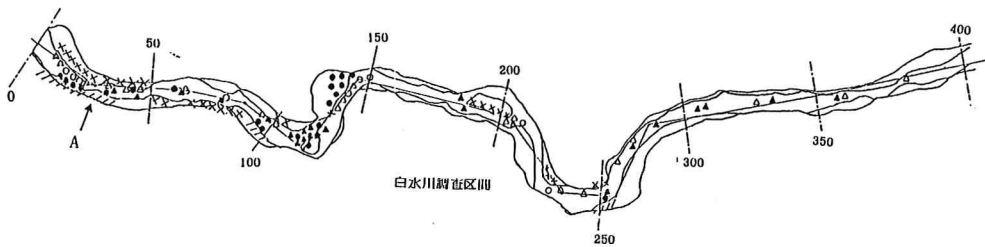


II—22 高速蛇行流の研究

北海道大学工学部 正 員 森 明巨
 北海道大学工学部 正 員 岸 力
 北海道大学工学部 学生員 戸嶋 光映
 北海道大学工学部 ○定木 紳

はじめに

著者らは(1) 昭和60年に行った薄別川(豊平川水系)支川白水川の出水前後の河床変動調査から、流路の蛇行部において内岸側の洗掘、外岸側の堆積を見出した。本研究では、一様弯曲流のRenouの理論(2)を進展させて蛇行流の解を求めこれをもとに上述の現象について考察した。



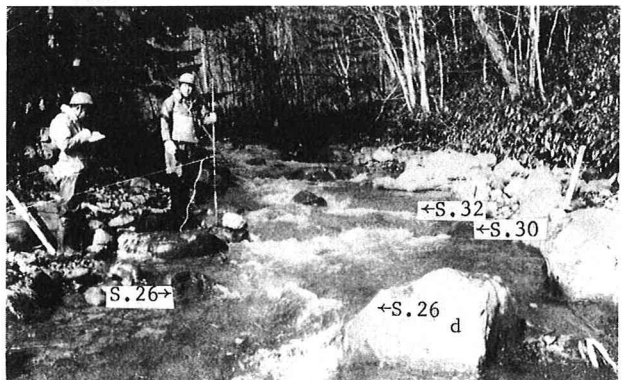
図—1

1. 白水川蛇行部の河床変動

図—1は白水川調査区間における河床変動図である。左右岸の洗掘部を斜線、堆積部を×印で示した。また、流路中の礫の移動を洗掘礫を△印、堆積礫を▲印で示した。これらの判定は、洪水前後の写真の比較から行った。変化例(30m付近)を写真—1に示した。写真中dは堆積礫、eは洗掘礫を表す。下流100mの蛇行部に着目すると、内岸が洗掘され、外岸に堆積が生じているのがわかる。



28m付近。上：出水前、下：出水後



写真—1

2. 高速蛇行流の理論

Renou は、直線流路に一様弯曲流路が接続した場合の射流解をベルヌーイの式(1)、流れの連続式(2)、自由渦の仮定(3)を基礎として求め、芦田(3)は、Renou の線形解が実験値と良く一致することを確認した。

このことから、著者らも(1)～(3)式を基礎式として流路平面形が sine generated curve で与えられる場合の高速蛇行流の解を求めることにする。座標系は図—2に示

$$\frac{v_n^2 + v_s^2}{2g} + h = \frac{U_0^2}{2g} + h_0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(hv_n r)}{\partial n} + \frac{r\partial(hv_s)}{\partial s} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{r\partial v_n}{\partial s} = \frac{\partial(rv_s)}{\partial n} \quad (3)$$

