

I-23 リブ補剛環状板の横荷重による対称曲げ

北海道大学工学部	正会員	荻澤憲吉
北海道大学工学部	正会員	芳村 仁
北海道大学工学部	学生会員	石井康裕

1. まえがき

半径方向と円周方向に多数のリブによって補剛された円板が、その板面に対して垂直な方向からの荷重を受ける場合について、これまで、各種の変剛度板との比較から力学的性質の違いを明らかにし¹⁾、補剛リブの剛性が高くて円板の剛性がリブのみの剛性によって代表されると考えられる場合の解析²⁾、円板の剛性としてデッキプレートの曲げ剛性とリブによる曲げ剛性の両者を考慮する場合の解法³⁾、さらにサンドイッチリブ円板のようなデッキプレートの剛性の方が高い場合における解析⁴⁾について報告してきた。

今回は、円板の中央部が解放されているような、環状の形状を持つ補剛板の対称曲げの解析について報告する。

2. 基礎方程式とその解

リブで補剛された環状板の曲げ変形だけを考えるものとして、板の曲げの中立面内に座標 r, θ をとり、その面と垂直に座標 z をとる。デッキプレートでは平面応力状態、補剛リブでは単軸応力状態として、曲げ変形の時に断面平面保持を仮定すると、デッキプレートの応力 σ_r, σ_θ 、およびリブの応力 $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$ は、それぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \frac{d^2 w}{dr^2} - \nu z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), & \bar{\sigma}_r &= E \left(-z \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \nu z \frac{d^2 w}{dr^2} \right), & \bar{\sigma}_\theta &= E \left(-z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 w は環状板のたわみ、 E と ν は材料の弾性係数およびポアソン比である。

これより、曲げモーメント M_r, M_θ をもとめると、

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - D_r \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) - D_\theta \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (2)$$

ここで、これらの曲げモーメント式には各曲げ剛性が含まれていて、記号 D はデッキプレートの曲げ剛性、 D_r, D_θ はそれぞれ半径方向と円周方向のリブ(のみ)の単位幅あたりの曲げ剛性である。補剛板としての剛性はデッキプレートの剛性とリブの剛性を合わせたものとなるが、それらの個々の大きさはその補剛形式の構造によって異なり、たとえば、円板がリブで上下に補剛されているような場合(図1(a))では、リブの剛性の方がかなり大きく、またグリッド状のリブを上下から円板で挟み閉じこめたような構造の場合(図1(b))では、逆にデッキプレートの剛性の方が大きくなる。

また、これらの剛性のうち、半径方向のリブ配置が放射状になることにより、 D_r のみが半径 r の関数となる。すなわち、半径方向リブによる剛性は外側にいくほど小さくなる。いま、環状板の外縁 $r=a$ における D_r を D_a とすると、

$$D_r = (a/r) D_a \quad (3)$$

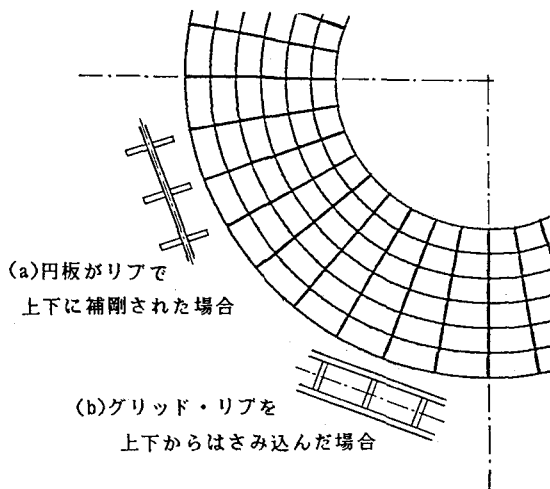


図1. リブで補剛された環状板

と表わされる。

これらの式を、等分布荷重 p をになう板要素の対称曲げのつりあい条件

$$p = -\frac{dQ_r}{dr} - \frac{1}{r} Q_r, \quad Q_r = \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) \quad (4)$$

に代入すると、補剛環状板の対称曲げの方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{f} \frac{d^4 w}{dp^4} + g \frac{d^4 w}{dp^4} + g \frac{2}{f} \frac{d^3 w}{dp^3} - (f+g) \frac{1}{f^2} \frac{d^2 w}{dp^2} + (f+g) \frac{1}{f^3} \frac{dw}{dp} = \frac{pa^4}{Da} \quad (5)$$

