5)</sup>。これは主にヤコビアン行列Jの値が小さいため、(7)式中の地下水位観測値と計算値との差が微量であっても $\Delta T$ の値が大きくなることによるものである。従って、透水量係数の変動に対する地下水位の応答が低い地下水系においては最適透水量係数の同定は困難になると考えられる。本報ではJの値が大きく透水量係数の反復修正が適量で、残差のノルムの応答性が良いことから解析帯水層全域で最適推定値を得たと考えられる。

#### 【参 考 文 献】

- 1) 片山 徹 ; 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, pp.116-131, 1983
- 2) Marsily, G.de ; Fundamentals of transport Phenomena in Porous Media (edited by Jacob Bear) , NATO ASI Series, pp.719-769, 1984
- 3) Delhomme, J.P ; Kriging in the Hydrosiences, Ad.Water Resour. , 1-5, pp.251-266, 1978
- 4) 藤 間 聡・中田 満 洋 ; 空間分布構造を有する透水係数の統計的推定法, 日本地下水学会誌, 第28巻
- 5) 藤 間 聡 ; 帯水層定数の同定過程における不安定性について, 土木学会北海道支部 論文報告集, 第43号, PP.331-334, 1987