# IV－7 座標既知の3点から他の1点を標定する三角測量の厳密解

北海道産業専門学校 正会員 今井芳雄

§1. 前言　距離既知の両端角によって頂点を標定するのが三角測量の基本であるが、標定の精度は両端2角の信頼度如何による。三角形の3内角の和180°の条件だけでは両端2角の信頼度に今1つ不足である。少くとも既知点を3点とすれば、独立の長さが、2つ相接するわけで、独立の辺条件が2つある制限によって標定の信頼度は一挙に向上する。筆者はこれの解について文字係数の厳密一般解を求めたので発表する


§2. 三角測量網図．座標既知の3点を $P_{16}$, $P_2$, $P_5$, 標定点を $P_{34}$ とする 既知距離を $L_1$, $L_2$ とする (Fig. 2.1) 観測した内角を $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ とする 角 $B_0$ は座標値から換算して既知角となる。

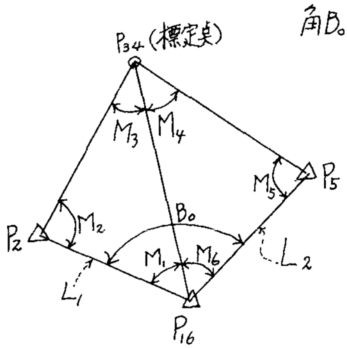



Fig. 2.1

§3. 観測角の条件式．　観測した角 $M_i$ ($i=1,2,\cdots 6$) の補正値を $v_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots 6$) とする。そうすると $(M_1+v_1)+(M_6+v_6)=B_0$ ……(3.1), $(M_1+v_1)+(M_2+v_2)+(M_3+v_3)=180°$ ……(3.2)

$$(M_6+v_6)+(M_5+v_5)+(M_4+v_4)=180° \cdots\cdots (3.3)$$

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{\sin(M_3+v_3)}{\sin(M_2+v_2)}\cdot\frac{\sin(M_5+v_5)}{\sin(M_4+v_4)} \cdots\cdots (3.4)$$

が満足すべき4つの独立条件式である

§4. 補正値 $v_i$ の条件式

$\phi_1 = v_1+v_6 = B_0-(M_1+M_6) \equiv \Delta B$ …既知角 $B_0$ に一致の条件 ……(4.1)

$\phi_2 = v_1+v_2+v_3 = 180°-(M_1+M_2+M_3) \equiv \Delta A$ …三角形3内角の和180°の条件……(4.2)

$\phi_3 = v_6+v_5+v_4 = 180°-(M_6+M_5+M_4) \equiv \Delta C$ …三角形3内角の和180°の条件……(4.3)

数学から $\log_{10}\sin(M_i+v_i^{秒}) = \log_{10}\sin M_i + 0.4343\times\frac{1}{\tan M_i}\times 10^{-6}\times 4.848\times v_i^{秒}$ ここに $\log_{10}e=0.4343$

であるから (3.4) 式両辺の対数をとり整理すると

$$\phi_4 = \frac{1}{\tan M_3}v_3^{秒}+\frac{1}{\tan M_5}v_5-\frac{1}{\tan M_2}v_2-\frac{1}{\tan M_4}v_4=\Big[\log_{10}L_1-\log_{10}L_2-\Big\{\log_{10}\sin M_3+\log_{10}\sin M_5-\log_{10}\sin M_2-\log_{10}\sin M_4\Big\}\Big]\times\frac{1}{0.4343\times 10^{-6}\times 4.848} \equiv (\Delta E)$$

…辺条件 ……(4.5)

$\phi_5 = f(v) = v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2+v_5^2+v_6^2$ ＝最小 ……(4.5), (4.5)式は正の数のみの和であるから和の最小値は存在する 全微分 $df=0$ の時満される

§5. 誤差の偏微分方程式：$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ $\phi_5$ の条件式を Lagrange の未定係数 $\lambda_1$, $\lambda_2$ $\lambda_3$, $\lambda_4$ を用いて、補正値 $v_i$ ($i=1,2\cdots 6$) について偏微分した偏微分方程式を編成すると (5.1), (5.2) …(5.6) 式が得られる

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_1}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_1}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_1}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_1}=0 \cdots\cdots (5.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_2}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_2}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_2}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_2}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_2}=0 \cdots\cdots (5.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_3}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_3}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_3}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_3}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_3}=0 \cdots\cdots (5.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_4}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_4}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_4}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_4}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_4}=0 \cdots\cdots (5.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_5}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_5}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_5}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_5}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_5}=0 \cdots\cdots (5.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_6}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_6}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_6}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_6}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_6}=0 \cdots\cdots (5.6)$$

(5.1)…(5.6)式中のすべての $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ の演算を(4.1)…(4.5)式に施し得られたものを(5.1)……(5.6)式に代入すると $v_i$ $(i=1,2,\dots 6)$ が式(5.21)…(5.26)の様にλのみの関数として求められる

