

I-41 コンクリート床版の動的応答について

専修大学北海道短大 正 員 三上 敬司
 日本大学生産工学部 正 員 能町 純雄
 稚内開発局 正 員 吉田 紘一
 室蘭工業大学工学部 正 員 松岡 健一

1. まえがき

北海道開発局土木試験所¹⁾では、図-1に示したように、両端固定、他端自由である 3090×1900×100mm の鉄筋コンクリートの長方形版上の載荷位置に緩衝材として 100×100×3mm のゴム板を設置し、このゴム板へ重錘を落下高さ 10~160cm まで10cm 間隔で落下させ、衝撃荷重を受ける鉄筋コンクリート版の応答性状や破壊機構を解明するための基礎的実験を行っている。

一方、この実験の理論解析としては、著者ら²⁾が無限版上にゴムの緩衝効果を考慮したバネを設けて、その上に剛体を落下させ場合の衝撃力及び衝撃曲げモーメントを求め、さらに、上述した実験値と比較検討している。しかし、鉄筋コンクリート床版を無限版として理論解析しているために境界の影響を受けていないので、ある程度時間が経過したところでは挙動が一致していない。

ところで、実験の支持条件である両端固定、他端自由の板の厳密解は求められていないので、一般的に近似解として、梁理論で求めた Levy-type の解³⁾や多項式近似解⁴⁾を用いて、この解が境界条件を満足するように求める方法等がある。そこで、本研究は、Levy-type の解を用い、図-2 (I) に示したように境界条件が両端固定かつ他端自由の長方形板に関する自由振動に対するモード及び固有角振動数(固有周期)を求めている。

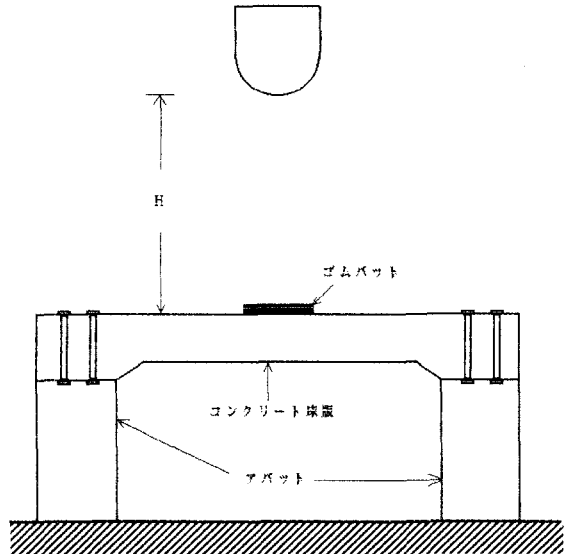


図-1 開発局土木試験所での落下衝撃実験装置

2. 理論解析

図-2 (I) のように、本論では境界条件が両端固定、他端自由の ξ 、 η 軸に関して対称の長方形板 ($2a \times 2b$) であるから、図-2 (II) のようにちょうど 1/4 区分の板 ($a \times b$) についての自由振動に関する解を求めればよいことになる。 $\circ$ は、板の端に沿って端反力が 0 であり、さらに板の傾きが 0 であるスリップせん断条件を表している。 F は、自由辺を表し、 s は、単純支持または分布曲げモーメントを伴う単純支持を表している。図 (III) と図 (IV) をそれぞれ解いた変位を重ね合わせることによって、図 (II) の変位となる。最初に、密度 ρ 、ポアソン比 ν 、弾性係数 E 、厚さ h の長方形板の自由振動による中立軸の鉛直変位 w を求める。無次元化された ξ 、 η 方向に関する平板の振動方程式は、次式となる。

$$\frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} + 2\phi^2 \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \phi^4 \frac{\partial^4 w(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} - \phi^4 \lambda^4 w(\xi, \eta) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\phi = b/a$ 、 $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 、 $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$: 剛度

図(Ⅱ)の $w_1(\xi, \eta)$ に対する解は、Levy型で次のように表される。

$$w_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m(\eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \dots\dots\dots (2)$$

式(1)の微分方程式に式(2)を代入して、その解は、次式となる。

$$w_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^K (A_m \cosh \beta_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \\ + \sum_{m=K+2}^{\infty} (A_m \cosh \beta_m \eta + D_m \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 A_m 、 D_m は境界条件によって決定される定数である。

次に、図(Ⅲ)の境界条件は、 $\xi=0$ の端に沿って単純支持、 $\eta=0$ と $\xi=1$ に沿ってスリップせん断条件、 $\eta=1$ のところでは振動曲げモーメント $M_1(\xi)$ が分布している。この曲げモーメントを無次元化して級数に展開すると次のように表される。

$$\frac{b^2 M_1(\xi)}{aD} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi\xi}{2} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 E_m は、モーメント係数である。

