

I-28 Hamilton 原理を用いた吊橋のねじり振動解析について

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎
北海道大学工学部 正員 渡 辺 昇

1. まえがき

吊橋は長大支間橋梁構造物として、最も適した橋梁形式である。しかし、吊橋は他の橋梁形式にくらべて比較的剛性が低いため、常に振動しやすいという大きな欠点がある。そこで、風荷重、地震荷重および列車走行荷重などの動的外力に対して、その安全性を検討することは吊橋の設計上重要な問題である。

これらの動力学的な諸問題を解析するための基本条件として、吊橋の固有振動性状を明確に知る必要がある。吊橋はケーブル、塔、補剛桁および吊材などよりなる複合構造物であるから、その固有振動性状にはかなり特異な点があり、非常に複雑である。厳密に吊橋の固有振動解析について考えると、ケーブルは空間曲線を呈し、補剛桁も最初からキャンバーを持っているため、ねじり変位は水平変位と連成することになる。さらに、補剛桁の断面変形は鉛直たわみ (Vertical deformation)、ねじり (Torsional deformation)、ずれ (Distorsional deformation) およびそり (Warping deformation) の4自由度があり、その変形成分は互いに独立に起こり得ない。つまり、鉛直たわみ、水平変位およびねじりの連成を考慮した非線形自由振動解析が必要となる。しかしながら、微小変位を対象とする場合には実用上連成振動は無視してよいと考えられ、鉛直たわみ振動、水平たわみ振動およびねじり振動はそれぞれ一つの独立した振動系と考えて取り扱っても差し支えないと考えられる¹⁾。

そこで、著者らは吊橋の鉛直たわみ振動に対して、補剛桁の支持条件が単純支持と連続支持の場合について、さらに、塔頂におけるケーブルの滑動を許すローラー結合とケーブルが塔頂で固定されているヒンジ結合の場合について検討してきた。また、走行荷重による吊橋の動的影響および衝撃係数についても報告してきた^{2,3)}。さらに、補剛桁のせん断変形および回転慣性を考慮した多径間吊橋の鉛直たわみ振動を Hamilton 原理を用いて定式化し、その動的な影響について明らかにしてきた^{4,5)}。

ここでは、補剛桁のそり変形 (あるいは、曲げねじり剛性) を考慮した多径間吊橋のねじり振動について考える。基本的な仮定は、撓度理論による吊橋の鉛直たわみ振動の場合と同様のものを用いる³⁾。さらに、吊橋のねじり振動に関する基礎微分方程式および補剛桁の境界条件は Hamilton 原理を用いて誘導され、その誘導過程が示される。最後に、補剛桁の支持条件 (図-1 参照) および塔頂におけるケーブルの結合条件 (塔の曲げ変形の影響) による差異について、実在吊橋の断面諸元を用いて数値計算により検討する。

2. ねじり振動解析の概要

2-1. 基礎微分方程式の誘導

弾性体の動力学の問題には、変分原理として Hamilton 原理が成り立つことはよく知られている。これは静力学の問題における仮想仕事の原理に対応するものと考えられる。

吊橋の上部構造系の全ひずみエネルギーは、補剛桁のそり (曲げねじり) とねじりによるひずみエネルギー V_θ と、ケーブルの鉛直たわみによるひずみエネルギー V_v の和として与えられる。すなわち、

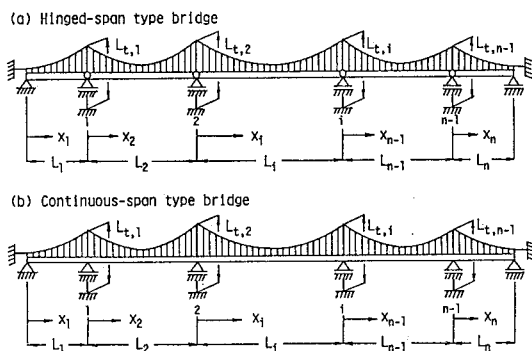


図-1 多径間吊橋の支持形式

$$V_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} E_i I_{wi} \left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} G_i J_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i \quad (1)$$

ここで、 $E_i I_{wi}$ = 曲げねじり剛性、 $G_i J_i$ = ねじり剛性、 θ_i = ねじり角、 n = 径間数、 L_i = 支間長、添字 i は第 i 径間の断面諸元を表す。上式(1)の右辺第1項はフランジ部の橋軸方向の応力(曲げねじり)によるひずみエネルギーであり、第2項はウェブ部のせん断応力(ねじり)によるひずみエネルギーである。さらに、ケーブルに蓄えられるひずみエネルギーは次のように与えられる。

