土木学会北海道支部　論文報告集　昭和61年度

II－36　帯水層定数の同定過程における不安定性について

室蘭工業大学　正員　藤間　聡

I　まえがき

透水量係数、貯留係数等の帯水層定数は分布パラメータであり、その値を推定するには地質構成、成層構造、涵養量および揚水量等多数の地質学的、水文学的情報を必要とする。従って、パラメータの値を一定と仮定して地下水流動モデルにより地下水応答を予測する場合には、現実の応答と掛け離れた結果を得ることになる。これらの分布パラメータを同定するには、数個所の観測井において揚水試験を行い地点帯水層定数を決定し、その結果に基づき逆探問題（Inverse problem)として分布構造を求めることが一般的である。この際、観測値に誤差が含まれると最適値には収束せず、ときには物理的に許容できないパラメータ値を得る場合がある。本研究は非線形最小二乗法を用いて観測地下水位から帯水層定数を同定する過程において発生する解の不安定性に関して考察を加える。

II　帯水層定数の最適同定

地下水系のパラメータの推定法に関しては、地下水応答に基づく流動モデルを作成し、観測地下水位との差のノルムを最小にするパラメータ値を探索する方法が多用されている[1),2),3)]。
この方法は観測データ数が限られた少数の場合にも適用でき、また観測値の微係数を必要としない長所がある。しかし、最小化過程が非線形であり、しばしば解が収束しない短所を併せて有している。

本研究においては、次式で表示される平面二次元定常地下水流動に関して非線形最小二乗による最適化手法を用いて解析を進める。なお、最適同定すべき帯水層定数は透水量係数の一変数のみとなる。

$$T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+Q=0 \qquad \cdots(1)$$

hは地下水位または地下水頭、Tは透水量係数、Qは涵養量または揚水量、x，yは平面座標を示す。観測地点における透水量係数の最適推定値は、観測地下水位に対する流動モデルによる計算地下水位の残差平方和を最小にするものと考え、最適値を探索するための評価基準として次式を採用する。

$$I(T) = \Sigma W[h_0-h(T)]^2 \qquad \cdots(2)$$

式中のIは評価基準、h_0は観測地下水位、h(T)は計算地下水位、Wは重みで、$W=\alpha/\sigma_0{}^2$と定義される。αは任意の既知定数、$\sigma_0{}^2$は観測誤差の分散を示す。一般に、観測誤差の絶対値はわからないが、すべて等しいと予測できることから以後の展開ではW＝1とする。総和Σは全観測地点数に対応する。

ここで、同定すべき透水量係数Tに関して(2)式の最小化を行うと次式を得る。

$$\partial I/\partial T = J'[h_0-h(T)] = 0 \qquad \cdots(3)$$

式中における上付き記号′は転置を示す。また、Jはヤコビアン行列と呼称される地下水位hの透水量係数Tに関する偏微分係数で、その要素は次式で定義され、線形モデルにおいては既知の定数である。

$$[J] = [\partial h_1/\partial T_1 \cdots \partial h_1/\partial Tm, \cdots, \partial hn/\partial T_1 \cdots \partial hn/\partial Tm]' \qquad \cdots(4)$$

ここに、nは観測総数であり、mは同定すべき透水量係数の総数に対応する。
地下水位は透水量係数の関数形で表示されるため(3)式は非線形となり、直接その解を求めることができない。従って、次式で示す一次までの線形化を行い、反復改良法により残差平方和を最小にする方法を採用する。

$$h(T+\Delta T) = h(T)+J'\Delta T \qquad \cdots(5)$$

上式を(3)式に代入すると、透水量係数の反復修正量ΔTは次のように求められる。

$$\Delta T = (J'J)^{-1}J'[h_0-h(T)] \qquad \cdots(6)$$

(6)式から各反復時において得られる透水量係数は次のように表わされる。

$$T(k+1) = T(k)+(J'J)^{-1}J'[h_0-h(T)] \qquad \cdots(7)$$

ただし、式中のkは反復回数を示す。

上記の同定過程において、透水量係数Tが修正されるごとに評価基準Iの計算を行い、それが極小値をとるときのTを最適同定値とする。

Ⅲ　帯水層定数の同定誤差

前章において、最小二乗法により帯水層定数の最適値を求めるアルゴリズムを示した。しかし、得られた透水量係数は誤差を含んだ観測地下水位から計算したものであり、モデル誤差がない場合でも最適値には誤差が伝播されることになる[4]。本章では同定値に含まれる誤差の生成要因について考察する。

