Ⅰ－27　選点法による液体に接する円筒殻の自由振動解析

北海道大学工学部　正 員　三上　隆
北海道大学工学部　正 員　芳村　仁

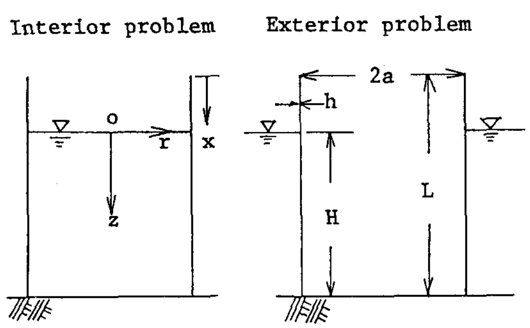
1．はじめに

液体に接する円筒殻の自由振動問題は，石油タンク，原子力プラント，海洋構造物等に現れ，内部に液体を有する内部問題および液体が無限に広がる外部問題に区別される。この種の問題に対しては，有限要素法や境界要素法などが用いられるが，前者は外部問題では無限領域の取り扱いが要求され，後者ではその適用可能性は殻の支配方程式の基本解の存在に大きく左右される。本報告では，内部および外部問題に対して，同程度の簡便性をもって適用できる解法として選点法に基づく手法を提示し，その適用可能性および有効性の検討を行う。

2．解析モデルと基礎方程式

1）液体の基礎方程式

図－1に示すように，液体高さHまで液体に接している，高さL，厚さh，半径aの固定式の円筒殻の自由振動問題を考える。E，ν，ρ_sを殻の弾性係数，ポアソン比，密度とし，ρ_fを液体の密度とする。



図－1　解析モデル

流体領域の座標系は，静止水面と殻の回転軸の交点を原点，鉛直下方にz軸をとる円筒座標系(r，θ，z)で表す。液体運動は非圧縮，非粘性で渦無し流れを仮定すれば，流体系の基礎方程式は次のように表される。

$$\Phi_{,rr}+\Phi_{,r}/r+\Phi_{,\theta\theta}/r^2+\Phi_{,zz}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\Phi_{,z}|_{z=H}=0 \quad \cdots\cdots(2) \qquad \Phi_{,r}|_{r=a}=W_{,t} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$p|_{z=0}=0 \quad \cdots\cdots(4) \qquad \Phi|_{r\to\infty}\to 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで，Φは流体速度を与える速度ポテンシャル，コンマに続く下添字は偏微分を表す。式(1)は液体のラプラス方程式，式(2)は水底条件式，式(3)は速度の連続性を表すinterface条件式（Wは後述する殻の半径方向変位），式(4)は自由表面条件式（重力の影響を無視），式(5)は外部問題に対する遠方条件である。

式(4)中のpは圧力で，線形化ベルヌーイ式より次のように表される。

$$p=-\rho_f\Phi_{,t} \quad \cdots\cdots(6)$$

2）液体に接する円筒殻の基礎方程式

殻の運動方程式は変形が小さく，せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論[1)]に従うものとする。U，V，Wをそれぞれ経線方向(x)，周方向(θ)，半径方向(v)の変位成分，β_x，β_θをそれぞれ曲げのみによる回転角成分とする。

液体と殻の連成系は，円周方向波数nおよび円振動数ωの調和振動をするものと仮定する。式(1)～(5)をΦについて解き，さらに式(6)より動水圧を求め，適当な無次元量を導入すれば，液体に接する円筒殻の運動方程式は次のように表される。

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2([F]\{X\}+\{P\}) \quad \cdots\cdots(7)$$

ここに，$(\ \ )'=d(\ \ )/d\xi$，ξ（=[0，1]）は液体と殻の接触，非接触領域で独立に定義される経線

方向座標xの無次元化座標である。[C],[D],[E]および[F]は，殻の諸元のみで表される5x5次の行列[2]，Ω^2は液体－円筒殻系の固有円振動数パラメータである。

$$\Omega^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega^2/E \qquad \cdots\cdots(8)$$

