

II-17 貯水池結氷板の熱応力について

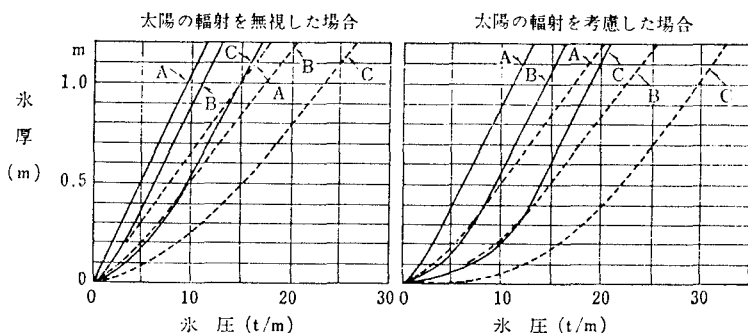
北見工科大学 川地 悟
 北 見 工 大 正員 佐渡 公明
 北 見 工 大 正員 中尾 隆志

1 まえがき

北海道や山岳地などの寒冷地では、貯水池や湖の水厚が50cmを越えて結氷することもある。この結氷板が1日の気温変化に対応して熱膨張と熱収縮を繰り返すため、熱応力が発生する。例えば屈斜路湖において、2月の厳冬期には気温が -25°C であったものが 0°C を越す場合もあるので、その熱応力はダムやゲートなどの水理構造物の設計において考慮しなければならない。日本大ダム会議のダム設計基準には図-1のRoseの図表が示されているが、実際の設計において氷圧力は算入されていない¹⁾。それは貯水池が全面結氷すれば波浪が起こらないことおよび氷圧力は波浪と同等以下のため、結氷していない時の波浪を設計に算入すればよいとされている。

結氷板の熱応力が引き起す現象として諏訪湖や屈斜路湖の「御神渡り」が有名である。その現象は数多く報告されているが、実際の熱応力を観測した例は数少ない。国外では熱応力の観測や計算の式などしばしば見られるが^{2), 3)}、日本においては北海道の大雪ダムと金山ダムしかなされていない^{4), 5)}。

本論文は北見市近郊の富里ダムや屈斜路湖における氷温と氷圧力の観測結果を報告するとともに、氷板表面の温度を使って氷温の垂直分布の予測をし、その計算された氷温変化から熱応力を計算し、実測値との比較をする。



- (注) 1. 横軸の氷圧：氷板の堤軸方向1m当りの値
 2. 記号の意味：——貯水池両岸無拘束の場合 A 気温上昇率 $2.8^{\circ}\text{C}/\text{時}$
 " 完全拘束の場合 B " 5.6 "
 " " C " 8.4 "
 3. 貯水池両岸完全拘束：両岸が急傾斜で結氷が不動の状態
 4. 貯水池両岸無拘束：両岸傾斜ゆるやかで氷の縁がすべり上るような状態

図-1 氷厚と氷圧力の関係

(Rose によるダム設計基準, 日本大ダム会議)

2 熱応力を求めるための基礎方程式

結氷板の熱応力は、氷温分布に伴うひずみから求められる。そのため2-1では結氷板の温度変化を求める計算方法を示し、2-2ではその氷温を用いて Bergdahlの方法により熱応力を計算する方法をのべる。

2-1 氷温の計算式

結氷板内の氷温分布を表わす方程式は、式(1)の一次元熱伝導方程式である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここに、 θ ：氷温、 x ：深さ、 t ：時間、 k ：熱拡散率

氷板表面を原点として深さ方向に x 座標をとり、氷温 $\theta(x, t)$ を計算するために結氷板の厚さを ℓ として、境界条件と初期条件のとり方で 4 通りの計算式が得られる。その 4 本の計算式は、2 通りの初期温度分布と 2 通りの表面温度変化の組み合わせによって考えられる。

まず、(1) 式を解くための初期条件として、初期温度分布が一定と線形の 2 通りがある。初期温度分布一定とは、 $t = 0$ のときの温度分布を図-2 の破線のように $\theta(x, 0) = C_0 =$ 一定とおくものである。一方、初期温度分布線形とは、 $t = 0$ のときの温度分布を氷板表面の温度 $\theta(0, 0)$ と氷板下面の温度 (0°C) とを直線で結んだものである。