観測誤差を微小量と仮定すると、非線形モデルであっても局所的な線形近似が成立することから、誤差伝播則を用いて透水量係数の誤差行列を次のように定義する。

$$\Sigma_T = \sigma_0^2 (J' J)^{-1} \qquad \cdots(8)$$

ここに、Σ_T は同定値の誤差の分散・共分散、σ_0^2は観測誤差の分散を表わす。

上式から、透水量係数同定値の誤差の分散、共分散を規定する要因の一つは測定精度σ_0^2であり、測定値そのものには依存しないことがわかる。他の一つはヤコビアン行列Jであり、式の形から測定精度σ_0^2に乗ずる倍率と考えられる。地下水系においては透水量係数の変動に対する地下水位の応答は、一般に低いことからJは小さな値となり、常に観測誤差が増大した形で同定誤差に伝播することになる。

次に、非線形最小二乗法の収束アルゴリズムについて検討を加える。各反復時に得られる残差平方和(評価基準) I(T)を、求めるべき最小残差平方和I(T*)を用いて展開すると次式を得る。

$$I(T) = I(T^*) + \Delta T' \Sigma_T^{-1} \Delta T \qquad \cdots(9)$$

ここで、 T*は最適値、Tはある反復時の同定値、Σ_T は同定値の誤差分散・共分散行列を示す。
上式の右辺第2項においてΣ_T が大きい場合には、修正量ΔTが微小量でなくともI(T*)とI(T) とがほぼ等しくなり収束条件を満足する可能性が生ずる。この状態で機械的に得られる透水量係数は非常に大きな誤差を含むものが最適値として同定されることになる。

以上の誤差解析の結果、最適同定値の誤差の絶対値は観測誤差およびヤコビアン行列に支配され、特に後者の性質から透水量係数の変動に対する地下水位の応答が低い地下水系においては最適な透水量係数の同定は困難になると考えられる。

Ⅳ　解析結果および考察

本章においては中央差分法により地下水流動モデルの定式化を行い、パラメータ同定過程の不安定性について事例的に解析する。本例では観測地下水位が広範囲にわたり多数の地点で測定され、地下水流動が定常状態と仮定でき、かつ涵養量および揚水量が無視できるWaltonの現地観測資料[5]を使用する。

帯水層は表層以深30mに基岩が存在し、地質構成は表層がシルトおよび粘土であり、下層に行くに従い構成粒径が増大し、最下層では主に粗砂・砂利からなる被圧帯水層である。地下水は年間約1000mmに達する降雨により不圧部分から涵養されている。解析は揚水の影響がないと考えられる帯水層中央部の東西・南北3kmの正方領域を対象とし、各辺を300m毎に10分割し、総計121の格子点上で透水量係数の推定および不安定性の要因について検討を行う。

本解析の定常地下水流動の応答モデルは (1)式を差分化し次式のように与える。

$$A_{i,j}h_{i+1,j} + B_{i,j}h_{i-1,j} + C_{i,j}h_{i,j+1} + D_{i,j}h_{i,j-1} - E_{i,j}h_{i,j} + Q = 0 \qquad \cdots(10)$$

$$A_{i,j} = T_{i,j}/\Delta x^2 + (\partial T/\partial x)/2\Delta x,\ B_{i,j} = T_{i,j}/\Delta x^2 - (\partial T/\partial x)/2\Delta x,$$

$$C_{i,j} = T_{i,j}/\Delta y^2 + (\partial T/\partial y)/2\Delta y,\ D_{i,j} = T_{i,j}/\Delta y^2 - (\partial T/\partial y)/2\Delta y,$$

$$E_{i,j} = 4T_{i,j}/\Delta x^2$$

この中央差分スキームにおいては、x，y方向の増分Δx、Δyを等値とする。

解析結果の一例を表－1に示す。表中の透水量係数の初期値はWaltonが提示した透水量係数分布図から補間した値である。反復改良過程での最適値の判定は全格子点上の計算水頭値と観測水頭値との絶対

残差の総和が 0.1m以下の許容条件に拠った。ただし、本例で使用する観測水頭値は、Waltonの値に平均m=0、分散$\sigma_0{}^2$=4cm²の正規乱数を観測誤差として加えたものとする。

表－１の下段にこの収束条件により最適同定された透水量係数を示してある。この計算における水頭値の絶対残差の総和は0.0217mであり、観測値と計算値とは高い精度で一致をみているにも拘わらず、得られた透水量係数は多くの地点で物理的に許容できない負の値が出現している。

ここで、不合理な結果を得た原因について前章で述べた誤差解析を用いて検討を加える。表－２にヤコビアン逆行列J^{-1}の要素の一部を掲示してある。ただし、同表の値は行列J^{-1}の各行における最大絶対値を示している。表中の最大値はJ^{-1}=7.53であり、この値から$(J'J)^{-1}$=56.7を得る。また、観測水頭値の誤差分散$\sigma_0{}^2$=4cm²を (8)式に代入すると透水量係数の誤差分散はΣ_T =227(cm²/s)²と求まる。

