

## II-17 ヒステリシスを考慮した 飽和-不飽和浸透流解析

北海道大学工学部 正員 山田 正  
 同上 正員 藤田 睦博  
 北海道大学大学院 学生員 小林 稔

### 1. はじめに

不飽和土壌中での水分移動に関しては、同一のポテンシャル勾配においても定常時に比べて、吸水時には浸透しにくく、脱水時には浸透し易いというヒステリシス現象が存在する。従来、不飽和浸透解析においてこの現象の取扱としては、入力に用いる土壌の特性を表す関係に、吸水時と脱水時に個々の関係を直接与えることによって解析が行われてきた。それに対し著者らは、本来土壌の特性は定常状態において測定された関係を解析の入力として用いるべきであり、ヒステリシス現象は基礎方程式から得られる解の特性として捉えるべきものであるという考えの基に、ヒステリシス効果を内包した新しい不飽和浸透方程式を提案し、その解析を行ってきた。<sup>7)8)9)10)</sup>一方、飽和-不飽和浸透流解析は今までに幾つも成されているが、そのほとんどが圧力水頭 $\psi$ に関するものであり、体積含水率 $\theta$ に關した統一的な飽和-不飽和浸透流解析はまだまだ行われていない。

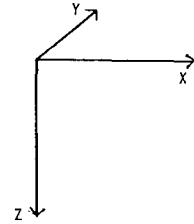
以上の事柄を背景とし、本研究はヒステリシス効果を内包した新しい飽和-不飽和浸透方程式を用いて、圧力水頭 $\psi$ だけではなく体積含水率 $\theta$ についても飽和-不飽和浸透流解析を行い、著者らの提案する新しい理論の適合性を検討したものである。

### 2. ヒステリシス効果を内包した不飽和浸透方程式

土壌の特性を表す $\psi$  (圧力水頭)- $\theta$  (体積含水率)関係や  $k(\theta)$  (不飽和透水係数)- $\theta$  関係としては定常状態において得られる一価関係を入力として用いるのに対し、水分フラックス  $\vec{q}$  を新たに次式で表す。

$$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k_x(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \tau \frac{\partial q_x}{\partial t} \\ q_y &= -k_y(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \tau \frac{\partial q_y}{\partial t} \\ q_z &= -k_z(\theta) \frac{\partial(\psi-z)}{\partial z} - \tau \frac{\partial q_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



ここで、 $\tau$ はヒステリシスの効果による緩和時間を表す時定数である。(2)式では不飽和領域にまで拡張されたダルシー則に、右辺第二項が新しく付け加わっている。(2)式の右辺第二項は、ポテンシャル勾配の変化に対するフラックスの時間遅れを表しているが、この項により同一ポテンシャル勾配に対して脱水時 ( $\partial q/\partial t < 0$ )には浸透し易く、浸潤時 ( $\partial q/\partial t > 0$ )には浸透しにくいというヒステリシス効果を表現し得る。一方、土中水分の連続の式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = 0 \quad (3)$$

であるから、(3)式に(2)式を代入して $\theta$ を従属変数にして表すと、

$$\tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{dk_z(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \{D_x(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{D_y(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}\} + \frac{\partial}{\partial z} \{D_z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}\} \quad (4)$$

ここで、  $D(\theta) = k(\theta) \partial \psi / \partial \theta$

となる。同様に $\psi$ を従属変数にして表すと次式となる。

$$\tau C(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{dk_z(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \{k_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{k_y(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y}\} + \frac{\partial}{\partial z} \{k_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z}\} \quad (5)$$

ここで、 $C(\psi) = d\theta / d\psi$

(4), (5)式で左辺第一項が新たに加わった項であり、従来の不飽和浸透方程式が移流分散方程式であったのに対し、その特性に加えて電信方程式としての特性が加わるようになった。即ち、この方程式の数学上の特性から不飽和浸透に新たに波動という特性が現れるようになったのである。

