

I-38 数理最適設計における初期処理に関する基礎的研究

室蘭工業大学 正員 杉本博之
新日本製鐵株式会社 山村和人

1. まえがき

例えば右図のような最適化問題¹⁾を考えてみよう。この問題は、次のように定式化される。

制約条件式

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 - 6x_1 - 4.5x_2 + 13.5 &\leq 0 \\ -2x_1^2 + 6x_1 - x_2 - 2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0.0, \quad x_2 \geq 0.0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

のもとで、目的関数

$$F = 0.5x_1 + x_2 \quad (2)$$

を最小にする x_1 、 x_2 を決定せよ。

一般にこの種の問題は、数理最適設計法により解かれるが、その解の精度、効率は初期値に大きく依存する。数理最適設計法には、種々の手法があるが、初期値への依存性はどの手法でも高い。

図-1の例は、 X^* という全域的最適解と X^L という局所的最適解を持つ問題である。この時、

初期値がAの領域にあればその解は X^L に収束するし、Bの領域に初期値があれば X^* に収束するであろう。また、初期値が X^* に近ければ少ない繰り返し回数で、遠ければ多くの繰り返し回数で収束することになる。さらに、初期値が制約条件式を大きく満足していなければ、許容解を得られないこともある。

このように、数理最適設計はその信頼性、効率性が初期値に大きく依存するにもかかわらず、一般の工業最適設計の問題においては、最適設計の予想がつかない事が多く、初期値の設定は試行錯誤的になさざるを得ない。上記の程度の問題であれば、1回のシステムの解析(式(1)、(2)の計算)は容易であるが、一般の工業最適設計の問題においては、かなりの計算時間を要するので、最良の初期値が設定されることが望ましい。

数理最適設計法の研究は、当然その信頼性、効率性の向上に主眼が置かれて来たが、従来は手法そのものの研究が大半であった。つまり、このような悪い初期値を与えても、このように解に収束するよという手法のタフさの向上、証明が研究の主流であり、そこではできるだけ悪い初期値が設定されていた。一方、初期値の設定に関する研究は皆無といっても過言ではないであろう。しかし、多少古典的な数理最適設計の手法でも、良い初期値を与えれば、すみやかに解に収束する。つまり、数理最適設計法の手法の研究がほぼ出尽くした今、初期値設定の研究は、工業最適設計の重要な課題の一つと考えられる。

以上のような背景のもとに、本報告では、数理最適設計法における初期値設定に関する一つの手法を提案する。それは、三浦等²⁾のACCESS2のNEWSUMT2を応用したものである。まだ基礎的な段階であるが、簡単な数値計算例における成功例とともに発表するものである。

2. 初期処理の考え方

初期値設定の基本的な考え方は、与えられた初期値を少ないシステムの解析回数で改良することにある。ランダムに設計を発生し、それぞれに対するシステム解析の結果より、初期値を改良する方法もある。こ

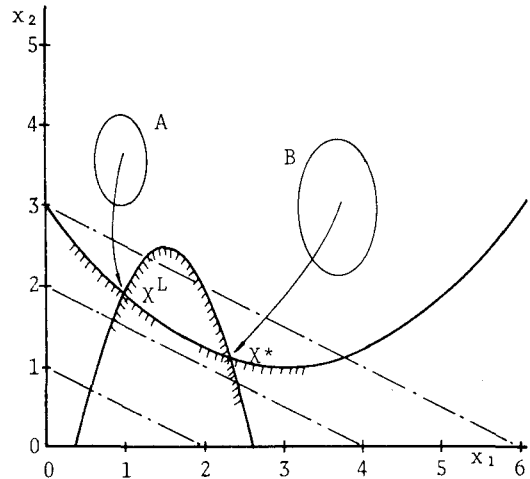


図-1 2変数問題

れは、設計変数の数が少ない場合は有効かもしれないが、多くなると設計変数の組合せが非常に多くなり実用的ではない。何等かの数理最適設計法の応用が必要と考えられるが、種々のケースに対応し、上記の要求を満足する手法としては、SLPとNEWSUMT2が考えられる。両者とも1次の微係数を用いる線形近似の考え方を基本としている。しかし、SLPは、初期値が非常に悪条件にある時に信頼性に欠けるし、そのためのムーヴリミットも、初期段階では設定が非常に困難であるし、逆効果になる危険性もある。そこで、初期処理のための数理最適設計法として、NEWSUMT2を応用した。