境界条件 $\eta=1$ では、自由辺なので 反力 $V_x=0$ となるから、 D_m を消去して $w_1(\xi, \eta)$ を A_m のみで表される。さらに、これを式(4)に代入すると、 E_m と A_m の関係式となるので、これを式(3)に代入すると、 $w_1(\xi, \eta)$ は、次式のように級数展開した解となる。

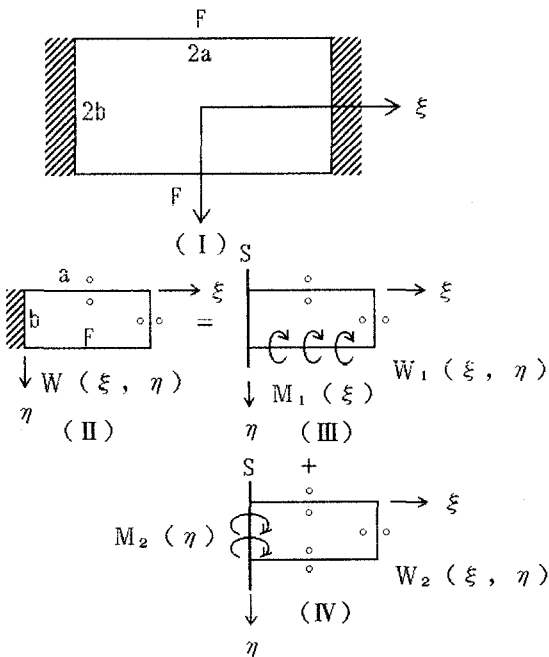


図-2 両端固定、他端自由な長方形板と1/4区分板

$$w_1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^K \frac{E_m}{\theta_{11m}} (\cosh \beta_m \eta + \theta_{11m} \cos \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \\ + \sum_{m=K+2}^{\infty} \frac{E_m}{\theta_{22m}} (\cosh \beta_m \eta + \theta_{22m} \cosh \gamma_m \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{2} \dots\dots (5)$$

次に、図(Ⅳ)の境界条件は、 $\xi=0$ に沿って分布曲げモーメント $M_2(\eta)$ を伴うピン support、 $\xi=1$ 、 $\eta=0$ 、 1 でスリップせん断条件となる。そこで、変位及び分布曲げモーメントを次式のように、

$$w_2(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^{\infty} Y_p(\eta) \cos p\pi\eta \quad (6) \quad \frac{aM_2(\eta)}{D} = \sum_{p=0}^{\infty} E_p \cos p\pi\eta \quad (7)$$

と置くと、 $w_2(\xi, \eta)$ は、 $w_1(\xi, \eta)$ と同様にLevyの解を用いて求めると次式となる。

$$w_2(\xi, \eta) = \sum_{p=0}^K \frac{E_p}{(\gamma_p^2 + \beta_p^2) \cos \gamma_p} \\ \times \left[\cos \gamma_p (1-\xi) - \frac{\cos \gamma_p}{\cosh \gamma_p} \cosh \beta_p (1-\xi) \right] \cos p\pi\eta \\ + \sum_{p=K+1}^{\infty} \frac{E_p}{(\gamma_p^2 + \beta_p^2) \cosh \gamma_p} \\ \times \left[\cosh \gamma_p (1-\xi) - \frac{\cos \gamma_p}{\cosh \gamma_p} \cosh \beta_p (1-\xi) \right] \cos p\pi\eta \dots\dots (8)$$

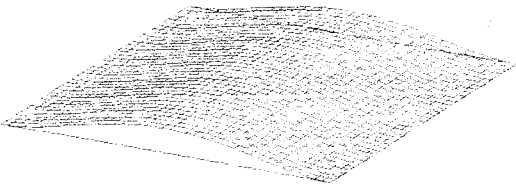
式(5)と(8)を重ね合わせることによって、1/4板の $w(\xi, \eta)$ は次のように求められる。

$$w(\xi, \eta) = w_1(\xi, \eta) + w_2(\xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

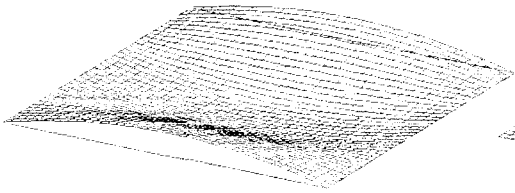
ここで、上述した各式の係数については、Appendixで示している。

表-1 モードに対する固有角振動数と固有周期

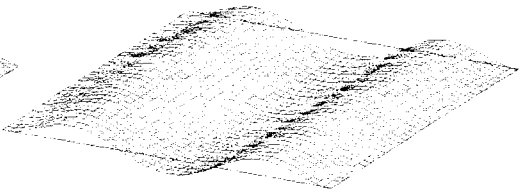
モード	λ^2	固有角振動数 $\omega(\text{rad/sec})$	固有周期 $T(\text{sec})$
1	5.5783	560.0613	0.01122
2	11.7858	1183.2821	0.00531
3	30.1709	3029.1380	0.00207
4	37.6698	3782.0185	0.00166
5	38.6987	3885.3141	0.00162



