

I-21 差分方程式の剛性マトリックス解析法について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一
北海道大学工学部 正員 渡辺 昇

1. まえがき

合成桁は、鋼桁を特別な部材 (Dübel) を用いてコンクリート版と、せん断に抵抗しうるように結合することにより、共働作用が可能となる構造物である。

合成桁橋ではコンクリート床版と鋼桁が準固定的にあるいは弾性的に結合されているかによって剛合成、弾性合成に区別されている。剛合成桁は、コンクリート床版と鋼桁の間の接触部分に作用するせん断力を確実に伝達し、また同時に両構造部分になんらずれが生じないことを前提にしている。この仮定は合成桁の普通の構造形式では近似的に満たされているにすぎない。定められた間隔にジベルを配置することにより、せん断力が各点に集中する。非常に剛なジベル (剛ジベル) を使用する場合でもずれが生ずる。

文献¹⁾にこの場合の理論式が紹介されている。この理論式の中にずれの程度を示す弾性結合のばね定数を $K(\text{kg/cm}^2)$ とし、重要な役割を果たしている。しかしながら、実用計算に用いる解を得るために、コンクリート床版と鋼桁の点状の結合を、同じ強さの連続した結合でおきかえている。即ち、弾性結合のばね定数を全スパンを通じて一様であると仮定して微分方程式を誘導し解析している。

文献²⁾はジベルの間隔を a として離散 (点状) した結合と考えて差分方程式を誘導して解析している。

本報告では、微分方程式と差分方程式とから Anfang Parameter法 により剛性マトリックスを誘導し、ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の合成桁を解析したものである。

2. 微分方程式と差分方程式の誘導

合成桁の合成断面を図-1のように示す。本報告で用いる記号は次の通りである。

a : ずれ止めの間隔

y_v : 完全剛な場合の桁のたわみ

y_{ve} : ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の桁のたわみ

$y_e = y_{ve} - y_v$

A_s : 版と合成された鋼桁の断面積

I_s : 鋼桁のその重心 S に関する断面二次モーメント

S : 版のコンクリートの重心 C と鋼桁の重心 S との距離

E_c : コンクリートのヤング係数

$E_s = E$: 鋼のヤング係数

$n = E_s/E_c$: 鋼とコンクリートとのヤング係数比

$A_v = A_s + A_c/n$: 鋼断面に換算した合成断面積

$S_s = A_c/n A_v \times S$: 合成断面の中立軸 V と鋼桁の重心 S との距離

$S_c = A_s A_v \times S$: 合成断面の中立軸 V と版のコンクリートの重心 C との距離

$I_v = I_s + I_c/n + A_v \cdot S_c \cdot S_s$: 鋼断面に換算した合成断面の断面二次モーメント

A_c : 共働する版のコンクリートの断面積

I_c : 合成コンクリート断面のその重心 C に関する断面二次モーメント

M_{vv} : 完全剛な場合の桁の曲げモーメント

M_{ve} : ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の桁の曲げモーメント

K : ずれ程度を示す弾性結合のばね定数 , δ : ずれ量

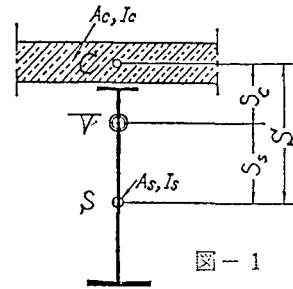


図-1

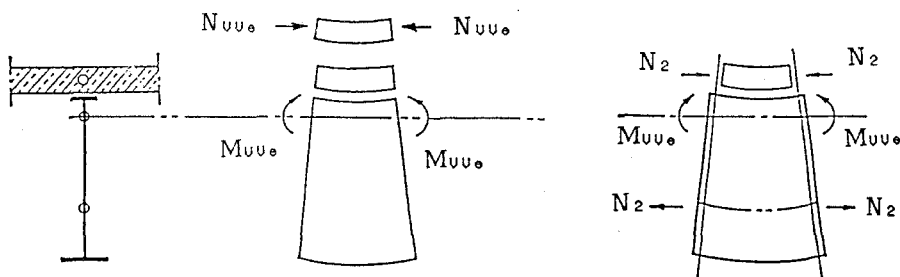


図-2

ここでは、剛合成を完全剛な場合、弾性合成をずれ止めの弾性変形を考慮した場合とする。ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の理論式の誘導は次のように考える³⁾ (図-2 参照)。完全剛の場合の桁のたわみを y_u とし、曲げモーメントを M_{uu} とすると次式が成り立つ。

$$E I_u \frac{d^4 y_u}{d x^4} = - \frac{d^2 M_{uu}}{d x^2} \quad (1)$$

(イ) 最初に、剛に結合された普通の合成断面を考える。曲げモーメント M_{uu} が作用している時の桁の曲率はずれ止めの弾性変形を考慮した時のたわみを y_u とすれば

