

II—19 数値解による二次元河床擾乱の伝播機構の研究

北海道大学工学部 正 員 森 明 巨
北海道大学工学部 正 員 岸 力
北海道大学工学部 ○春 田 俊 哉

著者ら(1)は、河床に擾乱を置いた場合、これ乗り越える流れと迂回する流れがあり、いずれの性質が強いかが発生する河床形態に重要な影響を与えることを指摘し、常流の場合について単純化した流れと流砂のモデルを用いてこの機構を調べた(2)。本研究では同様なモデルで射流の場合を検討したものである。

1. 流れと河床変動のモデル

モデルの考え方は既に前報で述べているので方程式系のみ示すと、流砂の連続式(1)、 x 及び y 方向の運動方程式(2)、(3)、流れの連続式(4)である。

$$\eta_t + a u_x + b v_y = 0 \quad (1) \quad F^2 u_x + \xi_x = 0 \quad (2)$$

$$F^2 v_x + \xi_y = 0 \quad (3) \quad \xi_x + u_x + v_y = \eta_x \quad (4)$$

ここに、 u : x 方向の流速で、 U_0 からの摂動分、 v : y 方向の流速、 η : 河床高、 ξ : 水面高で、それぞれ平均流速 U_0 、平均水深 h で無次元化している。 t : 無次元化時間、 F : フルード数。 a 、 b は、流砂量を u のベキで表すことによる係数で、常数とし、 $a=4$ 、 $b=1$ とした。

(1)~(4)の方程式系の特性曲線を求め、原点に置いた点擾乱が t 後に到達する x 及び y 座標を (X, Y) とおくと、 X, Y はパラメーター λ を用いて(5)式で与えられる。

$$X = [a F_1 + (3a - b F_1) \lambda^2 + b \lambda^4] / (F_1 + \lambda^2)^2 \cdot t \quad (5)$$

$$Y = 2\lambda (a - b F_1) / (F_1 + \lambda^2)^2 \cdot t$$

(5)式から y を固定したときの (X, Y) 線の x 方向の伝播速度 V_x を求めると(6)式が得られる。

$$V_x = b + (a - b F_1) / (F_1 + \lambda^2) \quad (6)$$

図-1に $F=1.5$ (実線)のときの (X, Y) 線($t=1$)と V_x (点線)を示した。 x 軸を中心に左右対称なので $y \geq 0$ の部分のみ示した。 (X, Y) 線の x 軸上を見ると2つの伝播速度があるのがわかる。1つは図中のP点に達するもので、この波動を前報と同様にP型と呼び、もう1つのS点に達するものをS型と呼ぶことにする。それぞれの波速を V_P 、 V_S とおくと $V_P = -a/F_1$ ($F_1 = F^2 - 1$)、 $V_S = b$ である。また、P点から伸びる (X, Y) 線をP線、S点から伸びる (X, Y) 線をS線と呼ぶことにする。

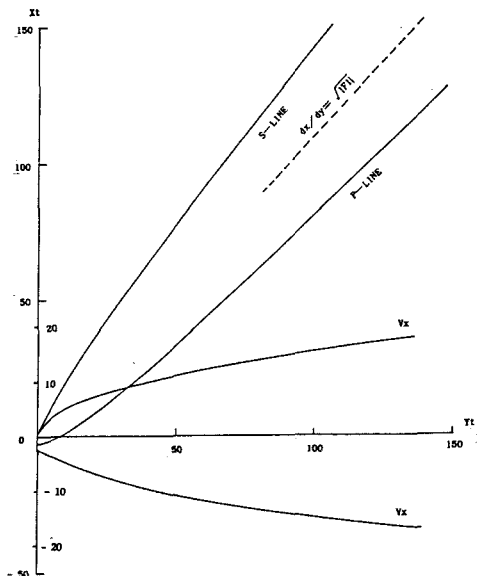


図-1

2. 流れと河床変動の数値解析

$F < 1$ の場合には計算点を図-2 a の様にとったが、この配置は $F > 1$ の場合には方程式系が双曲型になるため、Leap-frog のスキームとなり、 Δx 、 Δy が任意に取れず不便である。ここでは、図-2 b の様に計算点を配置する。(2)式を(4)式に代入して得られる(7)式と(3)式をある x について連立して解く。上下流の v を平均して▲地点の v を与え、 $F < 1$ の場合と同様に two-step の Lax-Wendroff の差分スキームとする。

$$F_1 \xi_x + F^2 v_y = F^2 \eta_x \quad (7)$$

安定条件は $F < 1$ の場合とほぼ同じで(8)式となる。

$$\Delta t / \Delta x \leq |F_1 \sin^2 p + \gamma^2 \sin^2 q| / (a \sin^2 p + b r \sin^2 q) \quad (8)$$

