

II—35 成層帯水層における巨視的分散係数の推定

室蘭工業大学 正会員 藤間 聡
同 上 学生員 高島 英博

1. まえがき

成層帯水層内の保存系溶解物質（以後、トレーサと称す。）の分散は、(1) 微視的分散と(2) 巨視的分散に大別される。前者は、トレーサ自身の分子拡散および分散物質の分子群の主流方向平均移動距離と一分子の主流方向移動距離との差により生ずる（図-1中のAで示す。）。一方、後者は分散物質が通過する層の主流方向平均移動距離と全断面平均移動距離との差により生ずる（図-1中のBで示す。）。微視的分散に関する研究は現在に至るまで数多くなされておられ、その研究成果から微視的分散係数は浸透流速と構成材料固有の分散率(Dispersivity)との積で表示されることが知られている¹⁾。しかし、巨視的分散過程にこの微視的分散係数を適用した場合、実測値と著しくかけ離れた結果を得ることが多い²⁾。この原因は、構成材料の空隙系の偏差により生ずる微視的分散に対し、巨視的分散は地層構造の不均一性に起因するためと考えられる。本研究では、透水係数分布を余弦関数で近似した場合の巨視的縦方向分散係数および断面平均濃度の定式化を行い、また室内分散実験において得られた測定値と比較し、その適合性を検証するものである。

2. 成層帯水層における分散過程の定式化

本研究で解析および実験に用いた成層帯水層は図-2に示す透水係数の異なる多層から構成されている。

2-1. 断面平均濃度

トレーサの分散過程は次式で表わされる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} (D_2 \frac{\partial c}{\partial z}) \dots (1)$$

ここに、 c ；トレーサ濃度、 V ；浸透流速（実流速）
 D_1 ；微視的縦方向分散係数、 D_2 ；微視的横方向分散係数、 x ；主流方向の座標、 y, z ；主流に直角方向の座標、 t ；時間をそれぞれ示す。

(1) 式の取り扱いを容易にするため、変数変換を行い無次元化すると次式となる。ただし、 y 方向の分散過程は無視できるものとして二次元解析とする。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + a X \frac{\partial C}{\partial \xi} = \psi_1 \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2 \frac{\partial C}{\partial \zeta}) \dots (2)$$

$$\tau = \frac{D_2}{h^2} t, \quad \xi = \sqrt{D_2/D_1} \frac{1}{h} (x - \bar{V}t), \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad a = \frac{h\bar{V}}{\sqrt{D_1 D_2}},$$

$$X = \frac{V - \bar{V}}{\bar{V}}, \quad \psi_1 = \frac{D_1}{D_1}, \quad \psi_2 = \frac{D_2}{D_2}, \quad C = \sqrt{D_1/D_2} \frac{hc}{c_0}$$

ここに、 h ；全層厚、 c_0 ；トレーサ初期濃度、 $\bar{V}$ ；全層にわたる平均値をそれぞれ示す。

(2) 式の解を得ることは、トレーサを瞬間線放出とした場合、応答関数である濃度の確率密度関数を求めることに帰着し、濃度積分法を用いて断面平均濃度を求めると次式を得る。

$$C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \frac{\lambda_3}{6} \text{He}_3\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \frac{\lambda_4}{24} \text{He}_4\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \dots \right] \dots (3)$$