さらに，

$$\{X\}^T=(u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_\theta),\quad \{P\}^T=(0,\ 0,\ p_w,\ 0,\ 0) \qquad \cdots\cdots(9)$$

であり，{p}は流体との相互作用により発生する外圧力ベクトルで，その非零成分p_wは次式で表される。

$$p_w=(\rho_f/\rho_s)\ (a/h)\cdot p \qquad \cdots\cdots(10)$$

ここで，

$$p=\quad 0 \quad (\text{in air}) \qquad \cdots\cdots(11.a)$$

$$p=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2I_n(\lambda_k)}{\lambda_k I_n'(\lambda_k)}\sin(\lambda_k H\eta/a)\int_0^1 w\sin(\lambda_k H\eta/a)\,d\eta \qquad \cdots\cdots(11.b)$$

(Interior problem)

$$p=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2K_n(\lambda_k)}{\lambda_k K_n'(\lambda_k)}\sin(\lambda_k H\eta/a)\int_0^1 w\sin(\lambda_k H\eta/a)\,d\eta \qquad \cdots\cdots(11.c)$$

(Exterior problem)

ただし，$\lambda_k=(2k-1)\pi a/2H$，$\eta=z/H\ (=[0,\ 1])$，I_n，K_nはそれぞれ第1種変形，第2種変形Bessel関数であり，I_n'，K_n'はそれぞれλ_kに関する1階微分である。

式(7)，(11.b,c)より明らかなように，液体に接する円筒殻の自由振動問題は，未知関数wの積分を含む微積分方程式を殻の端末で規定される境界条件[2]の基で解く問題に帰着された。

3．選点法による定式化

記述を容易にするため，水深Hと殻の高さLが等しい場合を取り扱う。選点法による定式化の過程は，空中にある構造要素の動的問題を扱った文献2）に従うので，ここでは後の展開に必要なことのみを記す。

①経線にそって$0=\xi_0<\xi_1<\ \dots\ <\xi_M<\xi_{M+1}=1$のM+2個の点を配置する（この問題の全未知量は5(M+2)個）。

②内部選点ξ_i（i=1～M，M=内部選点数）には，区間[0，1]で定義されるM次のshifted Legendre多項式の零点を採用する。

③$\xi_0=0$と$\xi_{M+1}=1$は境界条件が規定される点に配置されるので端点と呼ぶ。

④数値計算の簡易化のために，ξに関する1，2階微分を内部選点と端点における関数値（変位の値）に結びつける次式を用いる。

$$\{Z''\}=[A]\{Z\},\quad \{Z'\}=[B]\{Z\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

ここで，$Z=u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_\theta$であり，{Z}等は次のようなものである。

$$\{Z\}^T=(Z(\xi_0),\ Z(\xi_1),\ \dots,\ Z(\xi_{M+1})) \qquad \cdots\cdots(13)$$

次に式(11)に現れる積分の離散化表示を考える。積分を補間型数値積分公式[3]によって評価し，内部選点の位置と積分における分点（標本点）を共有させることにすれば，M次のshifted Legendre多項式の零点を分点とする積分則（Gauss-Legendre型積分則に同等）を用いて次のように表される。

$$\int_0^1 w\sin(\lambda_k H\eta/a)\,d\eta=[Y_1^{(k)}]\{w_c\} \qquad \cdots\cdots(14)$$

ここで，

$$\{w_c\}^T=(w(\xi_1),\ w(\xi_2),\ \dots,\ w(\xi_M)) \qquad \cdots\cdots(15)$$

であり，M次の行マトリックス$[Y_1^{(k)}]$の成分$Y_1^{(k)}(i)$は次式で与えられる。

$$Y_1^{(k)}(i)=W_i\cdot\sin(\lambda_k H\xi_i/a),\quad (i=1\sim M) \qquad \cdots\cdots(16)$$

ただし，W_iは重みであり，区間[-1, 1]で定義されるGauss-Legendre型積分則の半分に等しい。なお，式(14)の表示では，液体高さ(H)＝円筒殻の高さ(L)の場合を扱っているので，$\xi=\eta$の関係を用いている。