### 3. 体積含水率 $\theta$ に関する飽和-不飽和浸透流解析

飽和-不飽和浸透流解析は従来数多く行われているが、そのほとんどが圧力水頭 $\psi$ に関するものであり、体積含水率 $\theta$ に関する統一的な飽和-不飽和浸透流解析は行われていない。その理由は、(4)式の右辺に現れる水分拡散係数  $D(\theta) = k(\theta) \partial \psi / \partial \theta$  において飽和状態になると、 $\theta$ は間隙率 $n$ と等しくなり、もはや変化せず、 $\partial \psi / \partial \theta \rightarrow \infty$  となり水分拡散係数も無限大となるためである。しかし、飽和状態になってからも圧力水頭の変化に伴って土の構造が変化し、間隙率が僅かながら変化すると考えることにより飽和領域での取扱が可能となる。その考え方を以下に示す。体積含水率 $\theta$ は土の間隙率 $n$ と飽和度 $S_w$ の積で、

$$\theta = n \cdot S_w \quad (6)$$

と表される。(6)式のように考えると、圧力水頭 $\psi$ の変化による体積含水率 $\theta$ の変化は

$$\frac{d\theta}{d\psi} = n \frac{dS_w}{d\psi} + S_w \frac{dn}{d\psi} \quad (7)$$

のように表される。ここで、不飽和状態のときには圧力水頭変化による間隙率の変化が生じないものと仮定すると、(7)式において不飽和状態では  $dn/d\psi=0$ 、飽和状態では  $dS_w/d\psi=0$  となり(7)式は

$$\frac{d\theta}{d\psi} = C(\psi) + \alpha S_s \quad (8)$$

ここで  $C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi}$ 、 $S_s = \frac{dn}{d\psi}$ 、 $\alpha = \begin{cases} 0 & \text{： 不飽和領域} \\ 1 & \text{： 飽和領域} \end{cases}$

と表すことができる。 $C(\psi)$ は比水分容量、 $S_s$ は比貯留係数である。(8)式を用いることによって飽和状態になっても水分拡散係数は無限大とはならず、(4)式を用いた飽和-不飽和領域の統一した取扱が可能となる。一方、圧力水頭 $\psi$ に関しても、同様に(8)式を用いることにより(5)式を使った飽和-不飽和浸透流解析が可能なることはよく知られている通りである。<sup>1)2)</sup>

## 4. 数値計算および考察

### 4.1 数値計算

本研究では、先に導いた(4), (5)式を鉛直一次元について数値計算を行った。計算では、ヒステリシスの表現の確認や、 $\theta$ 分布や $\psi$ 分布の挙動の違いを見るために、 $\theta$ と $\psi$ とで独立に行われている。

計算方法は空間的には中央差分をとり、時間的な連立微分方程式としてRunge-Kutta-Gill法を用いた。 $\delta z$ は1cmとし、時間ステップ $\delta t$ については、同じ時間間隔 $h$ を $\delta t=h$ で計算したものと、 $\delta t=h/2$ で2ステップ計算したものを比較することによって、許容誤差の範囲内でできるだけ大きく $\delta t$ が取れるように可変時間ステップ方式を用いている。計算は2ケース行っているが、それぞれのケースに与えた土壌の関係や初期条件、境界条件等は以下に示されている。

a) Case 1: 土壌には図-1に示されるような砂を想定した関係を与えた。初期値には底部が地下水面とな

るような静止状態を与えた。境界条件は、地表面では降雨強度に等しい浸透速度を与え、底部では不浸透層を考えてそこを通過する流量はないものとした。降雨は降雨強度Rをある一定時間(TR)与えた後、打ち切っている。この場合、比貯留係数Ssは $1.0E-3$ とした。

b) Case 2: Vachaudら<sup>4)</sup>が行った実験をもとに、その実験値を再現するような計算を行った。土壌の特性には、図-2に示されるような砂を考えた関係を与えた。初期値には静止状態を与えたが、この場合は底部ではまだ地下水面は形成されていない。実験では、地表面から一定水頭で水を浸透させており、底部では砂利を敷いて水が抜けるようになっているのだが、ある程度までならば砂と砂利との間の層に水は溜っている。そこで今回の計算では、できるだけ実験の条件に近くなるような境界条件を考え、地表面ではほぼ飽和に近い一定値に固定し、底部では不浸透層を仮定した。この場合の比貯留係数Ssは $1.0E-4$ とした。