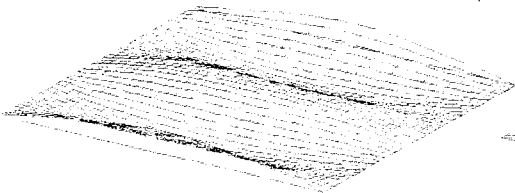
(a) 一次モードの振動形



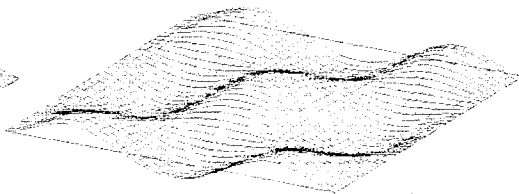
(b) 2次モードの振動形



(c) 3次モードの振動形



(d) 4次モードの振動形



(e) 5次モードの振動形

図-3 1次から5次までの平板の振動形

3. 数値計算例

本研究では、北海道開発局土木試験所で行われた落下衝撃実験の供試体である両辺固定、他端自由の鉄筋コンクリート床版を対象としているので、 $\rho=2.5\text{tf/m}^3$ 、 $\nu=1/6$ 、 $E=3.0\times 10^6\text{tf/m}^2$ 、 $h=0.1\text{m}$ 、スパン長 $2a=2\text{m}$ 、幅 $2b=1.9\text{m}$ として数値計算を行った。

式(5)、式(8)をそれぞれの境界条件を適用することによって、形成された係数マトリックスが0となる λ^2 を求めることによって、変位モード及び固有角振動数を求めることができる。図-3(a)～(e)では、各固有角振動数のおける1次から5次モードまでの平板の振動形を表している。表-1には、1次から5次モードまでの固有角振動数と固有周期を示している。

4. あとがき

この種の問題に関して、境界条件によっては板理論による厳密な解が求められていない。従って、梁理論を境界条件に合わせて、本論のようにLevyの解を用いるかまたは多項式を用いて自由振動による近似解を求めることができる。しかし、多項式の近似解ではより厳密な解に近づけるには膨大なマトリックスを作らなければならない厄介な問題にぶつかることになるので、本論のLevyの解を用いた方が用意に求めることができると思われる。

今後は、この固有角振動数によるモードを用いて、モーダル・アナリシスによって北海道開発局土木試験所で行われた落下衝撃実験と比較検討を行う予定である。

本研究の数値計算に当って、北海道大学大型計算機センターのH I T A C - 682Hを使用して計算を行った。

参考文献

- 1) 佐藤睦治、吉田紘一、千葉利則：衝撃を受けるRC版の挙動に関する実験について、落石衝撃力及びロックシェッドの設計に関するシンポジウム、pp.21～27、7月、1986
- 2) 三上敬司、能町純雄、松岡健一、吉田紘一：コンクリート床版へのソフト衝撃に関する評価、pp.750～751、9月、1987
- 3) Gorman, D.J.: Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier, pp.1～227, 1982
- 4) 西岡隆：構造振動解析、培風館、pp.136～160、1987
- 5) 小坪清真：土木振動学、森北出版、pp.251～264、1973
- 6) Timoshenko, S.P., Woinosky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, McGRAW-HILL, pp.4～78、1959

A p p e n d i x

式(5)の第1の級数は $(m\pi/2)^2 < \lambda^2$ 、第2の級数は $(m\pi/2)^2 > \lambda^2$ である。

$$\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi/2)^2}, \quad \gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi/2)^2} \quad \text{または} \quad \gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi/2)^2 - \lambda^2}$$

$$\nu^* = 2 - \nu$$

$$\theta_{1m} = \frac{\beta_m [\nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2]}{\gamma_m [\nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2 - \gamma_m^2]} \frac{\sinh \beta_m}{\sinh \gamma_m}$$

$$\theta_{2m} = \frac{\beta_m [\nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2]}{\gamma_m [\gamma_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi/2)^2]} \frac{\sinh \beta_m}{\sinh \gamma_m}$$

$$\theta_{11m} = [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2] \cosh \beta_m + \theta_{1m} [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 + \gamma_m^2] \cosh \gamma_m$$

$$\theta_{22m} = [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 - \beta_m^2] \cosh \beta_m + \theta_{2m} [\nu \phi^2 (m\pi/2)^2 - \gamma_m^2] \cosh \gamma_m$$

式(8)の第1の級数は $(p\pi)^2 < \lambda^2$ 、第2の級数は $(p\pi)^2 > \lambda^2$ である。

$$\beta_p = (1/\phi) \sqrt{\lambda^2 + (p\pi)^2}, \quad \gamma_p = (1/\phi) \sqrt{\lambda^2 - (p\pi)^2} \quad \text{または} \quad \gamma_p = (1/\phi) \sqrt{(p\pi)^2 - \lambda^2}$$