この観測誤差の設定条件では $(J'J)^{-1}$, Σ_T が共に大きな値になるため、(6)式で示す修正量ΔTは過大となり、逆に (9)式の残差平方和の修正量は過小に計算され形式上収束条件を満たし、物理的に許容できない負値が最適値として同定されることになる。

上述の結果から地下水位観測誤差が測定機器の検出性能上妥当な値であっても、応答が低い地下水系または観測井の配置形態によってはヤコビアン行列Ｊの値が小さくなり過ぎ、パラメータの正確な推定ができない場合が生ずる。ここで、一般に多用される触針型水位計の誤差分散$\sigma_0{}^2$=1cm²で演算を行った場合においても負値を得、正確な透水量係数の推定ができないことより本地下水系はこの状態に相当すると考えられる。ただし、観測誤差の設定条件を変え誤差を零とした場合には、透水量係数の同定値は表－１に示すWaltonの実測値と正しく一致する。

次に、上述の地下水位の観測誤差と同様、透水量係数の推定精度に影響を及ぼすと考えられる地下水流動モデルのシステム誤差および涵養量(または揚水量)の観測誤差について検討する。
(10)式で示される地下水流動モデルをマトリックス表示に変換すると次式を得る。

$$[F]h = Q + \eta \qquad \cdots(11)$$

ここに、ηはシステム誤差である。これは地下水流動が(１)式の偏微分方程式で完全に表現できないことやモデル化を行う際の差分近似に起因するものである。また、Ｆは(10)式の係数Ａ,･･,Ｅから成る。さらに、地下水位および涵養量の観測値を真値を用いて表示する。

$$h_0 = h + \varepsilon \quad , \quad Q_0 = Q + \zeta \qquad \cdots(12)$$

ここに、添字付き変量は観測値、添字なし変量は真値、ε，ζは地下水位、涵養量の観測誤差を示す。
(12)式を(11)式に代入し整理すると、各誤差間の関係を示す誤差方程式は次のように与えられる。

$$G = \Sigma F \cdot \Delta\varepsilon - \zeta + \eta \qquad \cdots(13)$$

ここに、$\Delta\varepsilon$は異なる二点間の地下水位観測誤差の差を示す。

上式中、システム誤差は本例では計算地下水位が正しく初期値に一致することから非常に小さいと考えられる。また、係数行列Ｆは透水量係数に比例するため、透水量係数の大きな帯水層では右辺第１項が大きくなり、涵養量の観測誤差は実質上無視されることになる。従って、この誤差解析からも地下水位の観測誤差が透水量係数の推定精度を左右する最も重要な要因と考えられる。

Ｖ　結　語

観測地下水位から透水量係数を最適同定する過程で発生する不安定性の要因について検討を加えた。対象とした地下水系においては透水量係数の反復修正に対する地下水位の応答が低く、水位の変動が微小なため最適な透水量係数を決定することは不可能であった。解の不安定が発生するとパラメータは予測値から遠く離れた値となり、機械的に演算を続けると場合によっては極端に小さくなり物理的に許容できない負値を得る。これを避けるためパラメータに上下限値を設定する条件付けを行っても、解はこれらの間を単に振動するのみで一定値には収束しない。このことは逆探問題が本来 ill-posed(悪性)であることを反映し、正確な流動モデルの設定、収束手法の改良を行っても最適解が得られないことを示している。事実、本例に非線形最小二乗法と比較して精度および収束がよいといわれる Marquardt法[6]を適用しても解の不安定が前手法と同様に生じ、最適値を求めることができなかった。

これらの障害を乗り越えるには、観測地下水位の誤差処理を行って透水量係数の推定誤差を減少させ、(9)式に示す反復修正量を改善しなければならない。例えば、地下水位が時系列データとして得られている場合にはKalman-smoothing法[7]が誤差処理のために有効な方法と考えられる。また、得られた結果の有効性を検証するには、数点の観測井で揚水試験を行い、あらかじめ地点透水量係数に関する情報を収集することが必要不可欠である。

参考文献

1) Neuman,S,P.,S.Yakowitz:A Statistical Approach to the Inverse Problem of Aquifer Hydrology 1. Theory,Water Resour.Res.,Vol.15,No.4,pp.845-860,1979
2) Yeh,W.W-G:Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Invere Problem ,Water resour.Res.,Vol.22,No.2,pp.95-108,1986
3) 藤間聡･中田満洋：空間分布構造を有する透水係数の統計的推定法、日本地下水学会会誌、第28巻、第１号、pp.15-24,1986
4) 中川徹･小柳義男：最小二乗法による実験データ解析、東京大学出版会、p.45,1982
5) Walton,W,C:Groundwater Resource Evaluation,McGraw-Hill,pp.539-545,1970
6) 粟屋隆：データ解析、学会出版センター、pp.130-131,1985
7) 片山徹：応用カルマンフィルタ、朝倉書店、pp.116-131,1983