一般の最適設計問題は、次のように定式化される。

$$\text{目的関数} : F(\mathbf{x}) \longrightarrow \min \quad (3)$$

$$\text{ただし、制約条件式} : g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (j=1 \sim m) \quad (4)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (5)$$

となる x_i ($i=1 \sim n$) を決定せよ。

式(3)～(5)の制約条件のある最適化問題を、2次拡張ペナルティ関数法³⁾では、次のように無制約の最適化問題に変換する。

$$\Phi(\mathbf{x}, r^{(k)}, \varepsilon^{(k)}) = F(\mathbf{x}) + r^{(k)} \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(\mathbf{x}, \varepsilon^{(k)}) \longrightarrow \min \quad (6)$$

ここで、

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x}, \varepsilon^{(k)}) = \begin{cases} -1/\tilde{g}_j(\mathbf{x}) & (\tilde{g}_j(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{(k)}) \\ -\frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \left\{ \left(\frac{\tilde{g}_j(\mathbf{x})}{\varepsilon^{(k)}} \right)^2 - 3 \left(\frac{\tilde{g}_j(\mathbf{x})}{\varepsilon^{(k)}} \right) + 3 \right\} & (\tilde{g}_j(\mathbf{x}) > \varepsilon^{(k)}) \end{cases} \quad (7)$$

式(6)は、無制約の最適化問題であり、DFP⁴⁾あるいはBFGS⁴⁾により解を得ることができる。 k はイテレーションの回数を表し、この手法は k に関して収束計算になる。最適解を得るまでに多くのシステムの解析を要するのが一般である。そこで、式(6)、(7)の $F(\mathbf{x})$ 、 $\tilde{g}_j(\mathbf{x})$ の代り、それらの $\mathbf{x}^{(k)}$ に関する線形近似式を用いたのがNEWSUMT2の考え方である。

このNEWSUMT2の考え方を初期処理に応用する。ただし、イテレーションの回数は1回とする。だから式(6)、(7)の (k) は不要となる。また、1点のみの情報では、後述のように(図-3)信頼性に欠けるので、複数(N)の初期値を与え、それぞれの点に関して線形近似された式の平均値を用いることにする。

結局、本論文の初期処理問題は、以下のように定式化される。

$$\Phi(\mathbf{x}, r, \varepsilon) = \bar{F}(\mathbf{x}) + r \sum_{j=1}^m \bar{g}_j(\mathbf{x}, \varepsilon) \longrightarrow \min \quad (8)$$

ここで、

$$\bar{g}_j(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} -1/\bar{g}_j(\mathbf{x}) & (\bar{g}_j(\mathbf{x}) \leq \varepsilon) \\ -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\bar{g}_j(\mathbf{x})}{\varepsilon} \right)^2 - 3 \left(\frac{\bar{g}_j(\mathbf{x})}{\varepsilon} \right) + 3 \right\} & (\bar{g}_j(\mathbf{x}) > \varepsilon) \end{cases} \quad (9)$$

また、

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{l=1}^N \bar{F}_l(\mathbf{x}) \right) / N \\ \bar{g}_j(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{l=1}^N \bar{g}_{jl}(\mathbf{x}) \right) / N \quad (j=1 \sim m) \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 N は与えられた初期値の数、 $\bar{F}_l$ 、 $\bar{g}_{jl}$ ($j=1 \sim m$)は、それぞれ初期値 $\mathbf{x}_l^{(0)}$ に関して線形近似された目的関数および制約条件式である。