4.2 計算結果および考察  
a) Case 1: 図-3, 4, 5はCase 1の計算結果を示すものである。図-3を見ると、いずれも $t=30\text{min}$ で地下水が7-10cm程度上昇しているのがわかる。従来、体積含水率 $\theta$ に関する統一的な飽和-不飽和浸透計算はできないとされ、地下水位が上昇して行くような場合には計算は不可能とされていた。しかし、図-3に示されている地下水面の上昇に見られるように、土の僅かな圧縮性を考慮することにより $\theta$ に関しても飽和-不飽和領域の統一した扱いが可能になったことがわかる。次に図-3と図-4を比較してみると、ヒステリシス効果が非常に小さい場合( $\tau=0.5\text{sec}$ の場合)には $\theta$ と $\psi$ の分布は同じ速度で下方へ伝わっているが、ヒステリシス効果が大きくなると( $\tau=20\text{sec}$ の場合)、 $\theta$ の分布は $\psi$ の分布よりも少し遅れて伝わっていることが解

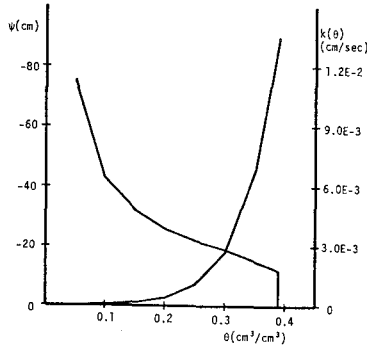


図-1 Case1の計算に用いた  
 $\theta$ - $\psi$  関係と $k$ - $\theta$  関係

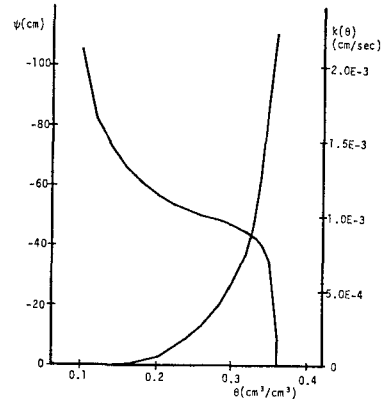
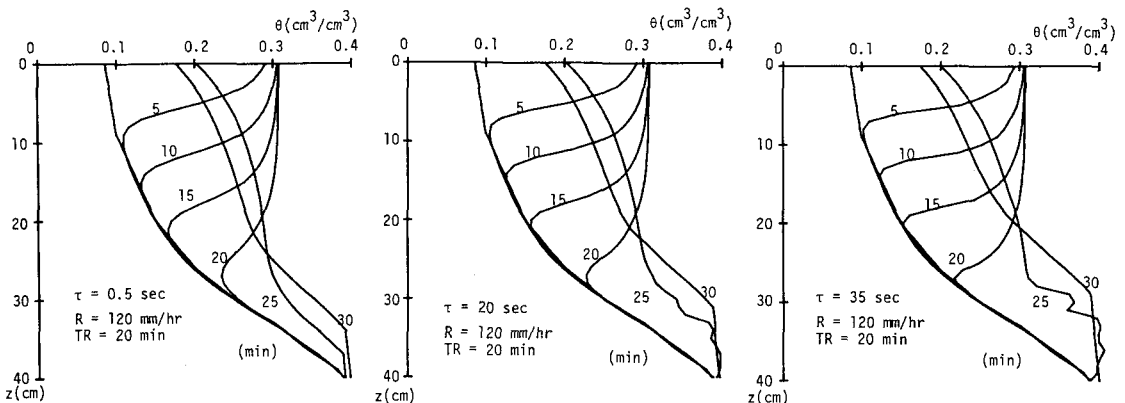


図-2 Case2の計算に用いた  
 $\theta$ - $\psi$  関係と $k$ - $\theta$  関係



(a)  $\tau=0.5\text{sec}$

(b)  $\tau=20\text{sec}$

(c)  $\tau=35\text{sec}$

図-3  $\theta$  分布の時間変化(Case 1)