ここに、 Δt 、 Δx 、 Δy ：それぞれ、時間、 x 方向、 y 方向の刻み幅、 $p = k_x \Delta x / 2$ 、 $q = k_y \Delta y / 2$ 、 $\gamma = \Delta y / \Delta x$ 、 k_x 、 k_y ：それぞれ、 x および y 方向の波数。

$F > 1$ であるため、(8)式の分子=0 となり得る。これを避けるために u 方向の運動方程式に人工粘性を導入して(9)式を用いる。ただし、 ν ：人工粘性で、 $\eta_{xx} > 0$ の地点では $\nu = 0$ とする。このときの安定条件は、 $\nu < 1$ の条件の元に(10)式となる。

$$F^2 u_x + \xi_x = -\nu \xi_{xx} \quad (9)$$

$$\Delta t < 2 \nu F^2 / (a + b F_1) \quad (10)$$

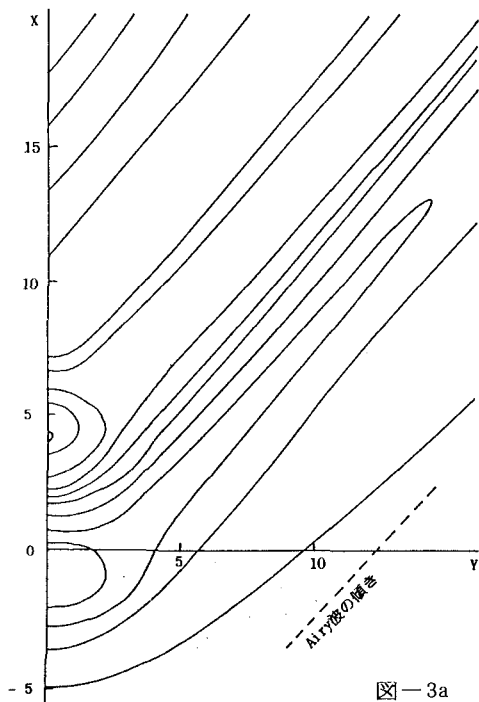


図-3a

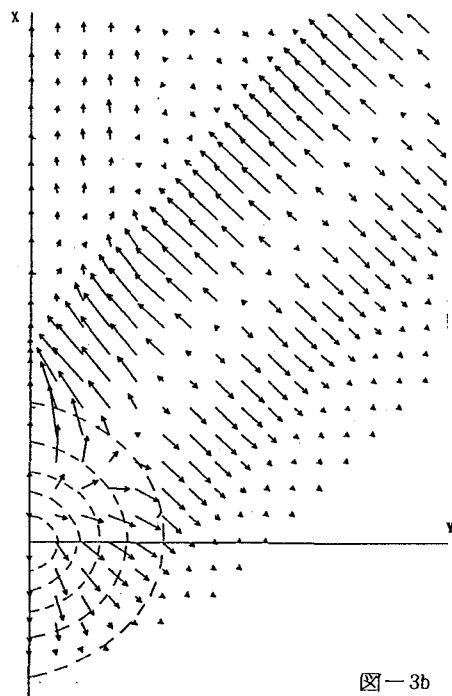


図-3b

3. 単一擾乱の周りの流れ

原点に (11) 式で与えられる擾乱を置く。

$$\begin{aligned}\eta &= [1 + \cos(2\pi r/L)] / 2 & \text{for } r \leq L/2 \\ &= 0 & \text{for } r > L/2\end{aligned}\quad (11)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