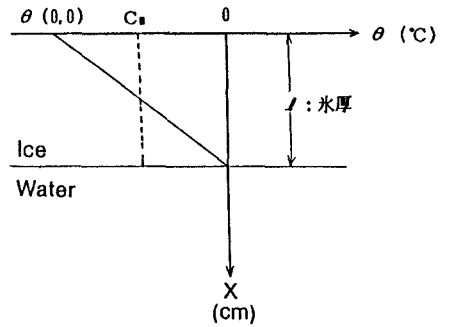


図-2 初期 ($K=0$) 温度分布

次に、氷板表面温度変化については、氷板表面の温度変化を Δt 時間ごとに区切り Δt 時間内の温度変化を区分的一定と区分的線形に考える 2 通りの方法がある。区分的一定とは図-3(a) のように時間が $(K-1)\Delta t \leq t \leq K\Delta t$ のときの表面温度変化を、 $(K-1)\Delta t$ のときの表面温度 $\theta(0, (K-1)\Delta t)$ と $K\Delta t$ のときの表面温度 $\theta(0, K\Delta t)$ を平均化して表わしたものである。一方、区分的線形とは図-3(b) のように $(K-1)\Delta t \leq t \leq K\Delta t$ のとき表面温度変化を温度 $\theta(0, (K-1)\Delta t)$ と温度 $\theta(0, K\Delta t)$ を直線で結び直線変化させたものである。

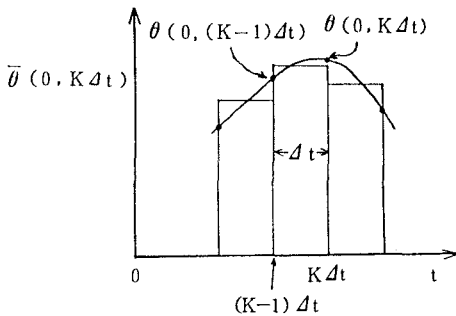


図-3(a) 表面の温度変化区分的一定

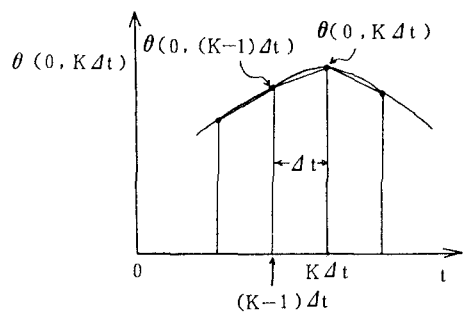


図-3(b) 表面の温度変化区分的線形

さて、これらの条件の組み合わせで 4 通りの計算式を導くことができる⁶⁾。たとえば、初期温度分布一定・表面温度変化区分的一定の式は、式(2)のようになる。

$K = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \theta(x, \Delta t) = & -\frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \exp(-\beta n^2) \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \exp(-\beta n^2) \bar{\theta}(0, \Delta t) + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \bar{\theta}(0, \Delta t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

$K = 2, 3, 4, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} \theta(x, K\Delta t) = & -\frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{1 - (-1)^n\} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \exp(-K\beta n^2) \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell} [\exp\{-(K-i)\beta n^2\} - \exp\{-(K-i+1)\beta n^2\}] \bar{\theta}(0, i\Delta t) \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \exp(-\beta n^2) \bar{\theta}(0, K\Delta t) + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \bar{\theta}(0, K\Delta t) \end{aligned} \quad (2-2)$$

ここに、 C_0 : 一定な初期温度、 $\beta = K\pi^2 \Delta t / \ell^2$ 、 $\bar{\theta}(0, K\Delta t) = (\theta(0, (K-1)\Delta t) + \theta(0, K\Delta t)) / 2$
式(2)の C_0 を $\theta(0, 0)$ に入れ換え、 $(-1)^n$ をはぶくことによって、初期温度分布線形・表面温度変化区分的