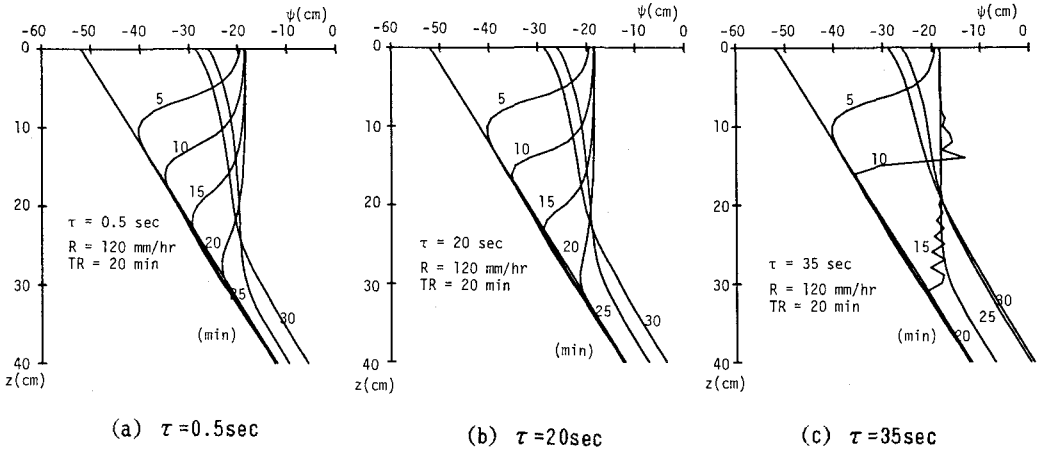


図-4  $\psi$  分布の時間変化(Case 1)

る。また、ヒステリシスの効果が非常に大きな場合 ( $\tau=35\text{sec}$  の場合) には、 $\psi$  の分布形は波動、あるいは段波のような伝わり方をし、 $\theta$  よりもかなり速く下方へ伝わるのが解る。この現象に関しては次のように説明できる。

(5) 式の鉛直一次元方向のみを表現すると次式となる。

$$\tau C(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{dk(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \quad (9)$$

この(9)式において

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx - \frac{1}{C(\psi)} \frac{dk(\psi)}{d\psi} \frac{\partial}{\partial z} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \approx \left\{ - \frac{1}{C(\psi)} \frac{dk(\psi)}{d\psi} \right\}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \approx k(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (12)$$

のような仮定が考えられるが、これらを(9)式に代入すると次式を得る。

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{dk(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left[ k(\psi) - \frac{\tau}{C(\psi)} \left\{ \frac{dk(\psi)}{d\psi} \right\}^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (13)$$

この(13)式の右辺で

$$k(\psi) - \frac{\tau}{C(\psi)} \left\{ \frac{dk(\psi)}{d\psi} \right\}^2 < 0 \quad (14)$$

の場合には(13)式の右辺は負の拡散項となり、不安定現象が発生する。これは、数学的には基本式が、拡散タイプから波動タイプへ変化した事に相当している。<sup>6)</sup> この不安定現象によって、上記の圧力伝播が生じると考えられる。

図-5は図-3と図-4に示される $\theta$ と $\psi$ の2つの独立した計算から得られた、ある一地点での $\theta$ と $\psi$ の挙動を示すものである。その挙動は明らかにヒステリシスループを示しており、本研究に使用した新しい方程式の有用性を再確認することができる。また、図-5に示される関係はScanning curve群の一部であって、こ

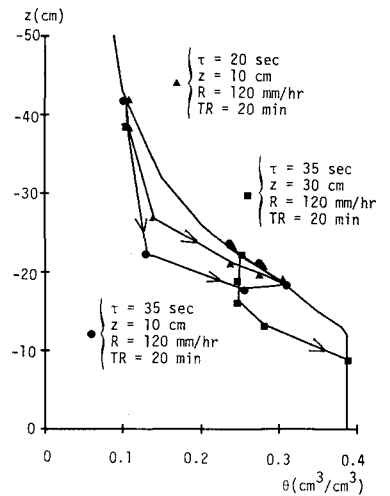


図-5 Case1の計算結果による  $\theta$ - $\psi$  関係

の様な関係をいくつも描いたその境界として主吸水曲線や主排水曲線が得られる事になる。

b) Case 2: 図-6,7,8はCase 2の計算結果を示すものである。図-6,7中の○や□、△のシンボルはVachaudらによる実験値を表す。図-6,7によりVachaudらの実験値と今回の計算値とを比較してみると、今回の計算で得られた $\theta$ と $\psi$ の分布形は、そのフロントの傾きが実験値よりも少し急ではあるが、両者はおおむね適合していると思われる。