図-3は、 $t=0$ ($L=10$)における ξ の等高線(a図)と摂動流速のベクトル図(b図)である。擾乱の等高線をb図に点線で示した。擾乱の上流側と下流側に衝撃波が発生している。この流れでは河床波の形成機構が2つある。 x 軸上の水面形は、擾乱上で高まり、これの下流で窪むが、この水面形に伴う下流部への流れの集中により点状の擾乱が形成される。これをT波と呼ぶことにする。これが1つで、もう1つはAiry位相波によるものである。

$\eta = a_\eta \exp i(k_x x + k_y y)$ 、 $\xi = a_\xi \exp i(k_x x + k_y y)$ とおき、これらを、(2)~(4)式から u 、 v を消去した式(12)に代入すると(13)式が得られる。

$$F_1 \xi_{xx} - \xi_{yy} = F^2 \eta_{xx} \quad (12)$$

$$a_\xi / a_\eta = F^2 k_x^2 / (F_1 k_x^2 - k_y^2) \quad (13)$$

これからAiry波は $k_y/k_x = \sqrt{F_1}$ である。図中にAiry波の傾き $dx/dy = \sqrt{F_1}$ ($=1.12$)を一点鎖線で示した。点擾乱($L=0$)の場合、 $t=0$ ではS線とP線は一致し、その傾きは、Airy波の傾きと同じで、この線上にAiry波による河床波が形成される。この河床波は、 t とともにP線にしたがって上流に伝播するP波とS線にしたがって下流に伝播するS波に分かれる。

4. 有限擾乱の伝播構造

ところで、数値計算では擾乱の大きさが有限であることと、流れが双曲型であるために、P線より下流全域に亘って波群が発生する。これが図-4に示した $t=1.90$ ($L=2$)における η の峰線(実線)と谷線(点線)に見られる。 $F < 1$ では(X、Y)線が閉じて閉曲面をなし、河床波の発生域はその周辺に限られる(文献(2)参照)。以下では、この波群の性質を調べる。

$y \rightarrow$ 大のS線近傍を見るとAiry波の傾きを持った峰線が見られるが、これは新たに形成されたものである(以後Airy河床波と呼ぶ)。各峰線に上流から順に番号を付けたが、 A_i は $t=0.191$ 以後に i 番目に発生したAiry河床波である。発生したばかりのAiry河床波の峰線は x 軸に達し