さて，以上の準備の基に，問題を解くのに必要な5(M+2)個の未知数に対する条件式は次のようになる。

1）5M個の条件式

この条件式は，式(7)の内部選点における残差条件より求められ，内部選点と端点における未知の量に分離すれば，次のように表示される。

$$[\alpha_c]\{\delta_c\}+[\alpha_e]\{\delta_e\}=\Omega^2([M_c{}^s]+[M_c{}^f])\{\delta_c\} \qquad \cdots\cdots(17)$$

ここで，$\{\delta_c\}$は内部選点における変位を成分とする5M次，$\{\delta_e\}$は端点における変位を成分とする10次のベクトル，$[\alpha_c]$および$[\alpha_e]$は，式(12)のマトリックス[A],[B]の成分で構成されるそれぞれ，5Mx5Mおよび5Mx10次のマトリックス，$[M_c{}^s]$は殻自体の慣性力の係数を成分とする5Mx5M次のマトリックスである。さらに$[M_c{}^f]$は，半径方向変位ベクトル$\{W_c\}$（式(15)）に対応するサブマトリックスのみが非零となる流体の付加質量マトリックスに相当し，非零なサブマトリックス$[M_c{}^{f-w}]$は次式で与えられる。

$$[M_c{}^{f-w}]=\sum_{k=1}^{\infty}[Y_2^{(k)}][Y_1^{(k)}] \qquad \cdots\cdots(18)$$

ただし，$[Y_1^{(k)}]$は式(16)で与えられ，M次の列マトリックス$[Y_2^{(k)}]$の成分は次のようなものである。

内部問題に対して；

$$Y_2^{(k)}(i)=\frac{\rho_f}{\rho_s}\frac{a}{h}\frac{2I_n(\lambda_k)}{\lambda_k I_n'(\lambda_k)}\sin\left[\lambda_k\frac{H}{a}\xi_i\right];\quad (i=1\sim M) \qquad \cdots\cdots(19.a)$$

外部問題に対して；

$$Y_2^{(k)}(i)=-\frac{\rho_f}{\rho_s}\frac{a}{h}\frac{2K_n(\lambda_k)}{\lambda_k K_n'(\lambda_k)}\sin\left[\lambda_k\frac{H}{a}\xi_i\right];\quad (i=1\sim M) \qquad \cdots\cdots(19.b)$$

2）10個の条件式

10個の条件式は，殻の端末で指定される境界条件によって定まり，ここでは便宜上次式で表しておく。

$$[\gamma_c]\{\delta_c\}+[\gamma_e]\{\delta_e\}=\{0\} \qquad \cdots\cdots(20)$$

ここで，$[\gamma_c]$，$[\gamma_e]$はそれぞれ，10x5Mおよび10x10次のマトリックスである。

3）固有振動数方程式

式(17)および(20)より，$\{\delta_e\}$を消去すれば，内部選点における未知ベクトル$\{\delta_c\}$を固有ベクトルとする次の固有振動数方程式が得られる。

$$([\alpha_c]-[\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_c])\{\delta_c\}=\Omega^2([M_c{}^s]+[M_c{}^f])\{\delta_c\} \quad \cdots(21)$$

なお，液体と部分的に接する場合（L>H）の固有振動数方程式は，液体との接触領域で成立する式(17)，非接触領域で成立する式(17)に類似な条件式（$[M_c{}^f]=0$），殻の端末で規定される境界条件およびz=0で成立する殻の力学量と変形量に関する接続条件を考慮した式(20)より導かれる。また，上述の定式化手順は，円筒殻の内外に液体が同時に存在し，それらの液体高さが互いに異なる場合にも有効である。

4．数値解析例

本節では，今までに述べた手法の適用例を示す。ただし，$E=2.1\times10^6$kg/cm²，$\rho_s=8.00\times10^{-6}$kg・sec²/cm⁴，$\rho_f=1.02\times10^{-6}$kg・sec²/cm⁴，$\nu=0.3$およびせん断補正係数$\kappa=\pi^2/12$とした。なお，１要素内の内部選点数Mには，空の回転殻の適用例[4]より判断してM=11を採用した。