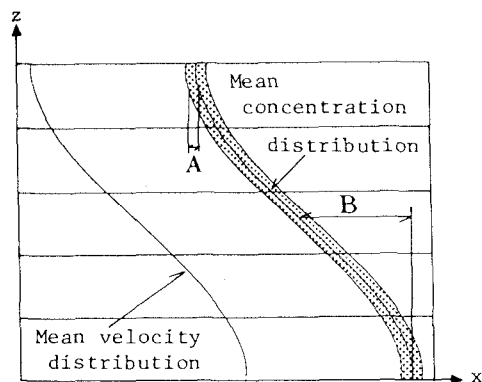


図-1. 巨視的分散と微視的分散

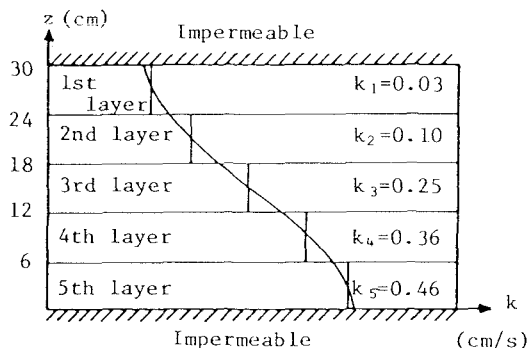


図-2 成層帯水層モデル

ここに、 σ^2 ; 分散 (Variance)、 λ_i ; i 次キュムラント、 $\text{He}(\cdot)$; エルミート多項式をそれぞれ示す。

2-2. 濃度積率

前節で定義した無次元濃度 C の濃度積率 C_p および平均値回りの濃度積率 m_p をそれぞれ次式で定義する。
ただし、下付き添字 p は濃度積率の次数を表す。

$$C_p = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p C \, d\xi \quad \dots (4) \quad m_p = \int_0^1 C_p \, d\zeta = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p C \, d\xi d\zeta \quad \dots (5)$$

また、 i 次キュムラント λ_i と平均値回りの p 次濃度積率 m_p との間に次式の関係が成立する。

$$\lambda_1 = m_1 = 0, \quad \lambda_2 = m_2, \quad \lambda_3 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad \lambda_4 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \quad \dots (6)$$

(4), (5) 式の関係を用いて (2) 式を変形すると次式を得る。

$$\frac{\partial C_p}{\partial \tau} = a \chi p C_{p-1} + p(p-1) \psi_1 C_{p-2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_2 \frac{\partial C_p}{\partial \zeta}) \quad \dots (7)$$

$$\frac{\partial m_p}{\partial \tau} = a p \int_0^1 \chi C_{p-1} d\zeta + p(p-1) \int_0^1 \psi_1 C_{p-2} d\zeta \quad \dots (8)$$

2-3. 巨視的縦方向分散係数

図-2 に示す成層帯水層における透水係数分布が次式の余弦関数で近似できる場合の巨視的縦方向分散係数 K_1 の定式化を行う。

$$k = \bar{k}(1 + \eta \cos(\pi \zeta)) \quad \dots (9)$$

ここに、 k ; 任意高さにおける透水係数、 $\bar{k}$; 断面平均透水係数、 η ; 任意定数をそれぞれ示す。

巨視的縦方向分散係数 K_1 は、トレーサ分子の分散 (Variance) σ_x^2 との間に次式の関係がある。

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2}{dt} = \frac{\bar{D}_1}{2} \frac{d\sigma^2}{d\tau} = \bar{D}_1 + a \bar{D}_1 \int_0^1 \chi C_1 \, d\zeta \quad \dots (10)$$

ここに、 K_1 ; 巨視的縦方向分散係数、 σ_x^2 ; x - z 座標系におけるトレーサの分散 (Variance)、 σ^2 ; 無次元移動座標系 ξ におけるトレーサの分散 (Variance) をそれぞれ示す。

以上の定式化から巨視的縦方向分散係数 K_1 は (10) 式に (7) 式を代入することによって得ることができるが、(7) 式に含まれる無次元微視的横方向分散係数 ψ_2 は各層の構成材料により異なり、その関数であるため本研究では、次の三つにわけて解析する³⁾。

(i) D_2 が流速に比例する場合… 各層の分散率がほぼ等しいときに適用できる。

$$\text{分散過程初期:} \quad K_1 = \bar{D}_1 + \frac{V^2 \eta^2 t}{2} \quad \dots (11)$$

$$\text{分散過程定常期:} \quad K_1 = \bar{D}_1 + \frac{\bar{V}^2 h^2 \eta^2}{2 \bar{D}_2 \pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta^2}{8} + \frac{\eta^4}{16} + \dots \right) \quad \dots (12)$$