定の式となる。

また、初期温度分布一定・表面温度変化区分的線形の式は、式(3)のようになる。

$K = 2, 3, 4 \dots\dots$ のとき

$$\begin{aligned} \theta(x, K\Delta t) = & \frac{2C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-(-1)^n) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \exp(-K\beta n^2) \\ & + \frac{2}{\pi\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[\theta(0, (K-1)\Delta t) \{ \exp(-(K-1)\beta n^2) - \exp(-K\beta n^2) \} \right. \\ & - \beta n^2 \exp(-K\beta n^2) \} + \sum_{i=1}^{K-1} \theta(0, K\Delta t) \{ \exp(-(K-i-1)\beta n^2) \\ & - 2\exp(-(K-i)\beta n^2) + \exp(-(K-i+1)\beta n^2) \} + \theta(0, K\Delta t) \exp(-\beta n^2) \Big] \\ & - \frac{\pi^2}{6\beta} \frac{\theta(0, K\Delta t)}{\ell} \left(2x - \frac{3x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \right) + \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \theta(0, K\Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)の C_0 を $\theta(0, 0)$ に入れ換え、 $(-1)^n$ をはぶくことによって、初期温度分布線形・表面温度変化区分的線形の式になる。

これらの4本の計算式の計算値と実測値の比較は、3章に示す。

2-2 熱応力の計算式

熱応力の求め方として、Bergdahl²⁾が提案した方法をのべる。まず、氷の応力-ひずみ関係式は非線型レオロジーモデルから得られたもので、そのモデルは線形のスプリングと非線形のダッシュポットを直列につないだものである。そのBergdahlのモデル式は式(4)の微分方程式である。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + LD\sigma^n \quad (4)$$

ここで、 ε はひずみ、 σ は応力、 E は氷の弾性係数、 D は拡散係数、 L と n はひずみ速度と氷温の関数である。Bergdahlはスウェーデンの5つの湖における氷圧力を計算するのに、 E 、 D 、 L 、 n に対し下記のように与えている。

$$E = 6.1(1 - C\theta) \text{ GPa}$$

$$C = 0.012 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad \theta : \text{氷温}$$

$$D = D_0 \exp(-Q/RT)$$

$$D_0 = 9.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{S} \quad Q = 59.8 \text{ KJ/mole} \quad R = 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$$

$$T : \text{氷温の絶対温度}$$

$$L = 4.40 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2}$$

$$n = 3.651$$

方程式(4)を解くのに、差分法を用いると式(5)が得られる。

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \bar{E} \left[\Delta\varepsilon - (D_1 L \sigma_1^n + D_2 L \sigma_2^n) \frac{\Delta t}{2} \right] \quad (5)$$

$$\text{添字 1 : 時刻 } (K-1)\Delta t$$

$$\text{添字 2 : 時刻 } K\Delta t$$

$$\bar{E} : \Delta t \text{ の間の平均弾性係数}$$

$$\Delta\varepsilon : \Delta t \text{ の間のひずみ変化量}$$

$\Delta\varepsilon$ は熱膨張によるひずみ増加量であるから次の式(6)から得られる。

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \alpha(\theta_1 - \theta_2) \quad (6)$$

$$\theta_1 : \text{時間間隔 } \Delta t \text{ で } (K-1)\Delta t \text{ のときの氷温}$$

$$\theta_2 : \text{時間間隔 } \Delta t \text{ で } K\Delta t \text{ のときの氷温}$$

$$\alpha: \text{線膨張係数} = (54.0 + 0.18 \theta) \times 10^{-6} \quad (1/^{\circ}\text{C})^{1)}$$

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2) / 2$$

また、式(5)(6)の 1, 2 という添字は時間がそれぞれ $(k-1)\Delta t$, $K\Delta t$ の状態を表わしており、 σ_1 を既知として σ_2 をニュートン法を用いて繰り返し計算で求めなければならない。 σ_2 の初期値 $\sigma_2^{(0)}$ は、式(4)において $n=1$ とした式(7)から得られる式(8)を用いた。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + L D \sigma \quad (7)$$

$$\sigma_2^{(0)} = \sigma_1 + \bar{E} \left(\Delta\varepsilon - (D_1 L \sigma_1 + D_2 L \sigma_2) \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (8)$$