$$\frac{d^2 y_u}{d x^2} = - \frac{M_{uu}}{E I_u} \quad (2)$$

コンクリートに作用する応力の総和 N_{uu} は、圧縮力を正とすると

$$N_{uu} = \frac{A_c S_c}{n I_u} M_{uu} \quad (3)$$

(ロ) コンクリート部の重心に圧縮力 N_2 、鋼断面の重心に引張力 N_2 を作用させてやる。コンクリートと鋼とが絶縁されていれば、桁の曲率はそのまま、コンクリートと鋼とに歪みの食い違いができる。この量は単位長さあたり

$$\epsilon = \left\{ \frac{n}{E A_c} + \frac{1}{E A_s} \right\} \cdot N_2 = \frac{n S}{E A_c S_c} \cdot N_2 \quad (4)$$

また、 N_2 によって与えられる曲げモーメントは

$$M_2 = S \cdot N_2 \quad (5)$$

結局、断面に作用する全モーメント M_{uv} と、コンクリート部の応力の総和の N_{ue} は

$$\begin{aligned} M_{uv} &= M_{uu} + M_2 \\ N_{ue} &= N_{uu} + N_2 \end{aligned} \quad (6)$$

(ハ) この状態で、コンクリート断面と鋼断面を橋軸方向に δ だけずらせる。ずれに抵抗する T は弾性的なずれ止めによって起こり、ずれ止めのバネ定数 K を使って次の形に考える。

$$T = K \delta \quad (7)$$

ずれ止めに作用する力は、コンクリート断面の圧縮力の増加分に見合うから

$$\frac{d N_{ue}}{d x} = T \quad (8)$$

また、ずれの量 δ は式(4)の歪みの橋軸方向に加算されて生ずるから

$$\frac{d \delta}{d x} = \varepsilon \quad (9)$$

これが、弾性的なずれ止めを考慮する場合の基本的な関係である。

式(1)～式(9)までの関係を使って、まず N_2 を整理した形で示せば、

$$\frac{d^2 N_2}{d x^2} - w^2 N_2 = -\alpha \frac{d^2 M_{uu}}{d x^2} \quad (10a)$$

$$\frac{\Delta^2 N_2}{a^2} - w^2 N_2 = -\alpha \frac{\Delta^2 M_{uu}}{a^2} \quad (10b)$$

$$w^2 = \frac{n I_u}{n I_s + I_c} \cdot \frac{K n}{E A_c} \cdot \frac{S}{S_c} \quad (11a)$$

$$\alpha = \frac{A_c S_c}{n I_s + I_c} \quad (11b)$$

コンクリートの軸応力の合力 N_{ue} で整理すれば

$$\frac{d^2 N_{ue}}{d x^2} - w^2 N_{ue} = -\beta M_{uu} \quad (12a)$$

$$\frac{\Delta^2 N_{ue}}{a^2} - w^2 N_{ue} = -\beta M_{uu} \quad (12b)$$

$$\text{ただし、} \quad \beta = \frac{n K S}{E (n I_s + I_c)} \quad (13)$$

ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の桁の変形 y_u で整理すれば

$$\frac{d^4 y_{ue}}{d x^4} - w^2 \frac{d^2 y_{ue}}{d x^2} = -\frac{n}{E (n I_s + I_c)} \frac{d^2 M_{uu}}{d x^2} + \frac{w^2}{E I_u} M_{uu} \quad (14a)$$

$$\frac{\Delta^4 y_{ue}}{a^4} - w^2 \frac{\Delta^2 y_{ue}}{a^2} = -\frac{n}{E (n I_s + I_c)} \frac{\Delta^2 M_{uu}}{a^2} + \frac{w^2}{E I_u} M_{uu} \quad (14b)$$

次に、完全剛の場合のたわみは式(1)より y_u であるから、この y_u とずれ止めの弾性変形を考慮した場合のたわみ y_{ue} との差を y_e とする。

$$y_e = y_{ue} - y_u \quad (15)$$

式(15)を式(14)に代入して y_e で整理すれば

$$\frac{d^4 y_e}{d x^4} - w^2 \frac{d^2 y_e}{d x^2} = -\frac{1}{E I_e} \frac{d^2 M_{uu}}{d x^2} \quad (16a)$$

$$\frac{\Delta^4 y_e}{a^4} - w^2 \frac{\Delta^2 y_e}{a^2} = -\frac{1}{E I_e} \frac{\Delta^2 M_{uu}}{a^2} \quad (16b)$$

$$\text{ただし、} \quad I_e = I_u \frac{n I_s + I_c}{A_c S_c S} \quad (17)$$

以上より、ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の合成桁の変形は、完全剛な場合の変形 y_u (式(1)) と式(16)で示されるような桁の変形 y_e との代数和で計算される。応力も完全剛な場合の応力と y_e の変形に見合う応力分布との代数和である。