この $v_i$ を(4.1)式…(4.5)の $v_i$ に再び代入すると $v_i$ に代って $\lambda_i$ $(i=1,2,3,4)$ の4元連立方程式(5.11)…(5.14)式が得られる; $-2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=2(\Delta B)\cdots\cdots(5.11)$, $-\lambda_1-3\lambda_2=\lambda_4\left(-\frac{1}{\tan M_2}+\frac{1}{\tan M_3}\right)+2(\Delta A)\cdots(5.12)$

$-\lambda_1-3\lambda_3=\lambda_4\left(\frac{1}{\tan M_5}-\frac{1}{\tan M_4}\right)+2(\Delta C)\cdots\cdots(5.13)$

$$\left(-\frac{1}{\tan M_3}+\frac{1}{\tan M_2}\right)\lambda_2+\left(-\frac{1}{\tan M_5}+\frac{1}{\tan M_4}\right)\lambda_3=\lambda_4\left\{\left(\frac{1}{\tan M_3}\right)^2+\left(\frac{1}{\tan M_5}\right)^2+\left(\frac{1}{\tan M_2}\right)^2+\left(\frac{1}{\tan M_4}\right)^2\right\}+2(\Delta E)\cdots(5.14)$$

$v_1=\frac{1}{2}\{-\lambda_1-\lambda_2\}\cdots(5.21)$, $v_2=\frac{1}{2}\{-\lambda_2+\lambda_4\frac{1}{\tan M_2}\}\cdots(5.22)$, $v_3=\frac{1}{2}\{-\lambda_2-\lambda_4\frac{1}{\tan M_3}\}\cdots(5.23)$

$v_4=\frac{1}{2}\{-\lambda_3+\lambda_4\frac{1}{\tan M_4}\}\cdots(5.24)$, $v_5=\frac{1}{2}\{-\lambda_3-\lambda_4\frac{1}{\tan M_5}\}\cdots(5.25)$, $v_6=\frac{1}{2}\{-\lambda_1-\lambda_3\}\cdots\cdots(5.26)$

## §6. λについての方程式の解;

(5.11)と(5.12), (5.11)と(5.13)式から $\lambda_1$ を消去すると

$$2.5\lambda_2-0.5\lambda_3=(\Delta B)-\lambda_4\left(-\frac{1}{\tan M_2}+\frac{1}{\tan M_3}\right)-2(\Delta A)\cdots\cdots(6.1)$$

$$-0.5\lambda_2+2.5\lambda_3=(\Delta B)-\lambda_4\left(\frac{1}{\tan M_5}-\frac{1}{\tan M_4}\right)-2(\Delta C)\cdots\cdots(6.2)$$

(6.1), (6.2)式を $\lambda_4$ 既知扱いで解くと

$$\lambda_2=\frac{1}{6}\times3(\Delta B)-\frac{1}{6}\times5(\Delta A)-\frac{1}{6}(\Delta C)-\lambda_4\times\frac{1}{6}\left(-\frac{2.5}{\tan M_2}+\frac{2.5}{\tan M_3}+\frac{0.5}{\tan M_5}-\frac{0.5}{\tan M_4}\right)\cdots(6.11)$$

$$\lambda_3=\frac{1}{6}\times3(\Delta B)-\frac{1}{6}(\Delta A)-\frac{1}{6}\times5(\Delta C)-\lambda_4\times\frac{1}{6}\left(\frac{2.5}{\tan M_5}-\frac{2.5}{\tan M_4}-\frac{0.5}{\tan M_2}+\frac{0.5}{\tan M_3}\right)\cdots(6.12)$$

この(6.11), (6.12)両式の $\lambda_2$, $\lambda_3$ を(5.14)式の $\lambda_2$, $\lambda_3$ に代入すると $\lambda_4$ が観測値の関数として得られる。又, (6.11), (6.12)式の $\lambda_2$, $\lambda_3$ を(5.11)式に代入して

$$-2\lambda_1=3(\Delta B)-(\Delta A)-(\Delta C)-\lambda_4\times\frac{3}{6}\left(-\frac{1}{\tan M_2}+\frac{1}{\tan M_3}+\frac{1}{\tan M_5}-\frac{1}{\tan M_4}\right)\cdots\cdots(6.13)$$

として $\lambda_4$ の関数として数値解が得られる

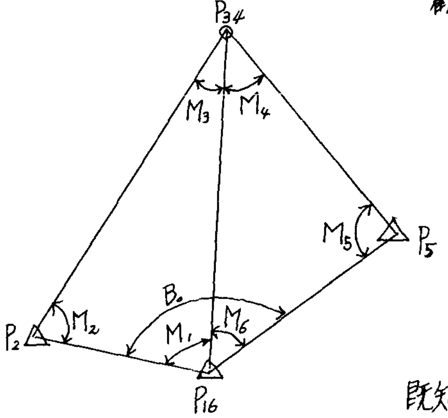
## §7 $\lambda_4$の解と残りλの解;