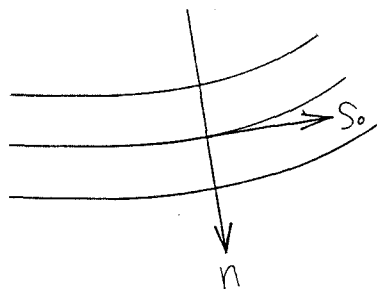


図-2

た (s_0, n) 系を取る。ここに、 U_0, h_0 : 直線部の平均流速及び水深、 u_s, v_s : 流速の s, n 成分、 h : 水深、 $ds = ds_0 r/r_0$ 、 r は曲率半径で、流路中心及び最大の曲率半径を r_0, R とおくと

$$r = r_0 + n, r_0/R = 1/\cos k s_0 \text{ (解1) 又は } 1/\sin k s_0 \text{ (解2)}. \quad (k: 2\pi/L, L: \text{蛇行波長})$$

の関係がある。ここで、 $h = h_0 (1 + h)$ 、 $v_s = U_0 (1 + v_s)$ 、 $v_n = U_0 v_n$ とおき、 $|h| \ll 1$ 、 $|v_s| \ll 1$ 、 $|v_n| \ll 1$ として(1)~(3)式を線形化すると、

$$v_{s*} + \frac{h_*}{F^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_{n*}}{\partial s_*} = \frac{\partial v_{s*}}{\partial n_*} + \exp(i m s_*) \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_{n*}}{\partial n_*} + \frac{\partial(h_* + v_{s*})}{\partial s_*} = 0 \quad (6)$$

が得られる。ここに、 $m = Rk$ 、 $s_0 = s_0/R$ 、 $n = n/R$ であり、解の実部が解1であり、虚部が解2となる。(4)式を(5)、(6)式に代入して、 h_* を消去すると(7)、(8)式が得られる。

$$\frac{\partial v_{n*}}{\partial n_*} - (F^2 - 1) \frac{\partial v_{s*}}{\partial s_*} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_{n*}}{\partial s_*} - \frac{\partial v_{s*}}{\partial n_*} = \exp(i m s_*) \quad (8)$$

(7)、(8)式を $s = 0$ で $v_s = v_n = 0$ なる境界条件のもとにラプラス変換を行うと(9)、(10)式となる。

$$\frac{\partial V_n}{\partial n_*} - (F^2 - 1) \alpha V_s = 0 \quad (9)$$

$$\alpha V_n - \frac{\partial V_s}{\partial n_*} = \frac{1}{\alpha - i m} \quad (10)$$

$$\text{ただし、} V_n(n_*, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha s_*} v_{n*}(n_*, s_*) ds_* \quad V_s(n_*, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha s_*} v_{s*}(n_*, s_*) ds_*$$

(10)式を(9)式に代入して V_s について解くと、

$$V_s = A \exp(\sqrt{F^2 - 1} \alpha n_*) + B \exp(-\sqrt{F^2 - 1} \alpha n_*) \quad (11)$$

(11)式を(10)式に代入すると V_n は、

$$V_n = \frac{1}{\alpha(\alpha - i m)} + \sqrt{F^2 - 1} \{ A \exp(\sqrt{F^2 - 1} \alpha n_*) - B \exp(-\sqrt{F^2 - 1} \alpha n_*) \} \quad (12)$$

$n_* = \pm n_B$ ($n_B = B/2R$) で、 $V_n = 0$ の関係を用いて A, B が求まり、これから

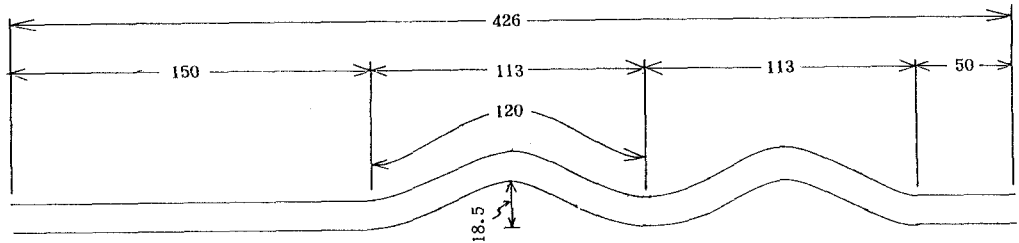


図-3

$$V_s = - \frac{1}{\sqrt{F^2-1} \alpha(\alpha-i m)} \frac{\sinh(\sqrt{F^2-1} \alpha n_*)}{\cosh(\sqrt{F^2-1} \alpha n_B)} \quad (13)$$

$$V_h = \frac{1}{\alpha(\alpha-i m)} - \frac{1}{\alpha(\alpha-i m)} \frac{\cosh(\sqrt{F^2-1} \alpha n_*)}{\cosh(\sqrt{F^2-1} \alpha n_B)} \quad (14)$$