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ 2 H_w \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i + 2 H_{pi} \int_0^{L_i} \left(\frac{dy_c}{dx_i} \right) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} \right) dx_i \right\} \quad (2)$$

ここで、 H_w = 死荷重による水平張力、 H_{pi} = 慣性力による付加水平張力、 η_i = 鉛直たわみ、 y_c = ケーブルのたわみ曲線。さらに、鉛直たわみ η_i は補剛桁の幅員 b_i を用いて

$$\eta_i = b_i \theta_i / 2 \quad (3)$$

と表現できることから、式(2)は次のように変形することができる。

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{H_w b_i}{2} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i + H_{pi} b_i \int_0^{L_i} \left(\frac{dy_c}{dx_i} \right) \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right) dx_i \right\} \quad (4)$$

一方、補剛桁の回転に関する運動エネルギー T_g は次のように求められる。

$$T_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} I_{pi} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 dx_i \quad (5)$$

ここで、 $I_{pi} = m_{gi} r_{gi}^2 = w_{gi} / g \cdot r_{gi}^2$ = 極慣性モーメント、 r_{gi} = 回転半径。さらに、ケーブルのたわみによる運動エネルギー T_c は次のように定義される。

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{w_{ci}}{g} \cdot \frac{b_i^2}{4} \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 dx_i \quad (6)$$

ここで、 w_{ci} = ケーブルの単位長さ当たりの重量、 g = 重力加速度。したがって、吊橋の全運動エネルギー T は式(5)、(6)より、次のようになる。

$$T = T_g + T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(I_{pi} + \frac{w_{ci}}{g} \cdot \frac{b_i^2}{4} \right) \int_0^{L_i} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 dx_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{mi} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 dx_i \quad (7)$$

ただし、 $I_{mi} = I_{pi} + w_{ci} / g \cdot b_i^2 / 4$ (8)

したがって、曲げねじり剛性を考慮した吊橋のねじり振動に関する支配方程式は、Hamilton原理により以下のよう求められる。

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \{ T - (V_g + V_c) \} dt = 0 \quad (9)$$

ここで、 δ = 変分記号、 t_1 、 t_2 = 時間。ゆえに、式(1)、(4)および式(7)を上式に代入すると

$$E_i I_{wi} \frac{\partial^4 \theta_i}{\partial x_i^4} - (G_i J_i + H_w \frac{b_i^2}{2}) \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} + H_{pi} \frac{w_{ci} b_i}{H_w} + I_{mi} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

ただし、 $w_i = w_{gi} + w_{ci}$ 。さらに、ねじり角 θ_i およびねじり率 θ_i / x_i の変分量に対応した境界条件が次のように求められる。

$$E_i I_{wi} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \right) \Big|_0^{L_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(E_i I_{wi} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} \right) - G_i J_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} - \frac{H_w b_i^2}{2} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} - H_{pi} b_i \left(\frac{dy_c}{dx_i} \right) \right\} \cdot \delta \theta_i \Big|_0^{L_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

2-2. ケーブルの方程式

図-2に示すような塔頂におけるケーブルの結合状態の差異はケーブルの方程式によって処理される。

また、式(10)における未知付加水平張力 H_{pi} とねじり関数 θ_i とはケーブルの方程式によって関係づけられる。

まず、図-2(a)のローラー結合の場合には、塔の変形はなく、付加水平張力 H_p は全径間を通して一定であるため、ケーブルの方程式は次式ようになる。

$$\frac{L_c}{E_c A_c} H_p - \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i b_i}{2 H \omega} \int_0^{L_i} \theta_i d x_i = 0 \quad (13)$$

ここで、 L_c = ケーブルの水平投影長、 E_c = ケーブルの弾性係数、 A_c = ケーブルの断面積。次に、図-2(b)のヒンジ結合の場合には、塔の左右のケーブルの慣性力による付加水平張力の不均衡から生ずる水平力の差が、塔を片持梁のように曲げ変形させ、そのために塔頂に水平変位が生ずるものと考えられる。したがって、ケーブルの慣性力による付加水平張力は各径間ごとに異なり、ケーブルの方程式は次式で与えられる。

$$\frac{L_{ci}}{E_c A_c} H_{pi} - \frac{\omega_i b_i}{2 H \omega} \int_0^{L_i} \theta_i d x_i = -\delta_i^e + \delta_i^r, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