§6に述べた解析手順により $\lambda_4$ が

$$\lambda_4=\frac{(-)\left(-\frac{1}{\tan M_3}+\frac{1}{\tan M_2}\right)\times\left\{\frac{1}{6}\times3(\Delta B)-\frac{1}{6}\times5(\Delta A)-\frac{1}{6}(\Delta C)\right\}-\left(-\frac{1}{\tan M_5}+\frac{1}{\tan M_4}\right)\times\left\{\frac{1}{6}\times3(\Delta B)\right.}{(-)\left[-\frac{1}{6}\left\{\left(-\frac{1}{\tan M_3}+\frac{1}{\tan M_2}\right)\left(-\frac{2.5}{\tan M_2}+\frac{2.5}{\tan M_3}+\frac{0.5}{\tan M_5}-\frac{0.5}{\tan M_4}\right)+\left(-\frac{1}{\tan M_5}+\frac{1}{\tan M_4}\right)\right.\right.}$$

求められる　$\lambda_4$の数値解を(6.11), (6.12), (6.13)式に代入して $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_1$ の数値解が得られる　$\lambda_2$, $\lambda_3$ の数値解を (5.11) 式に代入しても $\lambda_1$の数値解が得られる $M_i$ ($i=1,2\cdots\cdots6$) の補正値 $v_i$秒 ($i=1,2,\cdots\cdots6$) は $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ の数値解を (5.21)……(5.26)式に代入して求め得る　以上によって §4 の条件を一挙に満足する $v_i$秒 ($i=1,2,\cdots6$)が求められた事になる

## §8. 計算例




観測角　$M_1 = 81^\circ\sim02'\sim12''$

$M_2 = 69^\circ\sim57'\sim14''$

$M_3 = 29^\circ\sim00'\sim44''$

$M_4 = 43^\circ\sim21'\ 51''$

$M_5 = 85^\circ\sim29'\sim48''$

$M_6 = 51^\circ\sim08'\sim16''$

既知角　$B_0 = 132^\circ\sim10'\sim23''$

$L_1 = 450^m$,　$L_2 = 600^m$

(解)　$\Delta B = B_0 - (M_1 + M_6) = 132^\circ\sim10'23'' - 132^\circ\sim10'28'' = (-)5''$

$\Delta A = 180^\circ - (M_1 + M_2 + M_3) = 180^\circ - 179^\circ\sim59'\sim70'' = (-)10''$

$\Delta C = 180^\circ - (M_6 + M_5 + M_4) = 180^\circ - 179^\circ\sim58'\sim115'' = (+)5''$

$\frac{1}{\tan M_2} = 0.364882$, $\frac{1}{\tan M_3} = 1.803141$, $\frac{1}{\tan M_4} = 1.058796$

$\frac{1}{\tan M_5} = 0.0787603$,　(7.1)式によって $\lambda_4 = (-)71.340984$秒 が得られる

(6.11)式によって $\lambda_2 = 41.92644$秒, (6.12)式から $\lambda_3 = (-)25.5814$秒

(6.13)式から $\lambda_1 = (-)3.1725$秒　(5.21)式から $v_1 = (-)19.377$秒　(5.26)式から

(7.1) ←

$$\frac{-\frac{1}{6}(\Delta A) - \frac{5}{6}(\Delta C)\} + 2\times\left\{\log_{10} L_1 - \log_{10} L_2 - \{\log_{10}\sin M_3 + \log_{10}\sin M_5 - \log_{10}\sin M_2 - \log_{10}\sin M_4\}\right\}\times\frac{1}{0.4343\times10^{-6}\times4.848}}{\left(\frac{2.5}{\tan M_5} - \frac{2.5}{\tan M_4} - \frac{2.5}{\tan M_2} + \frac{0.5}{\tan M_3}\right) + \left(\frac{1}{\tan M_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tan M_5}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tan M_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tan M_4}\right)^2\ ]}$$

$v_6=(+)14.377$秒　∴ $v_1+v_6=(-)19.377+14.377=(-)5$秒$=(\Delta B)$

(5.22)式から $v_2=-33.98$秒, (5.23)式から $v_3=43.55$秒　∴ $v_1+v_2+v_3=(-)10$秒 $=\Delta A$, (5.24)式から $v_4=(-)24.98$秒　(5.25)式から $v_5=(+)15.6$秒

∴ $v_4+v_5+v_6=(+)5$秒$=\Delta C$　$v_3,\ v_5,\ v_2,\ v_4$ の値を(4.4)式に代入すると $118.24997=\Delta E$ となる　これによって(4.1),(4.2),(4.3),(4.4)式の4条件をすべて満足している。(7.1)式の有効な事が立証された。　補正前の観測角 $M_2, M_3; M_5, M_4$ から $P_{16}\sim P_{34}$ の距離を求めると $871.^{m}631$ と $871.^{m}132$

と不同であるが補正Put in角では $871.^{m}248$ で標定は完全に一致する。

## §9. 結言

180°の閉合差が10秒の三角形であっても辺条件を満すため1内角が40秒もの補正が必要になる結果を得た。　厳密解の客観性と合理性を見る。もし角$B_0$を180°即ち既知3点を一直線上にえらべば厳密な標定が手軽に実施出来る。(1986-10-6)