式(8)～(10)で構成される無制約最適化問題を、DFPあるいはBFGSで解くことになる。

本論文で提案している初期処理の流れ図を図-2に示した。

式(8)を最適化するための初期値 $\mathbf{x}^{(0)}$ は、次式で計算される値を用いた。

$$\mathbf{x}_i^{(0)} = \left(\sum_{l=1}^N x_{il}^{(0)} \right) / N \quad (11)$$

この $X^{(0)}$ に対してシステムを1度解析し、その時の目的関数および制約条件式の値をそれぞれ $F^{(0)}$ 、 $G_j^{(0)}$ ($j=1\sim m$)とする。最初の r の値は、 $F^{(0)}$ と同じオーダーの10のべき乗の値を用いる。

このような条件のもとで式(8)を最小にする X を求め、この X に対してまたシステムを解析する。その時の目的関数および制約条件式の値をそれぞれ F 、 G_j ($j=1\sim m$)とすると、上記の $F^{(0)}$ 、 $G_j^{(0)}$ ($j=1\sim m$)とこれらの値を比較し、満足できる程初期値が改良されていなければ、 r の値のみを更新して、また式(8)の最適化を行なう。

この時の比較の判断および更新が必要だとされた場合に新しく試みる r の値の決定等は、プログラム化するのが大変困難であり、不十分なアルゴリズムでは逆効果になるので、本論文の段階では、ユーザーとの対話で行なうことにした。

以上の初期処理法の特徴としては、ユーザーから当初与えられた N 個の設計(改良前の初期値)に対する感度解析さえ1度行えば、後は最小で2回、多くても5回程度のシステムの解析で初期値を改良できること。この時、 r の値のみを適当に変えることにより、後記の計算例で示すように無制約最適化問題の設計空間を自由に變形でき、容易に良い初期値を決定できること、さらに、部分的に対話型の判断および決定を行っているので、柔軟性に富むこと等が上げられる。

3. 数値計算例

数値計算例として、図-1の2変数問題および交差するビームの最小重量設計問題に、本論文の方法を応用してみた。

最適化手法としては、逐次2次計画法(SQP)、一般化縮約勾配法(GRG)、逐次線形計画法(SLP)および拡張ラグランジュ係数法(AL)を用いた。また、初期処理のための無制約最適化手法としてはBFGSを用いた。いずれも汎用最適化プログラムADS⁵⁾に含まれるものを使っている。

また、式(8)の ϵ の値は-0.05としている。

(1) 2変数問題

式(1)、(2)および図-1に示す2変数問題の例である。 $r=1$ の時の種々の初期値の組合せに対する式(8)の関数の等深線図を図-3~6に示した。図-3、4はそれぞれ、 $(x_1, x_2) = (1, 3)$ 、 $(6, 0.1)$ において目的関数、制約条件式を線形化し、それらを式(8)に代入した場合の中の等深線図である。図-3に対して無制約最適化を行なうと、その解はおおよそ $(1.1, 4.1)$ となり、これを初期値とする最適化では、図-1の X^L に収束することが予想される。これが、前記した1点のみの情報による初期処理は信頼性に欠けるということの理由である。ところが、 $(1, 3)$ と $(6, 0.1)$ の2点の情報を用いると、その時の中の等深線図は図-5のようになり、改良された初期値が得られることが図より予想される。

図-6は、同様に $(1, 3)$ と $(3, 1.5)$ の2点の情報を利用した例であり、やはり改良された初期値が得られる。

以上を含む種々のケースについて最適設計を行い、その結果を示したのが表-1である。 F が目的関数の値であり、 X^L に対しては2.40程度であり、 X^* に対しては2.27程度となる。 N_f は、最適解が得られるまでに要したシステムの解析回数である。上段の4ケースは、1点のみの初期値を与えた場合で、なんら初期処理をしていない。つまり、従来の最適設計の結果ということになるが、 X^L に収束しているケースが7ヶ