(ii) D_2 が一定の場合… 流速が小さく Peclet 数が 10 以下のときに適用できる。

$$\text{分散過程定常期:} \quad K_1 = \bar{D}_1 + \frac{\bar{V}^2 h^2 \eta^2}{2 \bar{D}_2 \pi^2} (1 - \exp(-\pi^2 \tau)) \quad \dots (13)$$

(iii) D_2 が分散率・流速に比例する場合… 透水係数が平均粒径の二乗に比例するときに適用できる。

$$\text{分散過程定常期:} \quad K_1 = \bar{D}_1 + \frac{V^2 h^2 \eta^2}{2 \bar{D}_2 \pi^2} \left(1 + \frac{3\eta^2}{16} \right) \quad \dots (14)$$

ただし、(ii), (iii) の場合における分散過程初期の巨視的分散係数は (11) 式に等しい。

2-4. 微視的分散係数の同定

巨視的縦方向分散係数 K_1 を決定するためには、微視的分散係数を正確に把握しなければならない。本研究では、微視的分散係数を最適同定するために次式を用いて Powell 共役方向法により求める。この方法は、非線形関数の最小化問題に対する解法として用いられる⁴⁾。

$$c = \frac{c_0 Q}{8\pi D_1 R} \exp(-\gamma t) \exp\left(\frac{Vx - \beta R}{2D_1}\right) \text{Erfc}\left(\frac{R - \beta t}{\sqrt{4D_1 t}}\right) \quad \dots (15)$$

ここに、 $R = [x^2 + (D_1/D_2)y^2 + (D_1/D_2)z^2]^{1/2}$, $\beta = [V^2 - 4D_1\gamma]^{1/2}$
 Q ; 流量、 r ; 放出井におけるトレーサ濃度減衰率、 $Erfc$; 余誤差関数をそれぞれ示す。

3. 結果および考察

本研究で用いた成層帯水層は、図-2に示す透水係数分布を余弦関数で近似した水平五層帯水層モデルであり、各層の透水係数は図中に示している。このモデルは、総層厚 $h=30\text{cm}$ 、幅 $w=40\text{cm}$ 、長さ $g=70\text{cm}$ 、各層厚 $h_i=6\text{cm}$ であり上下面を不浸透面とし被圧状態とした。透水係数分布は実験試料から(9)式により次のように与える。

$$k/k = 1 + 0.84 \cos(\pi \zeta) \quad \cdots(16)$$

各層における微視的分散係数 D_1, D_2 を決定するため、各層を構成する砂の均一帯水層を個々に設置し、微視的分散実験を行った。トレーサには濃度1%の塩水100ccを用いて瞬間線放出し、濃度測定はトレーサ放出井から20cm, 50cm離れた二観測井でトレーサ放出後15秒間隔に500回測定した。図-3は第4層を構成する砂の均一帯水層において動水勾配 $i=0.030$ とし、トレーサ注入井から50cm離れた観測井で測定された濃度分布である。理論値は125個のデータを(15)式を用いてPowell法により浸透流速 V 、微視的分散係数 D_1, D_2 を最適同定して得られた。同図の低濃度部において理論値と実測値は一致していないが、これらの相対誤差は3%以内であり浸透流速、微視的分散係数 D_1, D_2 は的確に同定されていると考えられる。次に最適同定された浸透流速 V と微視的縦方向分散係数 D_1 の相関関係を図-4に示す。図-4は海砂(粒径範囲7種類、71データ)、スチレン・ビーズ(粒径範囲2種類、34データ)、ガラス球(56データ)の計161データをとりまとめたものである。同図から最小二乗近似により次式の関係を得た。

$$D_1 = 0.13V^{0.95} \quad (0.01 < V < 0.1 \text{ cm/s}) \quad \cdots(17)$$

上式より微視的縦方向分散係数 D_1 はほぼ浸透流速 V に比例し定数(分散率)0.13は使用した全試料の平均径0.09cmに近い値を示し、試料の空隙の幾何学的特性を示すものと解釈できる。また、微視的横方向分散係数 D_2 は浸透流速 V と次式の関係を得た。