ここで、半径 r のかわりに無次元座標 $\rho = r/a$ を導入した。また、記号 f および g は剛比で、次のように、外縁における半径方向リブの曲げ剛性を基準に定義してある。

$f = (D_\theta/Da)$: 直交二方向の円周方向と半径方向のリブどうしの曲げ剛性の剛比

$g = (D/Da)$: デッキプレート上の曲げ剛性とリブの曲げ剛性との剛比 (6)

この基礎方程式(5)は係数に変数であるので、無限級数形式の解を持つことになる。

級数解の形として、 $\rho=1$ のまわりに展開した解を求めるために、まず微分方程式の係数 $(1/\rho)$, $(1/\rho^2)$, $(1/\rho^3)$ を $\rho=1$ において Taylor 展開した形に改めてから、級数解を誘導する。その余解を、

$$w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-\rho)^n \quad (7)$$

と仮定して代入すれば、次のような式が誘導される。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)^k \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n (1-\rho)^{n-4} + g \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n (1-\rho)^{n-4} \\ & - 2g \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)^k \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (1-\rho)^{n-3} - (f+g) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-\rho)^k \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (1-\rho)^{n-2} \\ & - (f+g) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)}{2} (1-\rho)^k \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (1-\rho)^{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

これを整理して、恒等式になるように、 $(1-\rho)$ の各べき毎に条件式を作っていくと、係数 a_n が決定される。

特解についても同様な手順で求めることができ、最終的に、方程式の一般解として、次のような級数解が得られる。

$$w = \frac{pa^4}{Da} \left[A_0 + A_1(1-\rho) + A_2(1-\rho)^2 + A_3(1-\rho)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} A_n (1-\rho)^n + \sum_{n=4}^{\infty} P_n (1-\rho)^n \right] \quad (9)$$

ここで、 A_0, A_1, A_2 および A_3 は任意の定数で、それ以降の $A_n (n \geq 4)$ は、順次前の項の係数によって決められる係数で、次のような式で与えられる。

$$A_4 = \frac{1}{24(1+g)} \{ 12g A_3 + (f+g)(2A_2 + A_1) \}, \quad A_n = \frac{\left[\begin{aligned} & -(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)A_{n-1} - \dots - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_4 \\ & + 2g \{ (n-1)(n-2)(n-3)A_{n-1} + \dots + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_3 \\ & + (f+g) \{ 1 \cdot (n-2)(n-3)A_{n-2} + \dots + (n-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_2 \\ & + (f+g) \left\{ \frac{2 \cdot 1}{2} (n-3)A_{n-3} + \dots + \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot 1 \cdot A_1 \right\} \end{aligned} \right]}{(1+g)n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (10)$$

($n \geq 5$)

また、 $P_n (n \geq 4)$ は特解項の係数で、同様に次のようになる。

$$P_4 = \frac{1}{24(1+g)}, \quad P_n = (A_n \text{ の一般式と同じ形式}) \quad (n \geq 5) \quad (11)$$

これより、曲げモーメントの式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} M_r = -pa^2 \frac{1}{f} \left[(1+g) \left\{ 2 \cdot 1 A_2 + 3 \cdot 2 A_3 (1-\rho) + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(A_n + P_n)(1-\rho)^{n-2} \right\} \right. \\ \left. + g \left\{ -A_1 - 2A_2(1-\rho) - 3A_3(1-\rho)^2 - \sum_{n=4}^{\infty} n(A_n + P_n)(1-\rho)^{n-1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_\theta = -pa^2 \frac{1}{f} \left[(f+g) \left\{ -A_1 - 2A_2(1-f) - 3A_3(1-f)^2 - \sum_{n=4}^{\infty} n(A_n + P_n)(1-f)^{n-1} \right\} \right. \\ \left. + \nu g f \left\{ 2 \cdot 1 A_2 + 3 \cdot 2 A_3(1-f) + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(A_n + P_n)(1-f)^{n-2} \right\} \right]$$

解析の際には、解(9)における任意定数 A_0, A_1, A_2, A_3 は、その対象とする環状板の内縁と外縁の支持条件（境界条件）を満足するように定められることになる。