3. 剛性マトリックスの誘導

式(1)は普通の桁(曲げ剛性 $E I_0$) の場合であるから、剛性マトリックスの誘導はここでは省略する。式(16a)、式(16b)を Anfang Parameter 法により剛性マトリックス化する。

式(16a)、式(16b)の右边を零とおいた時の一般解は

$$y_e(x) = A_1 \sinh wx + B_1 \cosh wx + C_1 x + D_1 \quad (18a)$$

$$y_e(x) = A_2 \sinh \mu i + B_2 \cosh \mu i + C_2 i + D_2 \quad (18b)$$

$$\text{ただし、} \quad w^2 = \frac{H}{E I_0} \quad (19a)$$

$$\mu = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} a^2 w^2 \right) \doteq a w \quad (19b)$$

以下、式(18a)を微分して

$$y_e(x) = \frac{d y_e(x)}{d x}$$

$$M_{ee} = -E I_0 \frac{d^2 y_e(x)}{d x^2} \quad (20a)$$

$$Q_{ee} = -E I_0 \frac{d^3 y_e(x)}{d x^3} + H \frac{d y_e(x)}{d x}$$

式(18b)を差分して

$$\Delta y_e(i) = \frac{y_e(i+1) - y_e(i-1)}{2a}$$

$$M_{ee} = -E I_0 \frac{\Delta^2 y_e(i)}{a^2} \quad (20b)$$

$$Q_{ee} = -E I_0 \frac{\Delta^3 y_e(i)}{a^3} + H \frac{\Delta y_e(i)}{a}$$

を求める。以降、便宜上ここでは添字を省略する。また、微分方程式からの剛性マトリックスの誘導は省略し、結果のみを後半で示す。

以下、差分方程式からの剛性マトリックスの誘導を示す。

式(20b)において、 $i=0$ において、任意定数 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 をそれぞれ初期パラメータ $\{y(0)$ 、 $\Delta y(0)/a$ 、 $M(0)$ 、 $Q(0)\}$ で表し、これを式(18b)、(20b)に代入し、次に、 $i=m$ (ジベル間隔の m 倍) とおき、マトリックス表示すれば、次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} y(i) \\ \Delta y(i)/a \\ M(i) \\ Q(i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \Delta y(0)/a \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (21b)$$

式(21b)を分割マトリックスを用いて変形し、剛性マトリックスの符号に直せば、次式が微分方程式から誘導された剛性マトリックスである。

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(i) \\ M(i) \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{sym.} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \Delta y(0)/a \\ y(i) \\ \Delta y(i)/a \end{Bmatrix} \quad (22b)$$

$$\begin{aligned}
\text{ただし、} G &= \frac{H^2}{2 - 2 \cdot \cosh \mu m + m \cdot \sinh \mu \cdot \sinh \mu m} \\
k_{11} &= k_{33} = -k_{13} = \frac{1}{H} \frac{\sinh \mu}{a} \cdot \sinh \mu m \\
k_{12} &= k_{14} = -k_{23} = -k_{34} = \frac{1}{H} (\cosh \mu m - 1) \\
k_{22} &= k_{44} = \frac{1}{H} \frac{a}{\sinh \mu} (m \cdot \sinh \mu \cdot \cosh \mu m - \sinh \mu m) \\
k_{24} &= \frac{1}{H} \frac{a}{\sinh \mu} (\sinh \mu m - m \cdot \sinh \mu)
\end{aligned} \tag{23b}$$

一方、微分方程式から誘導された剛性マトリックスは、式(22b)と同形になる。

$$\begin{aligned}
\text{ただし、} G &= \frac{H^2}{2 - 2 \cdot \cosh wa + wa \cdot \sinh wa} \\
k_{11} &= k_{33} = -k_{13} = \frac{1}{H} w \cdot \sinh wa \\
k_{12} &= k_{14} = -k_{23} = -k_{34} = \frac{1}{H} (\cosh wa - 1) \\
k_{22} &= k_{44} = \frac{1}{H} \frac{1}{w} (wa \cdot \cosh wa - \sinh wa) \\
k_{24} &= \frac{1}{H} \frac{1}{w} (\sinh wa - wa)
\end{aligned} \tag{23a}$$