本手法の数値解析精度の検証を目的に，以下に内部問題および外部問題の数値解析結果を示す。

最初にHarounらが行ったF.E.M.による内部問題に対する固有振動解析[5]との比較を行う。Harounらが採用した解析モデルは次の２つのタイプ（短形シェル，長形シェル）である。

Shell(A)［長形シェル］；L=H=21.96m，a=7.32m，h=1.09cm

Shell(B)［短形シェル］；L=H=12.2m，a=18.3m，h=2.54cm

表－１に要素数N=1（要素分割を行っていない）とN=2（等分割）による固有振動数の解析値を示す。円周方向波数n=1～6の経線方向モード次数m=1,2に対する本解析値は，いずれもHarounらの結果とよい一致を示している。

次に，外部問題に対する解析結果をRayleigh-Ritz解[6]および伝達マトリックス解[6]とともに表－２に示す。数値計算に用いた条件は次のようである。L=80.0m，a=40.0m，h=0.4m，H=64.0m。なおこの問題は液体との非接触部分を有するので，本手法による場合はN+1個の要素（N=1および2）にモデル化した。波数n=3のモード次数m=2に対する本解析値は，厳密解に対して上限値を与えるRayleigh-Ritz解よりも低めの値，伝達マトリックス解よりやや大きめの値を与えており，妥当なものと思われる。

表－２　既往研究との比較（外部問題，f[Hz]）

(a)　Shell (A)

Solution procedure	m	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Present(N=1)	1	3.548	1.638	0.934	0.632	0.531	0.584
Present(N=2)		3.545	1.636	0.933	0.632	0.531	0.584
F.E.M.		3.559	1.65	0.95	0.65	0.55	0.60
Present(N=1)	2	10.338	6.550	4.401	3.162	2.397	1.923
Present(N=2)		10.334	6.579	4.429	3.188	2.421	1.944
F.E.M.		10.450	6.66	4.52	3.28	2.52	2.05

(b)　Shell (B)

Solution procedure	m	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Present(N=1)	1	6.176	5.185	4.138	3.309	2.682	2.209
Present(N=2)		6.177	5.185	4.137	3.309	2.681	2.208
F.E.M.		6.184	5.19	4.14	3.31	2.69	2.21
Present(N=1)	2	11.246	10.516	9.935	9.164	8.255	7.363
Present(N=2)		11.247	10.521	9.933	9.182	8.278	7.388
F.E.M.		11.276	10.60	9.98	9.22	8.32	7.43

表－２　既往研究との比較（外部問題，f[Hz]）

Solution procedure	m	n=0	n=1	n=2	n=3
Present(N=1)	1	6.633	3.596	1.902	1.173
Present(N=2)		6.634	3.595	1.902	1.173
Present(N=1)	2	9.662	7.865	5.614	3.935
Present(N=2)		9.996	7.872	5.624	3.942
M.P.M.					3.90
R.R.M					4.10

M.P.M. = Matrix progression method
R.R.M. = Rayleigh-Ritz method

以上のように，かなり分割が粗いにもかかわらず，本手法によっても十分良好な結果が得られるといえよう。

5．まとめ

本報告は，液体に接する円筒殻の自由振動問題を選点法により定式化し，その有効性を内部および外部問題の数値計算例を通して確かめたものである。

参考文献

1) Magrab, E.B.: Vibrations of Elastic Structural Members, Sijhoff & Noordhoff, 1979.

2) 三上　隆・芳村　仁：選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析，土木学会論文集，第374号／I-6, pp.319-328, 1986.

3) Davis, P.J. and Rabinowitz（森　正武訳）：計算機による数値積分法，日本コンピュータ協会，1980.

4) 三上　隆・芳村　仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集，第335号，pp.69-78, 1983.

5) Haroun, M.A. and Housner, G.W.: Complications in free vibration analysis of tanks, Proc. ASCE, Vol.108, No.EM2, pp.801-818, 1982.

6) 濱本卓司・田中弥寿雄：固定式海洋円筒シェルの動的解析・その１固有振動解析，日本建築学会論文報告集，第291号，pp.129-141, 1980.