

I-32 二層同心円柱の波動伝播問題における 接触面の影響

室蘭工業大学	学生員	竹内 徹
室蘭工業大学	正員	松岡 健一
室蘭工業大学	正員	岸 徳光
日本大学	正員	能町 純雄
北海道開発局	正員	吉田 紘一

1. まえがき

積層複合材の基本的なものの一種として、同心円状におかれた、異質な材料からなる、多層同心円柱があるが、これらは鋼管構造物などの理想化されたモデルとみることができ、三次元弾性論で厳密に解析することができる。著者らは、これまで円柱座標で与えられる、波動伝播問題を種々解析して来た。^{1)~4)} 弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒が同心円状におかれた、二層同心円柱の問題に対しても種々検討を行なっているが、これらは主として円筒と円柱の境界が連続な場合についてのものであり境界で、変位や応力の不連続な場合については、あまり検討を行なっていない。ここではこの境界面の状態に着目し、境界面の状態が位相速度に及ぼす影響を検討するとともに、境界面での応力比についても検討を加えることを目的としている。

解析は、円柱および円筒の波動伝播の基礎変位式を境界の条件を満足するように組合せて行なうもので、縦波の位相速度分散曲線と、応力比曲線を境界面での状態および、弾性定数比を変化させて求め検討を行なった。

2. 基礎変位式

Hankel変換を用いた円柱座標に関する波動伝播問題の変位解は、すでに求めているので、^{1), 2)} ここではその求め方の概要を述べ、結果のみを示すこととする。

図-1のように、円柱軸をz軸とする (r, θ, z) 座標系を考え、波動はz軸方向に進行する定常波動伝播を仮定し、波動の角速度を ω 、伝播速度をVとし、周方向の波動次数をmとすれば、円柱座標で表わされる波動方程式を半径方向にHankel変換することにより、円筒の各変位成分 (u, v, w) は次のように求められる。

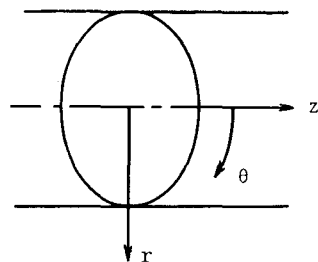


図-1 円柱座標

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos m\theta & \cos m\theta & 0 \\ \sin m\theta & -\sin m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_{mr} \\ \tilde{B}_{mr} \\ \tilde{W}_{mr} \end{Bmatrix} \exp[i\omega(t-z/V)] \quad (1)$$

$$\{\tilde{A}_{mr} \quad \tilde{B}_{mr} \quad \tilde{W}_{mr}\}^T = \sum_{k=1}^{\infty} K_{nk} \{F_{Ank} \quad F_{Bnk} \quad F_{Cnk} \quad E_{nk}\}^T \quad (2)$$

$$\begin{aligned} F_{Ank} &= \alpha_{nk}/2\mu + (m+1)A_{nk} + (m-1)B_{nk} - iNE_{nk}/2 \\ F_{Bnk} &= \alpha_{nk}/2\mu + (m+1)A_{nk} + (m-1)B_{nk} + iNE_{nk}/2 \\ F_{Cnk} &= \beta_{nk}/2\mu + (m+1)A_{nk} - (m-1)B_{nk} + iNE_{nk} \end{aligned} \quad (3)$$