図-6,7を見ると、 $t=0-3000\text{sec}$ までは $\theta$ の方が $\psi$ よりも少し遅れて伝わっているが、 $t=3000-3750\text{sec}$ においては、 $\theta$ に関しては以前と同様なスピードで伝わっているのに対し、 $\psi$ については明らかにそれ以前よりもかなり速く伝わっているのが解る。この $t=3000-3750\text{sec}$ における $\psi$ 分布の素早い伝達は、 $\psi$ 分布のフロントが毛管水縁に達したときにその影響が非常に速いスピードで伝わったものではないかと考えられる。つまり、毛管水帯において毛管水を釣り上げていた毛管ポテンシャルの糸を切るような形で、短時間の内にその影響が底部へ伝わったと考えられる。今回の計算では $\theta$ と $\psi$ とは独立に計算されているため毛管水帯付近での圧力水頭の速い伝達が水分分布に与える影響は表されていないが、毛管水と毛管ポテンシャルの釣合が壊れたことによって水分分布が変動することは十分に考えられる。Vachaudらの実験ではこの様な毛管水帯付近での速い圧力伝達は報告されていないが、底部における実験での条件と今回の境界条件を考えた場合、その様な現象が観測される可能性は考えられる。

図-8は図-5と同様に図-6と図-7から得られる $\theta$ と $\psi$ の挙動を示したものである。図中の上下両端の曲線は実験から得られた主吸水曲線及び主排水曲線であり、点線は実験から得られたScanning curveを表す。図-8を見ると、 $\theta$ と $\psi$ の挙動はヒステリシスを示しており、実験と比較すると今回の実験値の方がヒステリシスの効果が少し大きく現れているようである。

c)  $\tau$ に関して：本研究においては $\tau$ の値そのものに関しては未だ十分な検討を行っていない。しかし、本文中に示したようにここで用いた土壌(砂)の場合には、与えた条件によっても異なるが、 $\tau$ として20秒程度以上の値を与えたときにヒステリシスの効果が顕著になっている。この $\tau$ の値に関して次元解析的に検討すると、 $\tau \approx d/k_s$ の関係が成立していよう。ここに、 $d$ は土壌の等価粒径、 $k_s$ は飽和透水係数である。事実、今回の計算で用いた土壌の  $d/k_s$  の値は10-30秒程度になっていることから、当座はこの関係を目安に $\tau$ の値を採用することが考えられる。なお物理的には、 $\tau$ は浸透水が一粒径の距離を通過するのに要する程度の遅れ時間として解釈されよう。

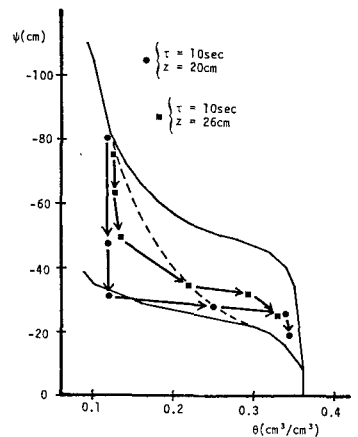
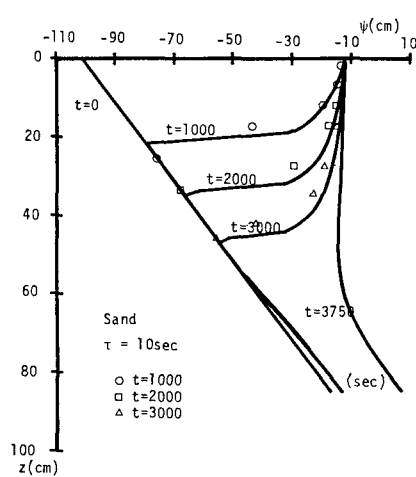
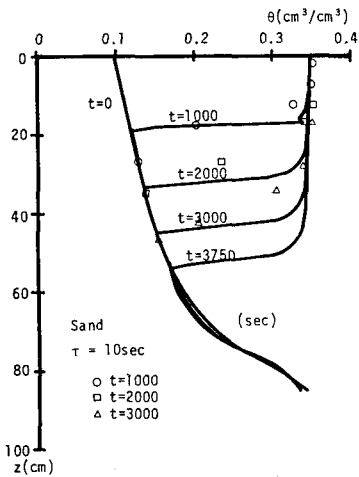