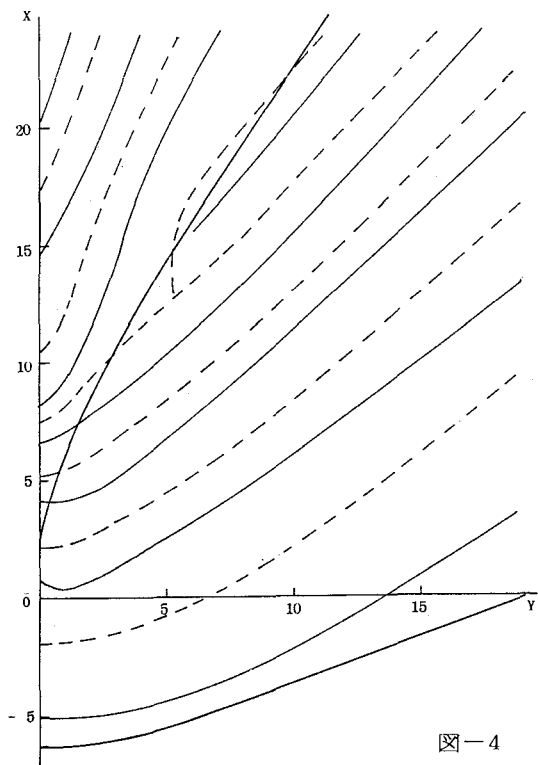


図-4

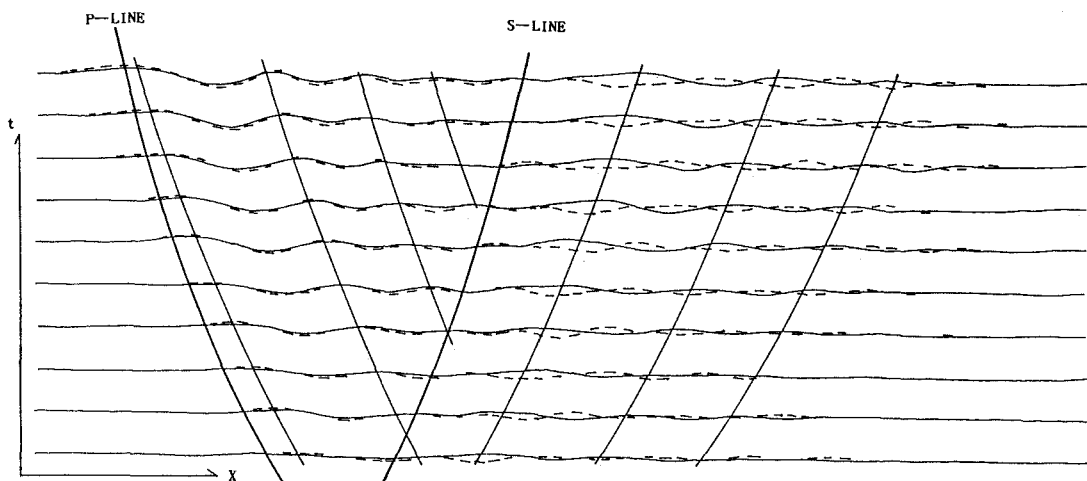


図-5

ていないが、これより上流の河床波ほど峰線は x 軸に近づき、S点近傍より上流では x 軸に達する。これらに対してS線より下流の波動の峰線は総て x 軸につながっている。 図-5 ($L=2$) に $y=8$ における η (実線) と ξ (点線) の縦断面の時間変化を、PおよびS線の時間変化とともに示した。 ξ と η の位相関係を見ると、S線より上流では同位相で、 $k_y/k_x < F_1$ 、S線より下流では逆位相で、 $k_y/k_x > F_1$ で、それぞれP、S波の特徴を持っている。

図中の細実線は、各 t の対応する η の峰を結んだものである。S線を境に上流の波は上流に、下流の波は下流に向って伝播している。図から各 t での位相速度を求めて図-6に点線で示した

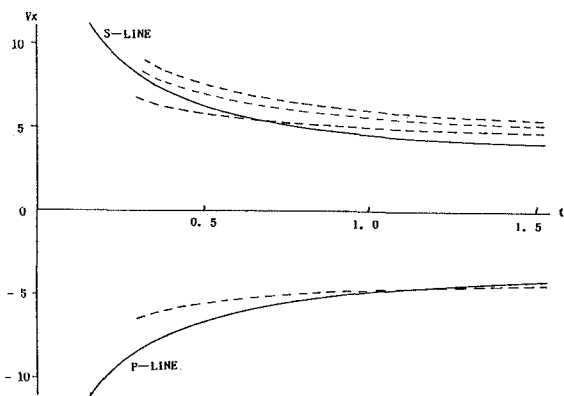


図-6

た(S線より上流の3つの波動は殆ど一致して一本になっている)。図中の実線は(5)、(6)式から求めた理論値で、点線はこれと良く一致している。これらからS線より上流の波群はP波、下流の波群はS波と判断される。

x 軸上における図-5と同様の関係をみたのが図-7 ($L=2$) である。図から次のことがわかる。

- 1) 初期擾乱はP点の波速 V_P で溯上する。これを P_1 波とする。
- 2) S点の下流域に定在河床擾乱 T_2 が形成される。
- 3) T_2 の下流に波速 V_P で溯上する波動が発生し、ある点に達すると定在河床擾乱 T_3 となる。
- 4) S線が t とともに流下して T_2 に接近すると、 T_2 の上流斜面が崩れて波速 V_P で溯上を開始し、 P_2 波となる。
- 5) 以下同様にして T_3 、 T_4 、 $\dots$ 、 P_3 、 P_4 、 $\dots$ が形成される。
- 6) 以上のT擾乱の挙動を見ると、T擾乱は群速度で流下する様に見える。その走時を図中の点線とすると群速度は V_s である。