なお、式(4)において $n=1$ とした場合は、線形スプリングとダッシュポットを直列につないだ Maxwell モデルとなる。

ニュートン法による繰り返し計算によって、圧縮応力に関しては答が得られる。しかし、式(5)において $n=3.651$ のため $\sigma_2 \leq 0$ のとき、つまり引張応力のときは計算できない。そのため本論文では、 $\Delta\varepsilon < 0$ となる氷温低下のとき、まず氷温増加 ($|\Delta\varepsilon|$) として応力変化量を計算し、 σ_1 から応力変化量を引いて σ_2 を求めた。

3 富里ダムにおける氷温の比較

1985年12月27日から翌年1月11日まで、北見市郊外にある富里ダムにおいて氷温と熱応力の観測を行なった。観測地点はダム堤体から少し離れた取水塔近くにあり、取水塔を中心にして半径約15mを27日と30日の2回にわたって除雪した。また、氷温は熱電対を用いて3cmごとに測定し、熱応力は小型土圧計を用いて測定した。

12月29日0時から31日14時までの氷板表面温度の実測値を用いて、2-1で示した氷温の垂直分布を計算し実測値との比較を行なった。28日23時を初期時刻 ($k=0$) として初期温度分布一定・表面温度変化区分的一定の式(2)によって、氷厚 $\ell = 22\text{cm}$ で1時間ごと ($\Delta t = 3600$ 秒) に計算すると

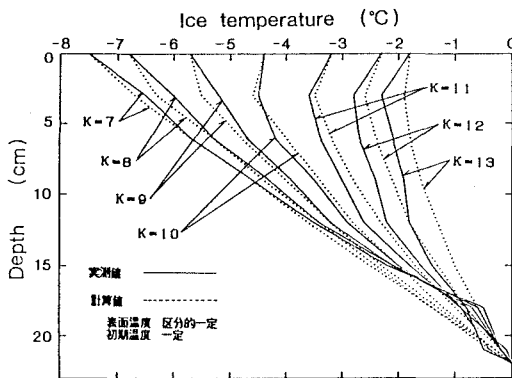


図-5 富里ダムにおける氷温垂直分布の比較
(1985. 12月29日6時~12時)

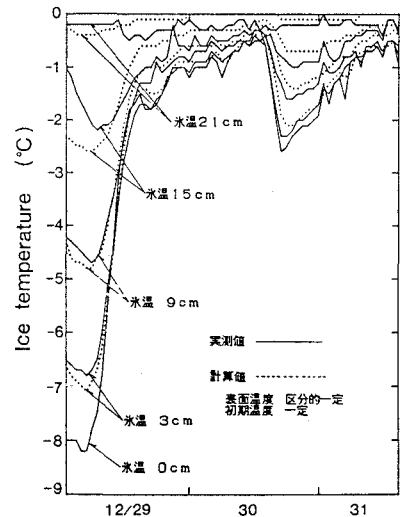


図-4 富里ダムにおける氷温変化の比較

表-4のような氷温の時間変化が見られる。29日の急激な氷温

上昇に対し垂直分布を比較すると図-5のようになる。実測値・計算値ともに深さ3cmごとに求め折線で結んでいる。図中の $K=7$ は29日6時の氷温で $K=8$ は7時の氷温である。 $K=11, 12, 13$ において実測値と計算値がずれているのは、12月29日の正午頃が晴れであり氷板表面に埋設した熱電対の太陽放射の熱吸収が氷より良く、熱電対の温度が氷板表面の温度より高くなったため計算値が大きく出てきたと思われる。

このようにして、2-1で示した4本の計算式から得られた計算値と実測値との誤差の標準偏差を表-1に示す。4本の計算式について、誤差の大小はほとんどない。また4本の計算式の中で式(2)はそれほど複雑でない。以上から、式(2)の初期温度分布一定・表面温度変化区分的一定の計算式が氷温分布の計算に最適であることがわかった。以後の熱応力の計算においては、氷温計算として式(2)を用いることにする。

4 屈斜路湖における氷温と熱応力の比較

1986年1月30日から2月6日までの間、北海道の道東に位置する屈斜路湖において富里ダムと同様に、氷温と熱応力の観測を行なった。観測地点は屈斜路湖の池の湯から約100 mほど中島に近付いた氷板上である。