図-6  $\theta$  分布の時間変化(Case 2)

図-7  $\psi$  分布の時間変化(Case 2)

図-8 Case2の計算結果による  $\theta$ - $\psi$  関係

## 5. 結論

(1) 土の僅かな圧縮性を考慮することによって、体積含水率 $\theta$ に関しても圧力水頭 $\psi$ と同様に、統一した飽和-不飽和浸透解析が可能となった。

(2) 飽和-不飽和浸透解析においてもヒステリシス効果を内包した新しい方程式によってヒステリシス現象を表現できることが解った。

(3) ヒステリシスを考慮した新しい方程式には従来の移流分散型の方程式に新たに波動としての特性が加わっているため、その影響により、ある条件の基では非常に速い圧力の伝播現象が現れるようになった。著者らは、この非常に速い圧力の伝播が毛管水帯上縁付近の毛管水と毛管ポテンシャルの均衡を壊し、降雨に対する地下水位の異常に速い応答を引き起こすのではないかと考えている。

(4) 緩和時間 $\tau$ に関しては、土壌の等価粒径  $d$ と飽和透水係数  $K_s$ の比( $d/K_s$ )程度の値をとることが確認された。

謝辞：本研究は文部省科学研究費(代表、山田正並びに吉川秀夫早大教授)より補助を受けている。さらに本研究の遂行に当り、北大、長谷川和義博士、並びに道口敏幸技官より貴重な助言と助力を得ている。ここに記して深く感謝の意を表す。

### 参考文献

- (1) R.A.Freeze: Three-Dimensional, Transient, Saturated-Unsaturated Flow in a Groundwater Basin, *Water Resources Research*, vol.7, No.2, pp347-366, 1971.
- (2) 赤井浩一、大西有三、西垣誠: 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, *土木学会論文報告集*第264号, pp87-96, 1977.
- (3) J.Rubin: Numerical Method for Analyzing Hysteresis-Affected, Post-Infiltration Redistribution of Soil Moisture, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 31, pp13-20, 1967.
- (4) G.Vachaud and J.L.Thony: Hysteresis during Infiltration and Redistribution in a Soil Column at Different Initial Water Contents, *Water Resources Research*, vol.7, No.1, pp111-127, 1971.
- (5) J.Heilborn: 数値計算プログラム Basic, マグロウヒル好学社, 1982.
- (6) G.B.Whitham: *Linear and Nonlinear waves*, New York:Wiley, 1974.
- (7) 山田正、藤田睦博、小林稔: 降雨の鉛直浸透における Kinematic wave 特性とヒステリシスの効果を考慮した新しい不飽和浸透方程式の解の特性, *土木学会北海道支部論文報告集*, 第43号, pp199-204, 1987.
- (8) 山田正、小林稔: 降雨の鉛直浸透における Kinematic wave 特性とヒステリシスの効果を考慮した新しい不飽和浸透方程式の解の特性, *第42回年次学術講演会講演概要集*, pp122-123, 1987.
- (9) 山田正、小林稔: 不飽和浸透の基本的特性とヒステリシスを考慮した新しい不飽和浸透理論, *第32回水理講演会論文集*に投稿中.
- (10) T.Yamada and M.Kobayashi: Kinematic Wave Characteristics and New Equations of Unsaturated Infiltration, *J.Hydrology*に投稿中.