3. 補剛環状板の断面力分布

解析例として、環状板面上に等分布荷重 p が満載したときの曲げモーメント分布を示す。ここに、デッキプレートのパアソン比は $\nu=0.3$ としている。

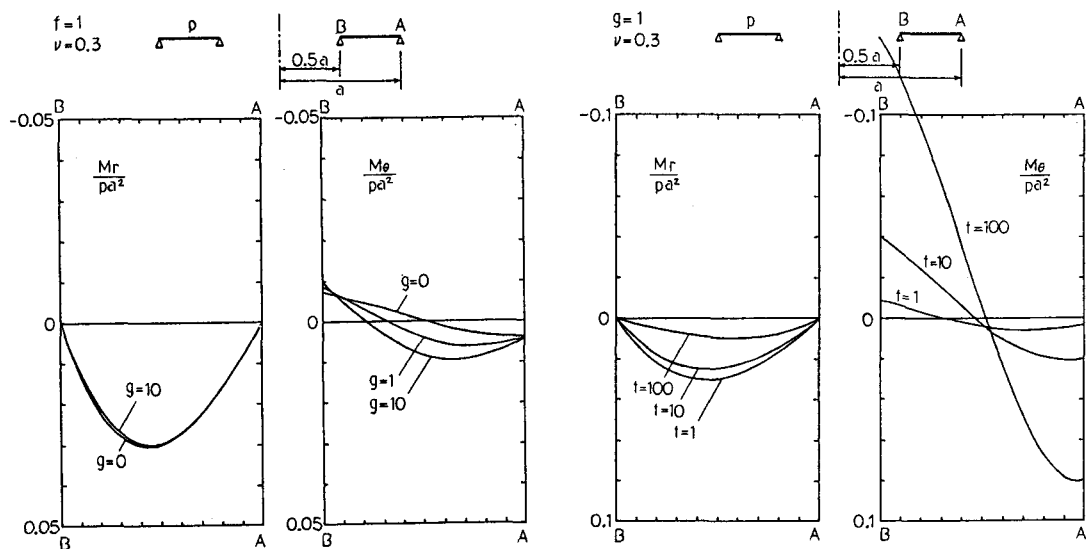


図2. 等分布荷重の作用を受ける単純支持された補剛環状板の曲げモーメント分布

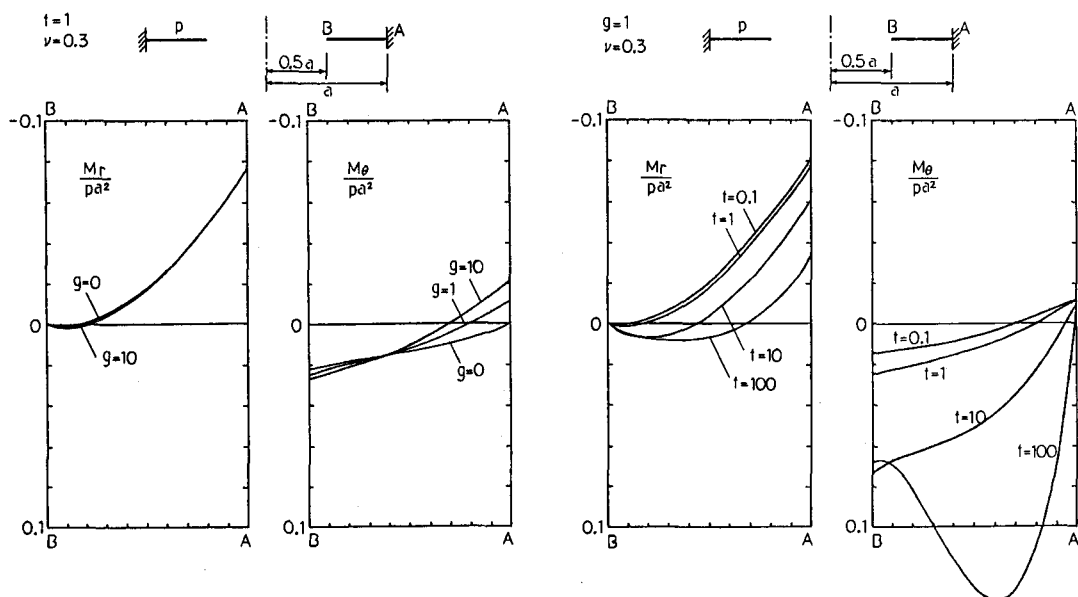


図3. 等分布荷重の作用を受ける周辺固定、内縁自由の補剛環状板の曲げモーメント分布

数値計算では、級数の係数を20項目まで求めて行なったが、良好な収束結果を得た。

図2は、内側縁と外側縁の両方ともに単純支持された場合の解析結果である。形状は、内縁の半径が、外縁の半径 a の半分であるような環状の補剛円板である。剛比 f と g によって分布形状が異なるので、左側の図においては、外縁位置($r=a$)において直交二方向の剛比が等しい場合、すなわち $f=1$ の時で g が変化したときの、曲げモーメント M_r と M_θ の分布を示す。また、右側の図においては逆に、剛比 g を一定値 $g=1$ として、直交二方向の剛比 f が異なる場合についての曲げモーメント分布の解析結果を示す。