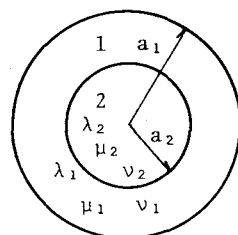


図-2 二層同心円柱

$$K_{mk} = \begin{vmatrix} \chi_{mp}^{(0)}(N_u r)/N_u & 0 \\ 0 & -\chi_{ms}^{(0)}(N_u r)/N_u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\mu N^2/\rho\omega^2)\{\chi_{mp}^{(0)}(N_u r)/N_u - N_\alpha \chi_{mp}^{(0)}(N_\alpha r)/N^2\} & 0 \\ (\mu N^2/\rho\omega^2)\{\chi_{ms}^{(0)}(N_u r)/N_u - N_\alpha \chi_{ms}^{(0)}(N_\alpha r)/N^2\} & 0 \\ -i(2\mu N/\rho\omega^2)\{G_m^{(0)}(N_\alpha r) - G_m^{(0)}(N_u r)\} & G_m^{(0)}(N_\alpha r) \end{vmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $N = \omega/V$ 、 $N_u^2 = N^2 - \rho\omega^2/\mu$ 、 $N_\alpha^2 = N^2 - \rho\omega^2/(2\mu + \lambda)$ 、 ρ ：円筒の密度； μ, λ ：Lameの弾性定数であり、 m は波動の円周方向のモードを示すもので、 $m=0$ のとき縦波動、 $m=1$ のとき曲げ波動を表わす。また式中の関数 G, χ は、円筒の外半径を a_1 、内半径を $a_0 = a_2$ とすると次のように表わされる。

$$G_m^{(0)}(Nr) = \frac{R_{m,m}^{(0)}(Nr)}{R_{m,m}^{(0)}(Na_k)} \quad \chi_{mp}^{(0)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(0)}(Nr)}{R_{m,m}^{(0)}(Na_k)} \quad \chi_{ms}^{(0)}(Nr) = \frac{R_{m-1,m}^{(0)}(Nr)}{R_{m,m}^{(0)}(Na_k)} \quad (5)$$

$$R_{j,m}^{(0)}(Nr) = I_j(Nr)K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1})K_j(Nr) \quad (6)$$

ただし、 I, K は変形第1種および第2種のBessel関数である。また式中の係数 α, β, A, B, E は円筒の内外面の変位および応力で与えられるもので次のように示される。

$$\alpha_{mk} = \tilde{\tau}_{r\theta}|_{r=a_k}, \quad \beta_{mk} = \tilde{\sigma}_{rr}|_{r=a_k}, \quad A_{mk} = \tilde{\lambda}_{\theta r}|_{r=a_k}/a_k, \quad B_{mk} = \tilde{\lambda}_{\theta r}|_{r=a_k}/a_k, \\ E_{mk} = \tilde{W}_{\theta r}|_{r=a_k}, \quad \tau_{r\theta} = \tilde{\tau}_{r\theta} \sin m\theta \exp[i\omega(t-z/V)], \quad \sigma_r = \tilde{\sigma}_{rr} \cos m\theta \exp[i\omega(t-z/V)] \quad (7)$$

以上が円筒に対する変位式であるが、円柱の場合は $a_2 = 0$ として $k=1$ の項のみを考慮することで与えられる。この場合、関数 R は次のようになる。

$$R_{j,m}^{(0)}(Nr) = I_j(Nr) \quad (8)$$

3. 境界条件

二層同心円柱を伝わる弾性波の速度は、2.で求めた変位式を円筒と円柱の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。いま円筒を表わすすべての量を添字1、円柱を表わすすべての量を添字2で示すと、2.で求めた解に対して、まず次の適合条件を満足しなければならない。

$$\text{円筒に対して} \quad \tilde{\lambda}_{\theta r-1}|_{r=a_k} = a_k A_{mk+1}, \quad \tilde{\lambda}_{\theta r-1}|_{r=a_k} = a_k B_{mk+1} \quad (9)$$

$$\text{円柱に対して} \quad \tilde{\lambda}_{\theta r-2}|_{r=a_1} = a_2 A_{m1+2}, \quad \tilde{\lambda}_{\theta r-2}|_{r=a_1} = a_2 B_{m1+2} \quad (10)$$

さらに、円筒の内外面における境界条件を考えると

i) 円筒の外面で、

$$\tau_{r\theta-1}|_{r=a_1} = 0, \quad \alpha_{m1+1} = 0, \quad (11) \quad \sigma_{r-1}|_{r=a_1} = 0, \quad \beta_{m1+1} = 0, \quad (12)$$

$$\tau_{r\theta-1}|_{r=a_1} = 0, \quad (13)$$

ii) 円筒の内面で、

円筒の内面は、円柱と接触しているので、接触面の条件によって異なる境界条件となる。本論では、この接触面の状態による影響を検討することが目的であるので、この取扱いが問題となるが、ここでは、接触面で半径方向変位および半径方向応力のみ連続でせん断力は、軸方向および周方向変位の相対的なずれに応じたせん断応力が生ずるもの、すなわち