図-8は x 軸上の河床波 ($T_2 \sim T_7$ 、 P_2 波) と $y > 0$ の河床波 (図-4に示した2~4番波、 A_1 、 A_2 波) の関係を見たものである。図中の点線は、 $y > 0$ の河床波の x 軸上の走時である。 x 軸上の波動は

上流に向かって伝播し、 $y > 0$ の波動は下流に向かって伝播し、両者の間に次々につなぎ換えが起こっているのがわかる。

以上に述べた有限擾乱の挙動は前節に述べたと点擾乱の挙動とかなり異なる様に見える。著者らは両者のの関係を次の様に考えている。

点擾乱の場合、擾乱の 0_+ 下流に $L=0_+$ のT擾乱が形成され、 V_s の様な波速で流下する。有限擾乱の場合には、すでに形成されている擾乱 T_i の下流に点擾乱群が流下し、これより更に下流から溯上するP波動的な波動と重ね合さって T_i 擾乱を形成する。時間が経過するとP波の部分は上流に伝播し、S波の部分はT擾乱として流下する。

5. 水路における擾乱の伝播

直線水路左岸に有限擾乱をおいたときの河床変動を調べる。

図-9 ($L=5$ 、水路幅 $B=10$) は、 $t=0.0381$ における流速ベクトル図である。衝撃波の伝播の様子が見られる。その傾きは、図中に点線で示した Airy波の傾きに一致している。図-10 ($L=5$ 、 $B=10$) は、 $t=0.762$ における η の峰線(実線)と谷線(点線)を示したが、これらは斜め交錯縞を描き、その傾きは、Airy波の傾きである。これらの内で最も波高の大きい峰線を太い実線で結ぶと蛇行しているのがわかる。

図-11 ($L=4$ 、 $B=5$) は、 $t=3.81$ における η (実線)の横断図である。図中に峰線(点線)と谷線(一点鎖線)を示したが、斜め交錯縞が消滅しているのがわかる。

6. 考察

木下(3)は、 $F > 1$ の流れでの砂州形成実験において、通水初期に斜め交錯縞が表れ、それが徐々に発達し、ついには砂州に成長することを見出している。図-9～11は、このプロセスを表しているものと考えられ、