となる。(13)、(14)式を逆変換すると

$$V_{s*} = \left\{ - \frac{\sin(\sqrt{F^2-1} m n_*) \cos(m S_*)}{\sqrt{F^2-1} m \cos(\sqrt{F^2-1} m n_B)} + 8 n_B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2 n_B} n_*\right\} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{F^2-1} n_B} S_*\right\}}{(2k-1)^2 \pi^2 - 4(F^2-1) m^2 n_B^2} \right\} \quad (15)$$

$$+ i \left\{ - \frac{\sin(\sqrt{F^2-1} m n_*) \sin(m S_*)}{\sqrt{F^2-1} m \cos(\sqrt{F^2-1} m n_B)} + 16 \sqrt{F^2-1} m n_B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2 n_B} n_*\right\} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{F^2-1} n_B} S_*\right\}}{(2k-1) \pi \{ (2k-1)^2 \pi^2 - 4(F^2-1) m^2 n_B^2 \}} \right\}$$

$$V_{h*} = \left\{ \left\{ 1 - \frac{\cos(\sqrt{F^2-1} m n_*)}{\cos(\sqrt{F^2-1} m n_B)} \right\} \frac{\sin(m S_*)}{m} + 8 \sqrt{F^2-1} n_B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2 n_B} n_*\right\} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{F^2-1} n_B} S_*\right\}}{(2k-1)^2 \pi^2 - 4(F^2-1) m^2 n_B^2} \right\} \quad (16)$$

$$\left\{ \left\{ 1 - \frac{\cos(\sqrt{F^2-1} m n_*)}{\cos(\sqrt{F^2-1} m n_B)} \right\} \frac{\cos(m S_*)}{m} + 16 (F^2-1) m n_B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2 n_B} n_*\right\} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{F^2-1} n_B} S_*\right\}}{(2k-1) \pi \{ (2k-1)^2 \pi^2 - 4(F^2-1) m^2 n_B^2 \}} \right\}$$

が得られる。(4)式に(15)式を代入すると(17)式が得られる。

$$h_* = F^2 \left\{ \frac{\sin(\sqrt{F^2-1} m n_*) \cos(m S_*)}{\sqrt{F^2-1} m \cos(\sqrt{F^2-1} m n_B)} - 8 n_B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2 n_B} n_*\right\} \cos\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{F^2-1} n_B} S_*\right\}}{(2k-1)^2 \pi^2 - 4(F^2-1) m^2 n_B^2} \right\} \quad (17)$$

$$+ i F^2 \left\{ \frac{\sin(\sqrt{F^2-1} m n_*) \sin(m S_*)}{\sqrt{F^2-1} m \cos(\sqrt{F^2-1} m n_B)} - 16 \sqrt{F^2-1} m n_B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2 n_B} n_*\right\} \sin\left\{\frac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{F^2-1} n_B} S_*\right\}}{(2k-1) \pi \{ (2k-1)^2 \pi^2 - 4(F^2-1) m^2 n_B^2 \}} \right\}$$

以上の(15)～(17)式の解は特解になる。一般解はこれらの解に(8)式の右辺を0とおいたときの解を加えたものになる。

3. 実験方法

実験水路の概要を図-3に示した。水路幅12cm、波長1.2m、最大偏角28°のsine generated curveで図-1に示した現地のほぼ1/80である。水路の側壁にはアクリル板、水路床には耐水ベニヤを用いた。流量は、