$$D_2 = 0.07V^{1.36} \quad \cdots(18)$$

上式より微視的横方向分散係数 D_2 は分子拡散係数のような一定値にはならず浸透流速 V とともに増大する。

次に、動水勾配 $i=0.060$ で行った微視的分

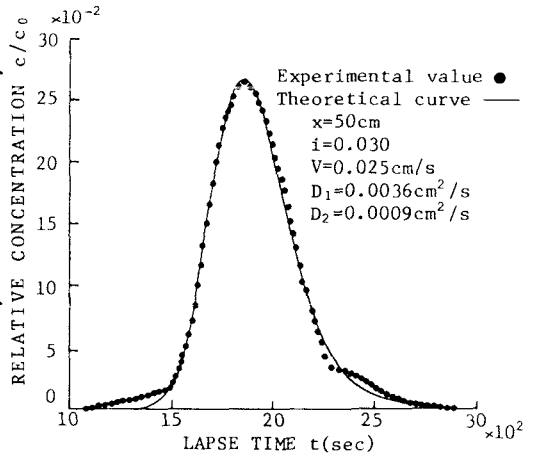


図-3. 均一帯水層における濃度変化

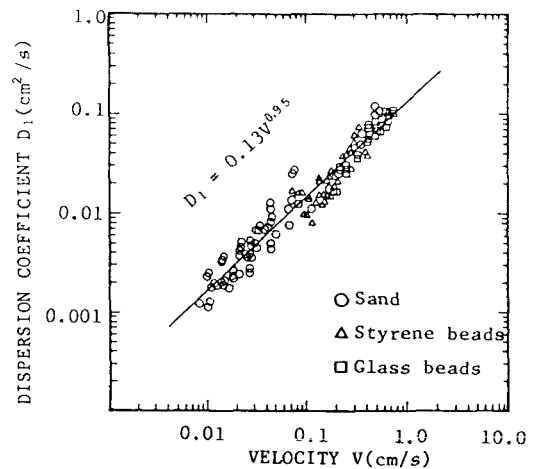


図-4. 微視的分散係数と浸透流速の相関

表-1. 微視的分散係数と分散率

層	流 速 cm/s	微視的分散係数		分散率	
		縦方向 D_1 cm ² /s	横方向 D_2 cm ² /s	縦方向 cm	横方向 cm
第一層	0.005	0.0006	0.0001	0.13	0.02
第二層	0.015	0.0030	0.0003	0.20	0.02
第三層	0.038	0.0083	0.0008	0.22	0.02
第四層	0.054	0.0124	0.0016	0.23	0.03
第五層	0.069	0.0159	0.0021	0.23	0.03
平均	0.036	0.0080	0.0010	0.20	0.03

散実験結果を表-1に示す。表-1より各層の横方向分散率は等しいため(11),(12)式を用いて巨視的縦方向分散係数 K_v を求めることができるが、(11),(12)式を用いて、分散過程定常期に至る距離 L を求めると、

$$L = h^2 \bar{V} / D_2 \pi^2 = 32.8 \quad (\text{m}) \quad \dots (19)$$

となり、小規模室内実験においては分散過程定常期の分散現象を測定することができないため、本研究ではトレーサ放出井から42.5cm離れた地点における巨視的分散係数を求める。図-5に巨視的分散実験で測定された断面平均濃度および(3)式から得られた断面平均濃度の一例を示す。実測値は動水勾配 $i=0.060$ 、平均流速 $\bar{V}=0.036\text{cm/s}$ で行った巨視的分散実験において地点 $x=20\text{cm}, 35\text{cm}, 50\text{cm}$ の観測井で第1,2,3層の中央で得られた高さ方向三点平均濃度分布を示す。断面平均濃度分布は成層が寄与する見掛け上の巨視的分散にともない生ずる濃度分布であり、成層帯水層規模の分散現象を知ることができる。