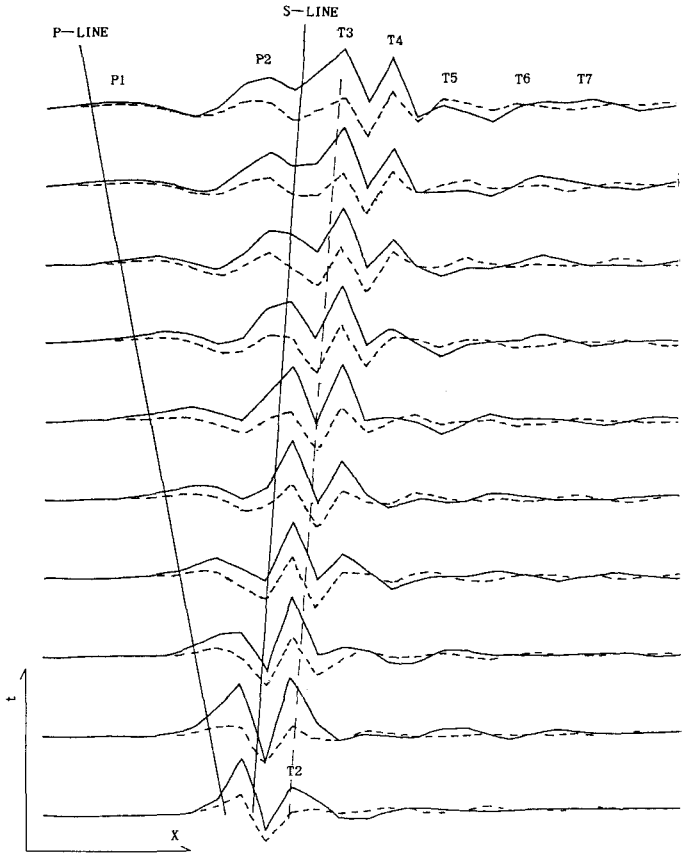


図-7

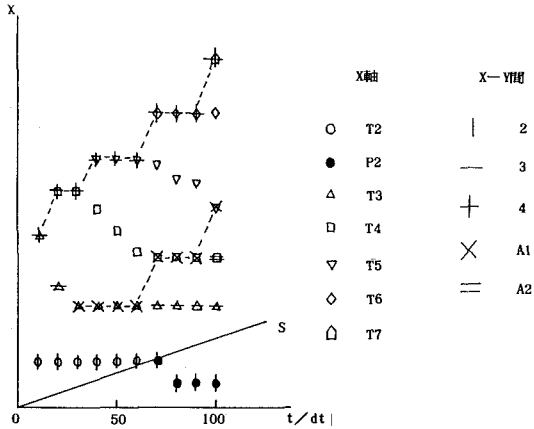


図-8

また、平面形状から考えて 図-11の河床波は砂州と判断できる。そうすると、砂州の前縁はS線に沿っていることからS型波動により砂州が形成されると考えられる。著者らは、前報で $F < 1$ においてもやはりS型波動により砂州が形成されることを示した。一般に砂州の伝播方向はFによらず下流であり、また、発生条件など基本的な物理的性質がFによらないことが理論的にも(4)、実験的にも(5)指摘されている。(ただし、砂州前縁の形状は若干Fに依存する) このことは砂州がS型波動により形成され、S波の性質がFによらないことに対応するものと考えられる。

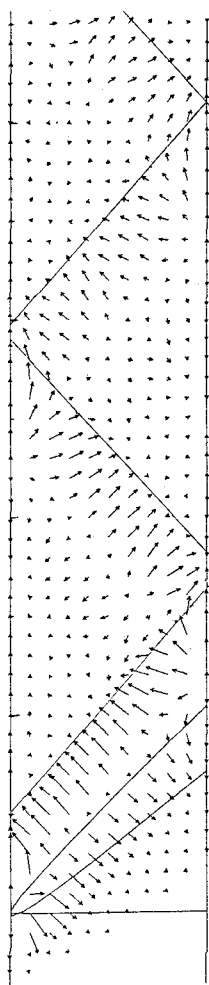


図-9

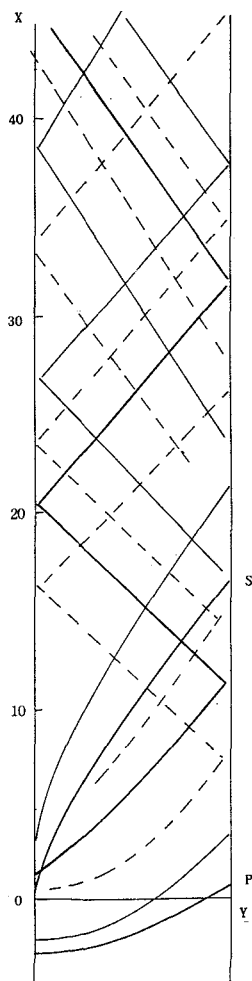


図-10

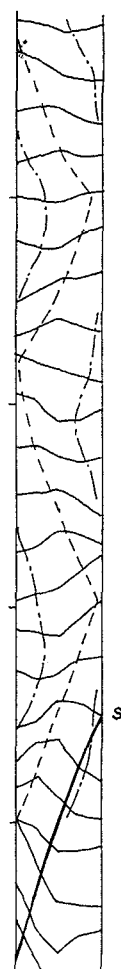


図-11

謝辞。砂州の発達機構とFの関係について、京都大学防災研究所藤田裕一郎氏に貴重な御討議を戴いた。また、本研究は、文部省科学研究費自然災害特別研究(1)「沖積地河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究」(代表岸力)の援助を得て行われた。記して謝意を表します。

参考文献

- (1)森、岸、蛇行流路における砂州の発達機構と流れの構造、第41回土木学会年構、1986年。
- (2)森、岸、二次元擾乱の伝播機構、第31回水理講演会論文集、1987年。
- (3)木下、石狩川河道変遷調査、1961年
- (4)黒木、岸、中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究、土木学会論文報告集第342号、1984年
- (5)木下、大井川牛尾狭窄部開削の影響に関する「砂レキ堆相似」による模型実験、1980年