〔考察〕 式(23a)、(23b)との関係をしらべてみる。

式(19b)の意味するところは wa が小さければ、 $\mu \doteq wa$ となることである。
 式(23b)において、 $\sinh \mu \doteq \sinh wa \doteq wa$ とおいた後、 $m=1$ とおき、
 $\sinh \mu m \doteq \sinh wa \cdot 1 = \sinh wa$ とすれば、式(23a)と一致する。即ち、
 微分方程式より誘導した剛性マトリックスと一致する。
 なお、式(23b)において $m=1$ として全体の剛性マトリックスを組み立てて
 いけばよい。その場合、式(23b)の最後の項 $k_{24}=0$ となる。 $m=2$ として
 全体の剛性マトリックスを組み立てて解析しても同じ結果が得られることを
 確かめてある。その場合、式(23b)の最後の項目 $k_{24} \neq 0$ である。

4. 数値計算例

ここでは文献²⁾で用いた図-3に示すような厚さ6mmの鋼板に厚さ13cmのコンクリートを頭つきスタッドジベルで合成したCS橋の床版の部分模型を製作し、ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の合成桁として解析した。

スパン 100cm の中央に $P=1000$ kg の集中荷重を載荷した時のたわみ、曲げモーメント、軸力を求めた。1本あたりのずれ止めのばね定数 $Ka=130t/cm$ とした²⁾。ここで、差分剛とは差分方程式より誘導した剛性マトリックス解析値であり、微分剛とは微分方程式より誘導した剛性マトリックス解析値である。

表-1より本数が少なくなれば、たわみと曲げモーメントが増加し、軸力が減少することがわかる。また、微分剛は差分剛に比較して、たわみ、軸力に関しては小さめに求まり、曲げモーメントに関しては大きめに求まることがわかる。なお、本報告では示していないが、本解析で求めた曲げモーメントと軸力は合成断面の中立軸に関する曲げモーメントと釣合っていることも確かめてある。

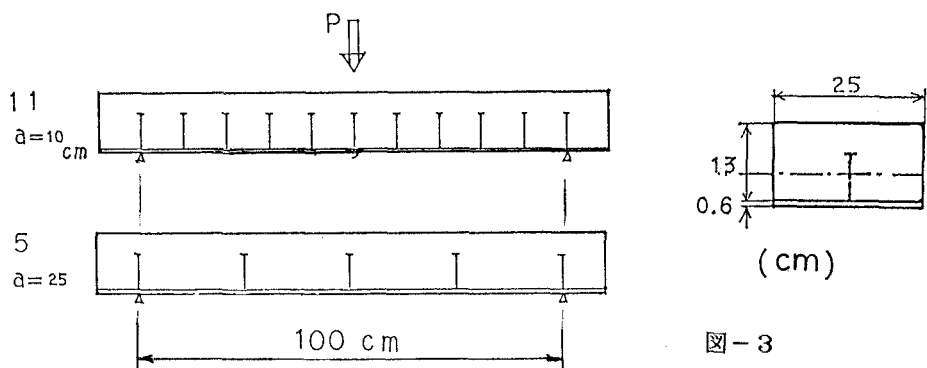


図-3

表-1	中央点の値					
	たわみ(mm)		曲げモーメント(kgcm)		軸力(kg)	
ジベル	11本	5本	11本	5本	11本	5本
差分剛	0.1190	0.1381	36560	39780	692	429
微分剛	0.1184	0.1326	36710	40310	679	385

5. あとがき

ずれ止めの弾性変形を考慮した場合の解析において

- 1) 従来からずれ止めのばね定数を全スパンを通じて一様と仮定して、微分方程式で解析しているが、ずれ止めの間隔を a として離散した結合と考えて、差分方程式で解析する方がよいと思われる。
- 2) 微分方程式から誘導した剛性マトリックスと差分方程式から誘導した剛性マトリックスとを比較しながら表示し、両者の関係を明らかにした。
- 3) 微分方程式から誘導した剛性マトリックスの解析結果と微分方程式の解析結果とが一致することを確認めた。また、差分方程式から誘導した剛性マトリックスの解析結果と差分方程式の解析結果とが一致することを確認めた。
- 4) 微分方程式と差分方程式による解析において、数値計算例で計算値に多少差が生じている。即ち、従来からの微分方程式による解析値は差分方程式による解析値と比較して、たわみと軸力に関しては小さめに求まり、曲げモーメントに関しては大きめに求まる。
- 5) 本報告での剛性マトリックス解析法は連続桁にも適用できる。

参考文献

- 1) A. ハウラネック / O. シュタインハルト：鋼橋の理論と計算（橋 善雄、小松定夫共訳）、山海堂、1965。
- 2) 横田敏幸、佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康：C S 橋の頭つきスタッドジベルの解析と実験、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、1988。
- 3) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973。
- 4) 丸山哲郎：自然科学・工学のための差分方程式序説、現代数学社、1981。