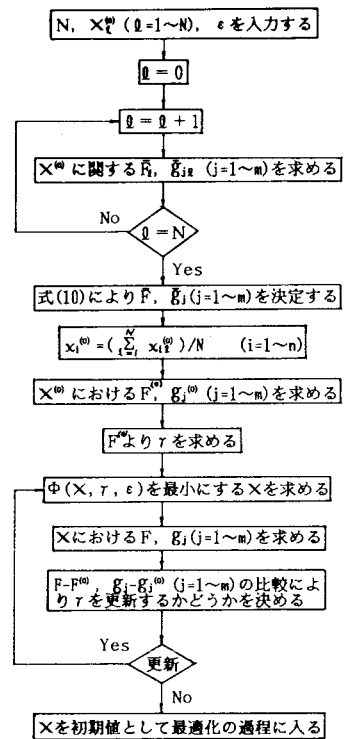


図-2 初期処理の流れ図

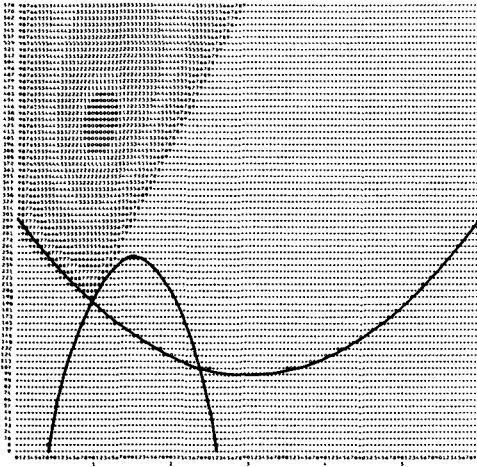


図-3 (1, 3) に対する目的関数

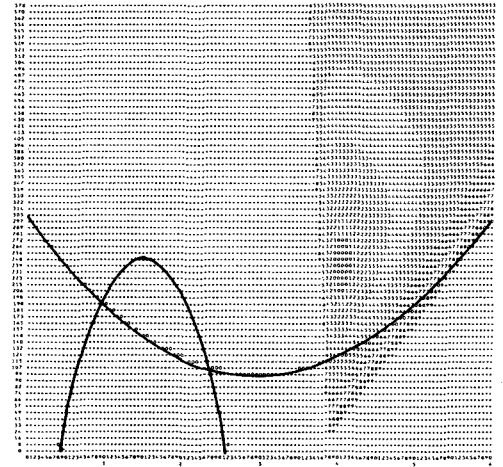


図-4 (6, 0.1) に対する目的関数

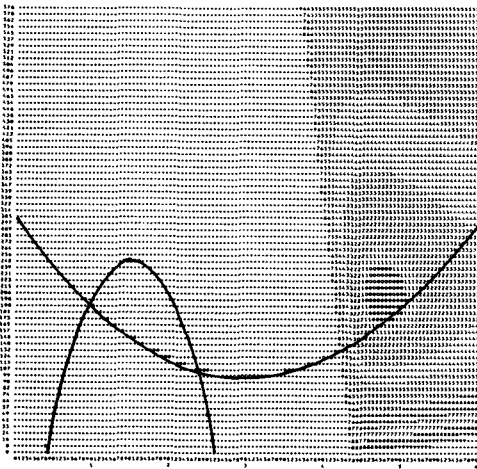


図-5 (1, 3) + (6, 0.1) に対する
目的関数

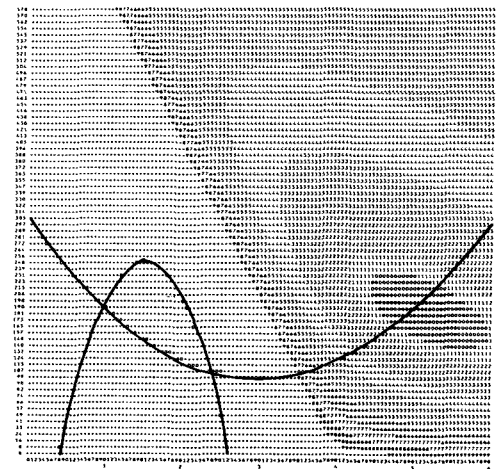


図-6 (1, 3) + (3, 1.5) に対する
目的関数

表-1 2変数問題の結果

最適化手法		SQP		GRG		SLP		AL	
初期値	計算された初期値	F	Nf	F	Nf	F	Nf	F	Nf
(1, 3)		2.388	12	2.403	15	2.404	14	2.404	90
(5, 5)		2.269	30	2.404	31	2.267	29	2.266	107
(6, 0.1)		2.269	60	2.260	19	2.267	26	2.266	167
(1.5, 3)		2.404	23	2.395	36	2.402	17	2.404	121
(1, 3) + (6, 0.1)	(4.57, 2.02)	2.269	40(30)	2.264	31(21)	2.266	29(19)	2.266	116(106)
(1, 3) + (5, 5)	(4.29, 2.19)	2.263	39(29)	2.266	29(18)	2.266	29(19)	2.266	123(113)
(1.5, 3) + (6, 0.1)	(4.24, 2.18)	2.263	39(29)	2.253	38(28)	2.266	29(19)	2.266	122(112)
(1.5, 3) + (5, 5)	(3.88, 2.34)	2.265	39(29)	2.260	30(20)	2.266	29(19)	2.266	123(113)