ここで、 δ_i^e 、 δ_i^r = 第 i 径間の左右の塔頂における水平変位。さらに、図-2(c)のヒンジ結合の場合には、式(14)と同様のケーブルの方程式が用いられるが、右辺の水平変位 δ_i^e と δ_i^r には、塔頂に作用するケーブルからの反力 N が考慮された水平変位が使用される³⁾。

2-3. 固有関数

式(10)の一般解を求めるために、ねじり関数 θ_i および付加水平張力 H_{pi} を変数分離して

$$\theta_i(x_i, t) = \theta_i^*(x_i) \exp(j \omega t), \quad H_{pi} = H_{pi}^* \exp(j \omega t) \quad (15)$$

とおき、上式(15)を式(10)に代入すると θ_i^* に関する4階の常微分方程式が得られる。

$$E_i I_{\omega i} \frac{d^4 \theta_i^*}{d x_i^4} - (G_i J_i + H \omega \frac{b_i^2}{2}) \frac{d^2 \theta_i^*}{d x_i^2} + H_{pi}^* \frac{\omega_i b_i}{H \omega} - I_{m i} \cdot \omega^2 \theta_i^* = 0 \quad (16)$$

ここで、 ω = 固有円振動数、 j = 虚数、 $H_{pi}^* = H_{pi}$ の振幅。したがって、上式の一般解は次のように

$$\theta_i^*(x_i) = A_i \cos \mu_i \frac{x_i}{L_i} + B_i \sin \mu_i \frac{x_i}{L_i} + C_i \cosh \nu_i \frac{x_i}{L_i} + D_i \sinh \nu_i \frac{x_i}{L_i} + \frac{\omega_i b_i}{\omega^2 H \omega I_{m i}} H_{pi}^* \quad (17)$$

求められる。ここで、

$$\mu_i = L_i \sqrt{\frac{2 G_i J_i + H \omega b_i^2}{4 E_i I_{\omega i}} (z_i - 1)}, \quad \nu_i = L_i \sqrt{\frac{2 G_i J_i + H \omega b_i^2}{4 E_i I_{\omega i}} (z_i + 1)}, \quad z_i = \sqrt{1 + \frac{16 E_i I_{\omega i} I_{m i}}{(2 G_i J_i + H \omega b_i^2)^2} \omega^2}$$

また、 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i は積分定数である。

2-4. 振動数方程式

式(17)で表される固有関数に含まれる未知の積分定数は、図-1に示すような多径間吊橋の補剛桁の境界条件によって決定される。また、残るもう一個の未知変数 H_{pi}^* はケーブルの方程式に固有関数を代入することにより求められる。最終的に、吊橋のねじり振動に関する振動数方程式は文献(3)、(4)と

$$\det |A - H E^{-1} G| = 0 \quad (18)$$

同様の形で求められる。上式は固有円振動数 ω に関する超越方程式となり、その行列式の大きさは $4n \times 4n$ となる。ここでは、固有値 ω はRegula-Falsi法により求める。

3. 数値計算例

数値計算例として、本州四国連絡橋の因島大橋の断面諸元を用いることにする。その吊橋の形状寸法および断面値は以下のとおりである。(1) 補剛桁: $L_1 = L_3 = 250$ m、 $L_2 = 770$ m、 $b = 26.0$ m、 $w_1 = w_3 =$

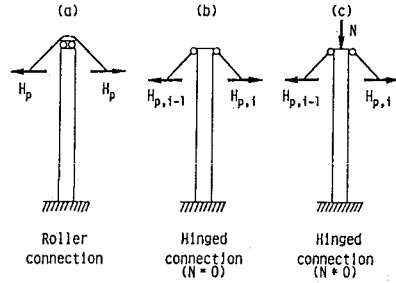


図-2 塔頂とケーブルとの結合状態

21.09 t/m、 $w_2=20.31$ t/m、 $l_{w1}=l_{w3}=786.353$ m⁶、 $l_{w2}=648.876$ m⁶、 $J_1=J_3=2.9011$ m⁴、 $J_2=4.1691$ m⁴、 $l_{m1}=l_{m3}=221.24$ tsec²、 $l_{m2}=217.79$ tsec²、 $E=2.1 \times 10^7$ t/m²、 $G=8.1 \times 10^6$ t/m²。(2) ケーブル：サゲ長 $f=76.0$ m、 $A_c=0.4562$ m²、 $E_c=2.0 \times 10^7$ t/m²、 $H_w=19,806$ t。(3) 塔： $L_{t1}=L_{t2}=138.85$ m、 $l_{t1}=l_{t2}=6.640$ m⁴、 $N=8,544$ t、 $E_t=2.1 \times 10^7$ t/m²。