表－１　実測透水量係数と同定透水量係数(10^{-5} m²/s)

実測値(初期値)

0.0238	0.0242	0.0245	0.0249	0.0254	0.0258	0.0264	0.0268	0.0273	0.0279	0.0288
0.0226	0.0231	0.0235	0.0239	0.0244	0.0249	0.0256	0.0260	0.0265	0.0271	0.0279
0.0214	0.0220	0.0225	0.0229	0.0235	0.0240	0.0247	0.0252	0.0257	0.0263	0.0271
0.0202	0.0209	0.0214	0.0220	0.0225	0.0231	0.0239	0.0244	0.0249	0.0255	0.0263
0.0189	0.0197	0.0203	0.0209	0.0216	0.0223	0.0230	0.0236	0.0241	0.0247	0.0254
0.0177	0.0185	0.0191	0.0198	0.0205	0.0213	0.0222	0.0228	0.0233	0.0239	0.0246
0.0165	0.0173	0.0179	0.0186	0.0194	0.0203	0.0213	0.0220	0.0225	0.0232	0.0238
0.0153	0.0161	0.0167	0.0175	0.0183	0.0192	0.0202	0.0221	0.0216	0.0224	0.0229
0 0141	0.0150	0.0156	0.0164	0.0172	0.0181	0.0191	0.0199	0.0205	0.0216	0.0221
0.0128	0.0137	0.0144	0.0152	0.0161	0.0170	0.0180	0.0188	0.0194	0.0202	0.0210
0.0116	0.0124	0.0132	0.0141	0.0150	0.0159	0.0169	0.0177	0.0182	0.0189	0.0196

同定値

0.3693	-0.1788	-0.0612	-0.0415	0.0892	-0.2706	-0.2309	0.0924	0.2880	-0.0890	0.0528
-0.3581	0.2574	0.1002	0.0791	-0.0347	0.3454	0.3075	-0.0523	-0.2596	0.1350	0.0024
0.5153	-0.2869	-0.0344	-0.0283	0.0710	-0.3199	-0.2681	0.0536	0.3211	-0.0305	-0.0086
-0.4647	0.3582	0.0621	0.0601	-0.0205	0.3573	0.3166	-0.0163	-0.2921	0.0669	0.0391
0.6413	-0.4009	-0.0212	-0.0369	0.0624	-0.3459	-0.2969	0.0099	0.3479	0.0305	-0.0451
-0.6313	0.4681	0.0406	0.0785	-0.0282	0.3699	0.3429	0.0199	-0.3145	0.0057	0.1019
0.6950	-0.4173	-0.0453	-0.0719	0.0822	-0.3807	-0.3281	0.0033	0.3792	0.0568	-0.0510
-0.5113	0.3499	0.0933	0.0885	-0.0462	0.3951	0.3667	0.0204	-0.3450	0.0332	0.0834
0.6651	-0.3409	-0.0878	-0.0821	0.1010	-0.4327	-0.3840	0.0037	0.4309	0.0089	-0.0044
-0.5194	0.2709	0.1247	0.1092	-0.0665	0.4453	0.4163	0.0429	-0.3902	0.0497	0.0787
0.6770	-0.3154	-0.1275	-0.1003	0.1050	-0.4864	-0.4437	-0.0577	0.4828	0.0466	-0.0477

表－２　ヤコビアン逆行列要素 $(\partial h/\partial T)^{-1}$

7.532	5.974	7.203	5.815	7.441	7.216	6.905	5.354	5.332	4.294	3.900
4.171	3.281	4.210	3.769	4.719	4.614	4.589	3.470	3.545	2.930	2.582
2.562	2.070	2.144	1.569	1.697	1.283	1.446	1.023	1.536	1.402	1.401
3.723	3.143	3.250	2.681	2.894	2.301	2.617	2.038	2.448	2.118	1.937
4.293	3.663	3.792	3.178	3.405	2.788	3.102	2.505	2.892	2.598	2.395
5.053	4.357	4.488	3.808	4.047	3.387	3.725	3.088	3.496	3.073	2.874
5.455	4.740	4.853	4.166	4.391	3.749	4.088	3.424	3.810	3.478	3.261
6.497	5.476	5.603	4.751	5.154	4.361	4.751	3.816	4.207	3.686	3.541
5.421	4.710	4.599	4.237	4.313	3.946	3.986	4.012	4.024	4.096	3.890
6.379	4.287	4.456	4.380	5.413	4.978	4.690	3.252	3.019	2.875	2.659
6.894	5.909	5.424	5.597	6.051	5.745	5.695	4.098	4.467	3.064	2.884