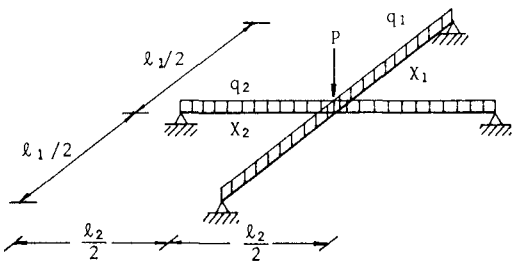


図-7 交差するビームの問題⁵⁾

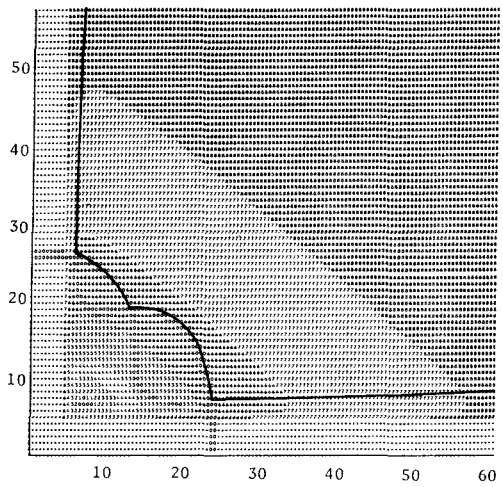


図-8 $\tau = 1000$ の時の目的関数

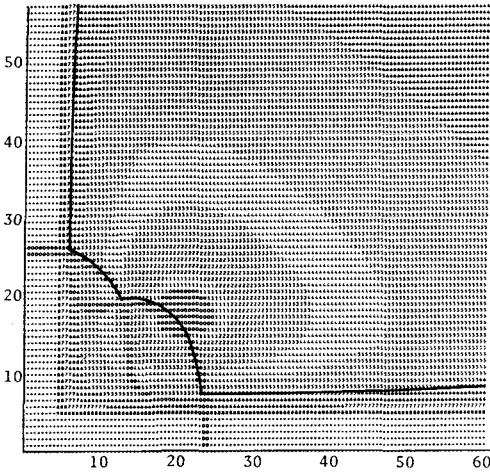


図-9 $\tau = 20000$ の時の目的関数

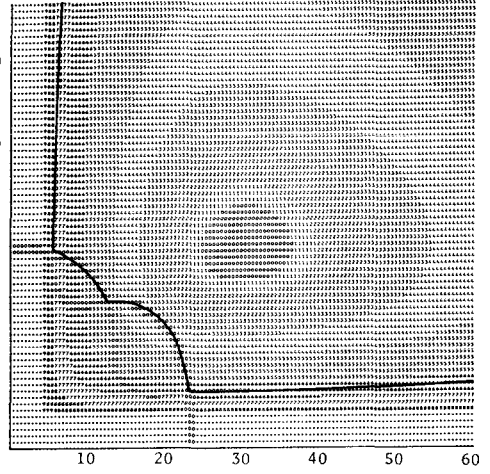


図-10 $\tau = 50000$ の時の目的関数

表-2 交差するビームの問題 (3 極値問題) の結果

最適化手法		SQP		GRG		SLP		AL	
初期値	計算された初期値	F	Nf	F	Nf	F	Nf	F	Nf
(3, 50)		3607	35	3216	55	3607	20	3607	153
(8, 30)		3607	40	3608	19	3607	17	3606	111
(30, 10)		3199	23	3198	14	3196	17	3196	102
(55, 3)		3195	29	3199	32	3196	26	3196	137
(50, 50)		3569	65	3197	37	3566	29	3196	118
(3, 50)+(55, 3)	(20.6, 17.8)	3196	53(43)	3197	45(35)	3196	32(22)	3196	148(138)
(8, 30)+(55, 3)	(36.2, 11.1)	3198	32(22)	3196	25(19)	3196	26(16)	3196	99(89)
(8, 30)+(30, 10)	(22.5, 19.0)	3196	54(42)	3196	51(41)	3196	35(25)	3196	132(122)
(50, 50)+(55, 3)	(39.8, 15.4)	3196	37(28)	3197	41(32)	3196	31(22)	3196	151(142)

ースある。下段の4ケースは、本論文の方法を用い、2点の情報から改良初期値を計算し、それを用いた最適設計の結果である。図-3~6からも予想されたように、すべてのケースで全域的な最適解 X^* に収束している。なお、()内の数字は、計算された初期値が与えられてからの最適化に要したシステムの解析の回数である。

解の信頼性が高まるのみならず、初期値(6, 0.1)のSQP、ALのNfを比較してわかるように、効率も向上している。

(2) 交差するビームの問題

図-7に示す交差するビームの最小重量設計問題である。荷重とスパン長の与え方で、局所的最適解の数が異なる問題である。詳細は文献6)を参照されたい。ここで扱っているのは、解が3つあるケースである。

計算結果を、図-8~10、表-2に示した。図-8~10は、(55,3)および(3,50)の2点を与えた時の式(8)の中の等深線図を、 r の3種類の値(1000,20000,50000)に対して計算したものである。 r の値のみで、無制約最適化問題の設計空間を自由にコントロールできることがわかる。