$$u_1)_{r=a_2} = u_2)_{r=a_2}, \quad v_1)_{r=a_2} = v_2)_{r=a_2}, \quad w_1)_{r=a_2} = w_2)_{r=a_2} \quad (14)$$

$$\tau_{r\theta \cdot 1})_{r=a_2} = \tau_{r\theta \cdot 2})_{r=a_2} \quad \alpha_{m1 \cdot 2} = \alpha_{m2 \cdot 1} \quad (15)$$

$$\tau_{rz \cdot 1})_{r=a_2} = \tau_{rz \cdot 2})_{r=a_2} \quad (16)$$

$$\sigma_{r \cdot 1})_{r=a_2} = \sigma_{r \cdot 2})_{r=a_2} \quad \beta_{m1 \cdot 2} = \beta_{m2 \cdot 1} \quad (17)$$

$$\tau_{rz})_{r=a_2} = K[w_1)_{r=a_2} - w_2)_{r=a_2}] \quad (18) \quad \tau_{r\theta})_{r=a_2} = K[v_1)_{r=a_2} - v_2)_{r=a_2}] \quad (19)$$

従って、二層同心円柱を伝わる弾性波動の位相速度は、式 (9), (10), (14), (18) (19) で与えられる固有値方程式の根として求めることができる。

4. 数値解析および考察

数値解析は、縦波動 ($m=0$) に対して行ない、円筒と円柱の弾性係数、ポアソン比をそれぞれ E_1, ν_1, E_2, ν_2 として次の2つの場合について行った

i) $E_1 < E_2$ の場合 (Case I)

このとき、円柱の方が円筒より大きな弾性係数をもつ場合であるがこのとき用いた数値は、

$$\nu_1 = 1/6, \nu_2 = 0.3, E_2/E_1 = 7.0, \rho_2/\rho_1 = 3.2, a_2/a_1 = 0.25$$

ii) $E_2 < E_1$ の場合 (Case II)

このとき、円筒の方が円柱より大きな弾性係数をもつ場合であるがこのとき用いた数値は、

$$\nu_1 = 0.3, \nu_2 = 1/6, E_1/E_2 = 7.0, \rho_1/\rho_2 = 3.2, a_2/a_1 = 0.25$$

である。位相速度は、3. で示した固有値方程式の固有値として与えられるが、この場合固有値は方程式の中に陰な形で含まれるため、反復法により求める必要があり、5桁以上の精度を有するように求めた。

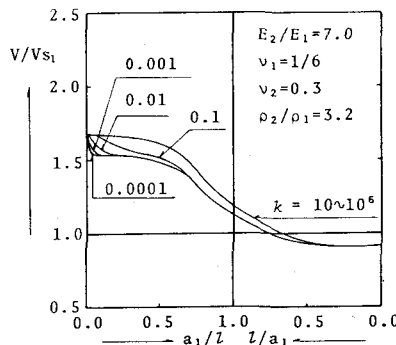
計算結果の一部を図に示すが、位相速度は、図で、縦軸に位相速度と小さい方のせん断波速度の比を、横軸には波動の半波長を l として、左半分には a_1/l を右半分には l/a_1 をとり、全体として波長零から無限大までを示すようにしている。図—3～4に縦波動の位相速度分散曲線を示した。

図—3は Case I の一次

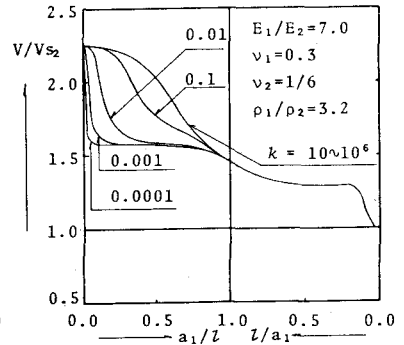
の分散曲線を示したがこの場合の k は軸方向および周方向変位の相対的ずれに乗ずる比例定数 K を無次元化したもので $k = K a_1 / E_1$ で表される値である。いずれの k に対しても波長無限大では $a_2/a_1 = 0.25$ に対して V/V_{s1} の値は 1.681 となるが、これは二層円柱を体積に応じた換算材料定数をもつ円柱としたときの bar velocity 1.679 とは