地点 $x=20\text{cm}$ における実測値はピーク部がかなり高く全体として尖がった形を表わし、地点 $x=35, 50\text{cm}$ と移動距離が長くなるのに従いピーク部が下がり、また右側に尾を引く形となることがわかる。これは、地点 $x=0\text{cm}$ において瞬間線放出されたトレーサ分子群が時間経過に従って、その分子群の幅が広がりさらに各層の浸透流速の差により巨視的分散現象が生じているためと考えられる。理論値は実測値に比べ、ピーク到達時間が若干遅れる傾向にあるが各地点における濃度分布形の尖がりや歪みの度合を(3)式中の3,4次キュムラント λ_3, λ_4 が精度よく表わしていることが認められる。

表-2に地点 $x=42.5\text{cm}$ における巨視的分散係数の実験値と理論値を示す。実験値は $x=35\text{cm}, 50\text{cm}$ の観測井で得られた断面平均濃度分布から1,2次濃度積率を求め、これに基づきトレーサ放出井から42.5cm離れた地点の巨視的分散係数を求めた。また、理論値は $x=42.5\text{cm}$ にトレーサ群の到達する平均時間を(11)式に代入して求めた。この結果より動水勾配 $i=0.060$ における巨視的分散係数は微視的縦方向分散係数の約50倍となり、小規模室内実験においても巨視的分散係数は微視的縦方向分散係数と著しくかけ離れたオーダーとなる。

以上の結果、濃度積率法は本実験においては巨視的分散係数および断面平均濃度分布を十分な精度で推定できることが認められた。本研究の実験および資料整理において本学土木工学科海工学講座 山岸等技官の協力を得たことを記して感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Klotz, D., Seiler, K.P., Moser, H. and Neumaier, F.: Dispersivity and Velocity Relationship from Laboratory and Field Experiments, Jour. Hydrology, 45, pp. 169-184, 1984.
- 2) Pickens, J.F., and Grisak, G.E.: Scale-Dependent Dispersion in a Stratified Granular Aquifer, Water Resour. Res., 17(4), pp. 1191-1211, 1981.
- 3) 高島 英博・藤間 聡：モーメント法による巨視的分散係数の推定，土木学会北海道支部論文報告集，42，pp. 179-184, 1985.
- 4) 藤間 聡：非線形最適化手法による飽和多孔体の分散係数の同定について，土木学会北海道支部論文報告集，41，pp. 183-188, 1984.

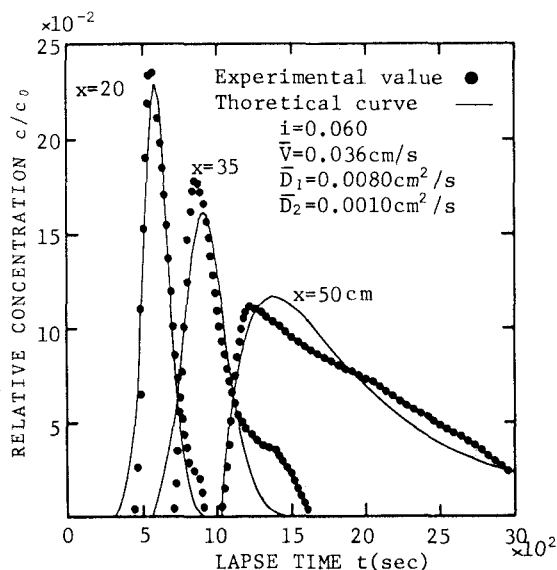


図-5. 断面平均濃度の変化

表-2. 巨視的分散係数

動水勾配	平均流速 cm/s	巨視的分散係数	
		実験値 cm ² /s	理論値 cm ² /s
0.060	0.036	0.453	0.540
0.075	0.045	0.701	0.674
0.097	0.058	0.890	0.870
0.104	0.062	1.037	0.936
0.134	0.081	1.468	1.212
0.149	0.089	2.055	1.340