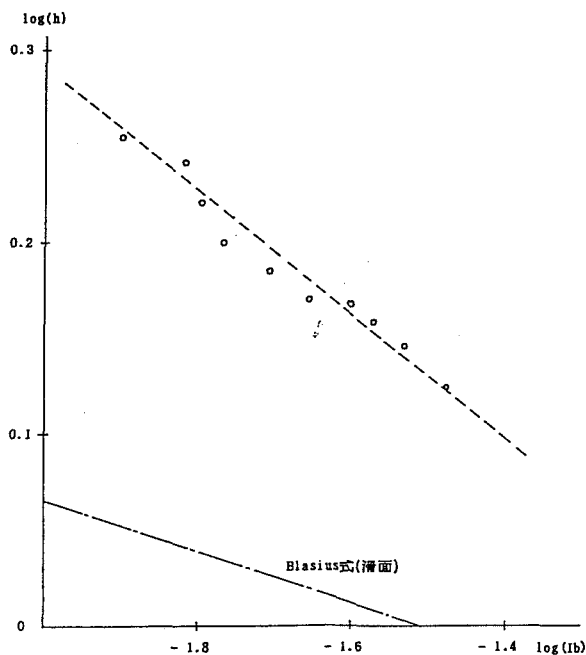


図-4

現地実例最大流量 $43\text{m}^3/\text{sec}$ をフルードの相似で縮めて 1.19 l/sec とした。水深は、相当粗度 $k_s = 2.6\text{dm}$ (dm: 現地平均粒径 $=0.18\text{m}$)として現地に対する不等流計算から得られた“蛇行流の平均水深の $1/80$ ” $=1.65\text{cm}$ とした。図-4に流路に沿った河床勾配 I_b と、図-3の矢印地点の平均水深 h の実験値との関係を示した。図から $h=1.65\text{cm}$ となる様に $I_b=0.0142$ に選んだ。図-5にこのときの流速ベクトルの理論値を示した。なお図中の一点鎖線は、滑面水深に対する Blasius の式

$$f = 8 (u_* / U)^2 = 0.316 (4 R U / \nu)^{1/4}$$

の関係を示したもので、これから滑面よりはるかに大きい抵抗を持っているのがわかる。 h と I の関係を、図中の点線で近似すると(19)式となる。

$$h = 0.0758 I^{-0.8} \quad (19)$$

これから、流れを仮に粗面乱流とし流速分布に対数則を適用すると $I=0.025$ ($h=1.45\text{cm}$)に対して、 $k_s=1.4\text{mm}$ となる。