ば一致している。また、波長零では円筒体 (弾性波速度の小さい方) の Rayleigh 波の速度に一致している。

図—4には、Case II について同様一次の分散曲線を示したがこの場合の k は、 $k = K a_1 / E_2$ で表される値である。Case I と同様に k を与え分散曲線をそれぞれ比較するといずれの k に対しても波長無限大では V/V_{s2} の値は $a_2/a_1 = 0.25$ に対して 2.250 となるが、これも Case I と同様に換算断面の bar velocity 2.247 とほぼ一致している。しかし波長零ではこの場合は円柱 (弾性波速度の小さい方) のせん断波の速度



図—3 一次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case I)



図—4 一次の縦波動の位相速度分散曲線 (Case II)

と一致している。

図-5には縦波動の波動モードの接触面におけるせん断応力と軸方向応力の応力比 τ_{rz}/σ_z を $k=1000000$ の場合について示した。

Case I では σ_z は円柱部(硬い方)の値であるが応力比は正であり波長が無大に近づくに従い零に近づき、波長が短くなるに従い図に示す範囲では増加している。

Case II では σ_z は円筒部(硬い方)の値であり応力比は $a_1/l > 1.22$ で正で $a_1/l < 1.22$ で負となるが値はかなり小さく波長が無大に近づくに従いCase Iと同様零に近づく。

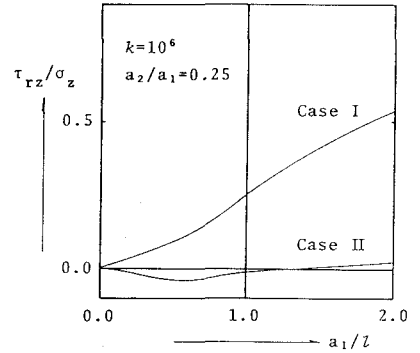


図-5 一次の縦波動の応力比
曲線

5. まとめ

接触面で変位や応力が完全に連続でない二層同心円柱の波動伝播問題を縦波動について解析し、位相速度と応力比を若干の数値に対して求め接触面の影響について検討を加えた。接触面の条件としては半径方向変位および半径方向応力のみ連続であり、せん断応力は周方向および軸方向変位のずれに応じた応力(比例定数 k)となるものとして解析した。

用いた数値は、鉄筋コンクリートや鋼管コンクリートを想定しているがこの結果次のことが明らかとなった。

- 1) 縦波動の位相速度は波長が無大に近づくに従い換算断面の bar velocity に近づくが、接触面の条件により、すなわち k の小さなものほど bar velocity に一致する波長が長くなっている。また k がある程度より大きなものでは、ほぼ同じ傾向を示している。
- 2) 縦波動の位相速度は k の値に無関係に波長が零に近づくに従い円筒部が軟いもの (Case I) は円筒部の材料の Rayleigh 波速度に近づき、円柱部の軟いもの (Case II) は円柱部の材料のせん断波速度に近づく。
- 3) 縦波動の接触面における応力比 τ_{rz}/σ_z は Case I、Case II とも波長が無大に近づくに従い零に近づく。
- 4) Case I の場合この応力比が大きくなることは、円柱部の応力が一定とすればせん断応力が大きくなることを示し、鉄筋コンクリートなどを考えるとき、波長によっては付着応力が静的な場合と比べて大きくなる可能性があることを示している。Case II の場合は応力比が小さく、動的な状態でもあまり問題がないことを示している。

尚、本論の数値計算は、北海道大学大型計算機センターおよび室蘭工業大学情報処理教育センターの計算機を用いて行なったものであることを付記する。

参考文献

- 1) 松岡健一・能町純雄：弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ波動の伝播速度について、土木学会論文報告集、第 258号, 1977.
- 2) 能町純雄・松岡健一・坂下正幸：弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について、土木学会論文報告集、第 293号, 1980.
- 3) Nomachi, S. G., K. G. Matsuoka, N. Kishi and T. Ohshima : Elastic Waves of Cylinder in an Elastic Medium, Proc. 4th A.S.C.E. EMD Speciality Conference, 1983
- 4) 松岡健一・能町純雄・岸徳光：入射せん断波を受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答、構造工学論文集, Vol. 31A, 1985.