図3は、内縁が自由で、外縁が固定支持された場合の解析結果であり、図2と同様に剛比を変えて計算された曲げモーメント分布を示す。

剛比 g は、デッキプレートの剛性とリブの剛性の比を表わしているから、図1(a)のように、リブで上下に補剛されるような円板の場合では一般に g は1より小さい値となり、図1(b)のように、リブが内側になるような構造の場合では逆に g はかなり大きい値をとることになる。図2と図3から、この剛比 g は、 M_r 分布にはほとんど影響を与えないようであるが、 M_θ の分布には若干の影響を与えていることがわかる。

剛比 g は一定のままで、剛比 f が変化する場合とは、具体的には、円周方向に配置されているリブの配置間隔が変わるとか、リブ断面が変わるというようなことである。図2と図3から、この f が 大きくなるにしたがって、半径方向曲げモーメント M_r は徐々に減少して半径方向のリブの負担は軽減していくことがわかる。一方、円周方向曲げモーメント M_θ の方は、剛比 f が大きくなるにしたがってかなり増大することが認められる。

図4は、周辺が固定されていて、中央に孔があけられているような補剛環状円板に、等分布荷重が作用したときの解析結果を示す。ここでは、中央の孔のサイズを、外側円の大きさに比べて、0.10、0.25、0.50、0.75といろいろな大きさに変えた場合の曲げモーメント分布を示している。剛比は $f=g=1$ のときである。

4. あとがき

リブ補剛環状円板の基礎方程式を誘導し、その解を級数解のかたちで求めた。

その解を用いて、環状板がリブによって外側から補剛される場合と内側から補剛される場合の両方の場合を考慮にいて、断面力分布を解析して示した。

(参考文献)

- 1) 荏澤憲吉・芳村仁：構造的に曲線直交異方性をもつ円板およびリング板の横荷重による対称曲げ、第36回応用力学連合講演会講演予稿集、1986.12
- 2) 荏澤憲吉・芳村仁・野口浩：構造的に曲線直交異方性をもつ円板の対称曲げ、土木学会北海道支部論文報告集、第43号、1987.2
- 3) 荏澤憲吉・芳村仁・野口浩：構造的曲線直交異方性円板の曲げにおける剛性の評価について、土木学会第42回年次学術講演会講演概要集、I、1987.9
- 4) 荏澤憲吉・芳村仁：リブ補剛円板およびサンドイッチリブ円板の横荷重による対称曲げ、第37回応用力学連合講演会講演予稿集、1987.12

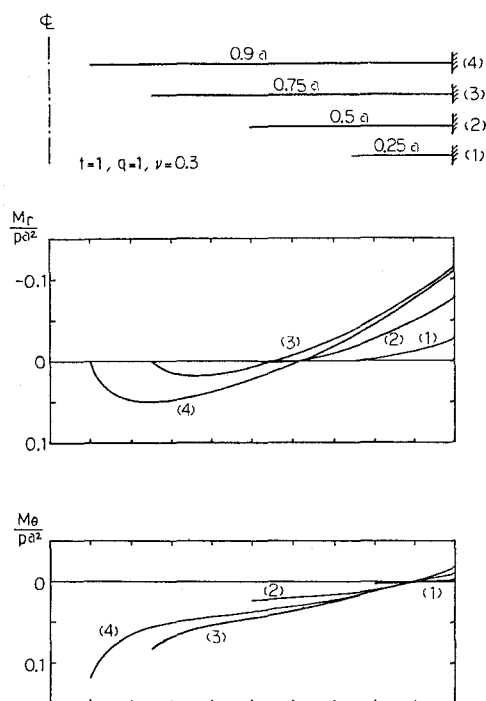


図4. 周辺固定、内縁自由の補剛環状板の曲げモーメント分布（内孔のサイズを変えた場合）