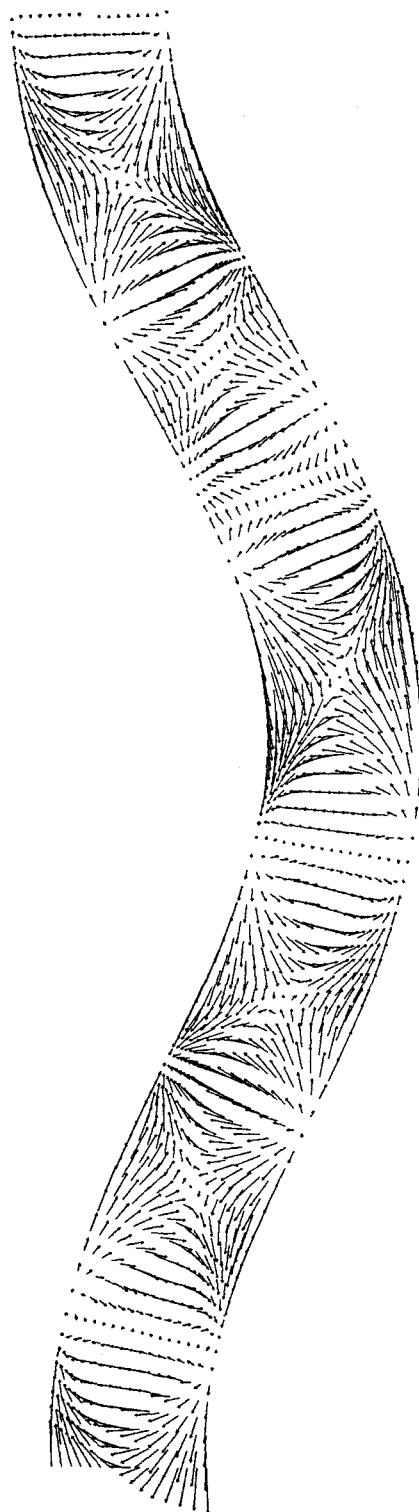


図-5

4. 実験値と理論値の比較

図-6は、横断水面形の理論値と実験値の比較である。理論値は実線で、(17)式の実数部である。点線は、(17)式の右辺中第1項の周期解であるが、これで水面形のおおよそが与えられるのがわかる。図-7は、側壁付近の U_s の理論値(側壁から1.5cm)と実験値(側壁から1.0cm)との比較である。図中の点線は周期解である。図からわかる様に湾曲部入口付近では、実験値は衝撃波の波形とおおよそが一致しているが、下流になるに従って周期解の波形に一致してくる。