上記の同一断面諸元を用いて、補剛桁の支持条件が単純支持と連続支持の2通り（図-1）、また、塔頂のケーブルの結合状態が、ローラー結合、鉛直力を無視したヒンジ結合、および鉛直力を考慮したヒンジ結合の3通り（図-2）、合計6通りの場合について数値計算を行った。

図-3は連続支持でかつローラー結合の場合におけるねじりとねじり率の固有振動モードを示している。これらの固有振動モードより、塔基部の支持点における連続条件が満足されていることがわかる。

表-1は、前述の6通りの場合について、逆対称および対称ねじり振動モードの計算された1次から6次までの固有周期を示す。まず、塔頂のケーブルの結合状態の差異による影響は、対称1次ねじり振動モードに若干生じているが、ほとんどその影響がないことがわかる。次に、補剛桁の支持条件が単純支持と連続支持の場合について比較すると、各次数の固有周期において、著しい差異が認められる。このことは、両者のねじり振動の固有モードが本質的に異なることから、容易に推察できる。さらに、以前本橋の鉛直たわみ振動について計算された固有周期³⁾とねじり振動の固有周期との比をとると、逆対称1次振動モードで3.8、対称1次振動モードで2.3と、両者の固有周期が比較的離れているのが特徴であり、耐風安定性の面から良好な結果といえることができる。

4. あとがき

本研究は、Hamilton原理に基づき、曲げねじり剛性を考慮した吊橋のねじり振動に対する基礎微分方程式を誘導し、固有振動解析について言及し、数値計算によりその有効性を明らかにした。

（参考文献） 1)小西一郎：鋼橋、設計編Ⅱ。 2)Hayashikawa, T. and Watanabe, N.:Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ., Vol.16, No.1, Dec., 1982. 3)Hayashikawa, T. and Watanabe, N.:Proc. of ASCE, Vol.108, No.EM6, Dec., 1982. 4)Hayashikawa, T.:Proc. of JSCE, No.335, July, 1983. 5)Hayashikawa, T. and Watanabe, N.:Proc. of ASCE, Vol.110, No.EM3, Mar., 1984.

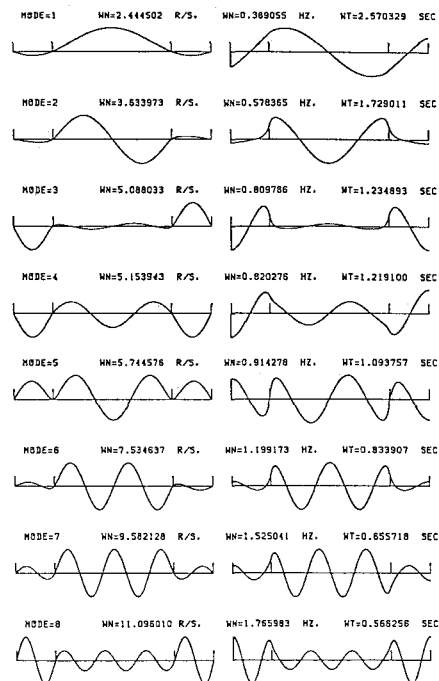


図-3 固有振動モード

表-1 計算されたねじり振動の固有周期（因島大橋、sec）

Mode types of torsional vibration	Mode order	Hinged-span type			Continuous-span type		
		Roller connection	Hinged connection (N = 0)	Hinged connection (N ≠ 0)	Roller connection	Hinged connection (N = 0)	Hinged connection (N ≠ 0)
Asymmetric mode	1st	1.7667	1.7667	1.7667	1.7290	1.7290	1.7290
	2nd	1.2986	1.2977	1.2987	1.2349	1.2342	1.2350
	3rd	0.8556	0.8556	0.8556	0.8339	0.8339	0.8339
	4th	0.5432	0.5432	0.5432	0.5663	0.5663	0.5663
	5th	0.3831	0.3831	0.3831	0.5206	0.5206	0.5206
	6th	0.2860	0.2860	0.2860	0.3755	0.3755	0.3755
Symmetric mode	1st	2.5724	2.5704	2.5727	2.5703	2.5683	2.5706
	2nd	1.2380	1.2378	1.2380	1.2191	1.2189	1.2191
	3rd	1.1487	1.1487	1.1487	1.0938	1.0938	1.0938
	4th	0.6687	0.6687	0.6687	0.6557	0.6557	0.6557
	5th	0.4520	0.4520	0.4520	0.5552	0.5552	0.5552
	6th	0.3384	0.3384	0.3384	0.4398	0.4398	0.4398