表-3は、前例と同じ内容の表である。やはり、初期処理をしない上段の場合は、9ケースで局所的最適解に収束しているが、初期処理をした下段の場合は、すべて全域的最適解に収束し、トータルの構造解析の回数もほとんど上段と差がない。

4. 結論およびあとがき

従来、ほとんど研究されていなかった、数理最適設計法における初期処理について1方法を提案した。

本論文より得られた事項を箇条書にすると、以下のようになる。

- (1) 基本的には、NEWSUMT2の考え方を応用したものであるが、 r の値の更新等を対話型システムとしたので、初期処理の過程の柔軟性が増した。
- (2) 本論文の方法は、汎用最適化プログラムADSの前処理として研究されているものである。そのため、ユーザーから非常に悪条件の初期値を提供されることも考慮しなければならないが、上記の柔軟性および複数の設計点の情報を初期に利用することにより、信頼性を向上させることができた。
- (3) この論文の計算例は、信頼性の向上に重点を置いて説明されたが、本論文の方法は、効率も向上させることができる。

本論文は、新日本製鐵との共同研究の成果の一部である。また、本研究の遂行に当り、室蘭工業大学土木工学科卒論生 石川英俊君の協力があつたことを付記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) Sugimoto, H. ; Basic Research on an Application of Geometric Programming to Sequential Unconstrained Minimization Technique, 室蘭工業大学研究報告, 第9巻, 第3号, 1978.
- 2) Schmit, L.A. and H.Miura ; AN ADVANCED STRUCTURAL ANALYSIS/SYNTHESIS CAPABILITY - ACCESS2, Inter. J. Numerical Methods in Engineering, Vol.12, 1978.
- 3) Haftka, R.T. and J.H.Starnes ; Application of a Quadratic Extended Interior Penalty Function for Structural Optimization, AIAA J., Vol.14, No.6, 1976.
- 4) 今野浩, 山下浩 ; 非線形計画法, 日科技連, 1978.
- 5) Vanderplaats, G.N. and H.Sugimoto ; A GENERAL-PURPOSE OPTIMIZATION PROGRAM FOR ENGINEERING DESIGN, Computers and Structures, Vol.24, No.1, 1986.
- 6) Kirsh, U. (山田善一, 大久保禎二監訳) ; 最適構造設計-概念・方法・応用-, 丸善株式会社, 1983.