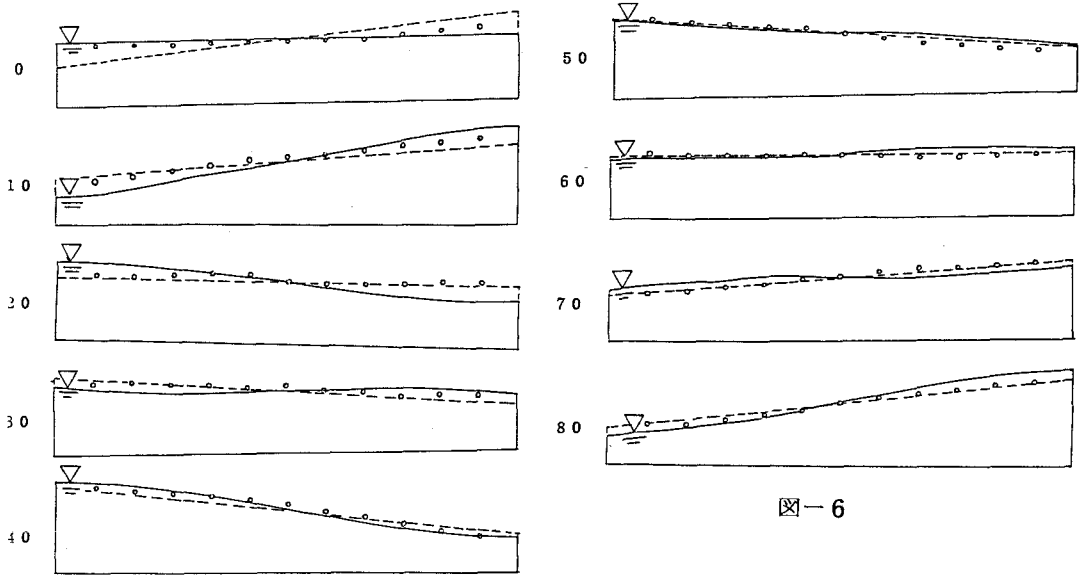


図-6

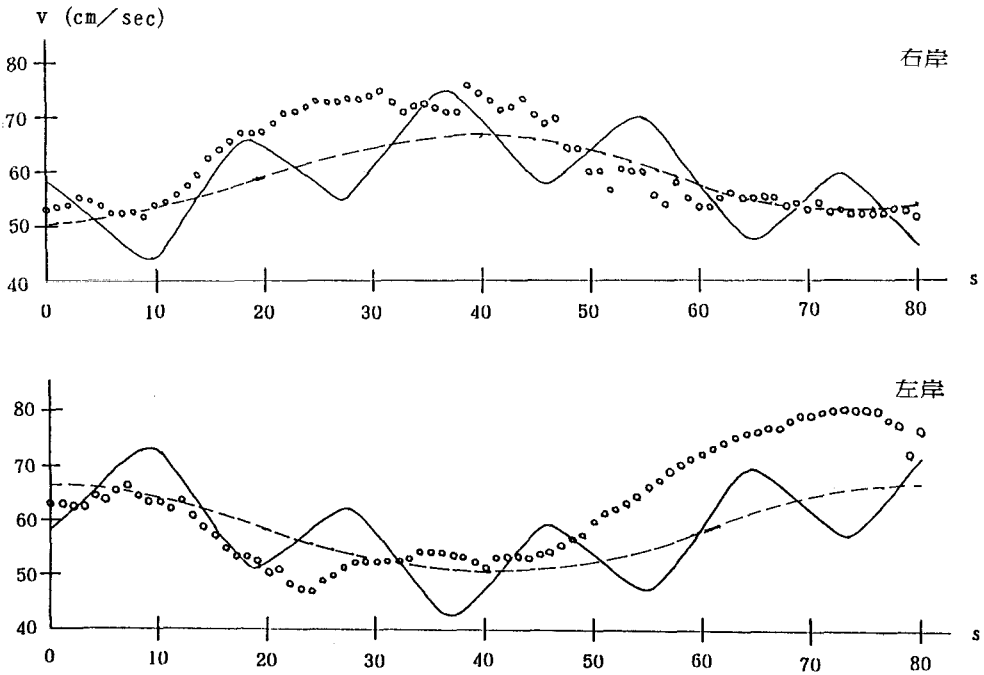


図-7

5. 考察

(17)式における衝撃波の割合を見るために第2項以降の各項と周期解の振幅比 Γ_k を求めると、

$$\Gamma_k = 8 \chi / \pi [(2k-1)^2 - 4\chi^2] \tan \pi \chi \quad (20)$$

ここに、 $\chi = \sqrt{F^2 - 1} B/L$ であるが、通常 $\chi \ll 1$ であるので $\tan \pi \chi \sim \pi \chi$ 、なる近似を行い、 χ^2 の項を無視すると、

$$\Gamma_k = 8 / \pi^2 (2k-1)^2 \quad (21)$$

となり、 $\Gamma_1 = 0.81$ 、 $\Gamma_2 = 0.09$ 、 $\dots$ である。したがって、衝撃波の第1項は理論的には無視できない大きさを持っている。しかし、実験結果を見ると前節で示した様に、流れのおおよその構造は周期解で説明できる。そこで、周期解を用いて流速に対数則を仮定して内岸と外岸のせん断力を推定することにする。

$$\phi_0 = u/u_* = 6.0 + 2.5 \ln(h/k_s) \quad (22)$$

において、 $k_s = 2.6 \text{ dm} = 0.5 \text{ m}$ とすれば、無次元河床せん断力は、

$$\tau_* = u_*^2 / s g d = u^2 / (\phi_0^2 s g d) \quad (23)$$

これに、弯曲頂部の現地換算した周期解の理論値を代入すると内岸は $\tau_* = 0.070$ で洗掘され、外岸は $\tau_* = 0.033$ で堆積することが予想される。このことは、線形理論が成立する様な弱い蛇行部は直線化の方向にあることを意味する。図-1に見られる様に、白水川の調査区間では直線ないし弱蛇行部が下流から0~110 m、150~200 m、300~400 mに見られるが、これらは上述の機構で直線化が進んだ結果と考えられる。

参考文献

- (1) 森、黒木、岸、戸嶋、谷口、山地河川における階段状河床形の分類と形成機構に関する研究、第30回水理講演会論文集、1986年
- (2) Renou, Super critical flow in bends of trapezoidal section, ASCE, EM1, 1979年
- (3) 芦田、高橋、新井、土石流の調節制御に関する研究(2)、京都大学防災研究所年報、第24号B、1981年

付記 本研究の遂行に当たっては、文部省科学研究費特定研究「比較河川学研究」の援助を得た。