さて、この時期は一年中で一番厳しい時であり快晴の日々が続いたため、氷板上1 m 20 cmの気温は日最低が-25℃前後で日最高が+3℃になる日もしばしば見られた。また、積雪については観測期間中ほとんどなく、2月1日から2日の朝にかけて少しの降雪があったが氷板上に積もることなく測定器のまわりに吹きだまりが少しできたが2月2日10時に取り除いた。

図-6は観測された氷温と熱応力の日変化のグラフである。氷温は熱電対により氷板下0 cm(氷板表面)、1 cm、2 cm、3 cm、5 cm、7 cm、10 cm、15 cm、20 cm、25 cmの10点を測定した。また、熱応力は氷板下3 cmと8 cmの2箇所について測定したが、3 cmの土圧計は設置方法が良くなかったのかほとんど値を示さないため氷板下8 cmの土圧計の値だけを図-6に示してある。また、氷圧力が初期に10.5 kg/cm²を示しているが、これは土圧計を固定するのに用いたシャーベット状の水雪の凍結の体積膨張によるもので熱応力によるものではない。しかしその事を除けば、氷圧力は氷温とほぼ同位相で日変化しているのがよくわかる。

氷温について実測値と計算値の比較を行なうため、式(2)によって2月4日0時を初期値とし氷厚36.6 cmで2月4日1時から2月6日13時まで1時間ごとに計算した。計算は熱電対の各深さごとに行なったが、図-7には3点しか載せていない。誤差の標準偏差は1.40℃であまりいい値ではない。図-6から熱電対による氷温0 cmが正午頃に正を示し、また図-7から計算誤差が大きいのが日最高値附近であることから判断して、熱電対が富里ダムの場合よりさらに表面温度より高くなり誤差の標準偏差が大きくなったと思われる。

次に、2-2で紹介した熱応力の式による計算値と実測値の比較をするため図-7と同じ期間について図示したのが図-8である。まず、式(2)によって氷板下8 cmの計算値を求め(土圧計を埋設したのが8 cmの深さであるため)、その氷温変化を使ってBergdahlの方法により熱応力を計算したBergdahlの方法による計算値は実測値の約5~7倍の値である。それは氷温の計算値が実際の氷温より大きな変化をしているため、

表-1 4本の計算式による計算値と実測値の誤差の標準偏差(℃)

表面温度変化			
		区分的一定	区分的線形
初期温度 分布	一定	0.24	0.24
	線形	0.27	0.26

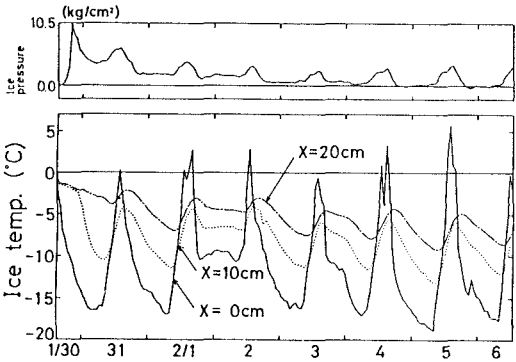


図-6 屈斜路湖における氷温・熱応力変化

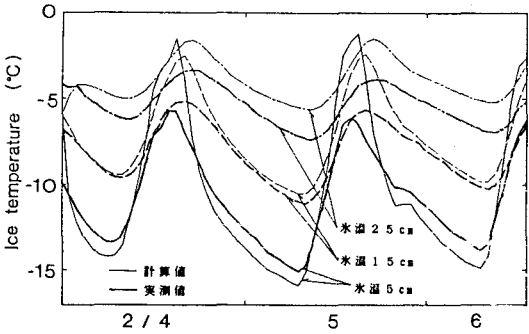


図-7 屈斜路湖における氷温変化の比較

結氷板の拘束の程度，土圧計の埋設の方法などの原因がかさなっているためであろう。ここで示した熱応力の計算は，氷板が完全拘束されていると仮定しているが，実際の屈斜路湖の氷板はクラックが多数入り，観測点近くに御神渡りも存在している。この実際の氷板の拘束の程度を完全拘束に対し $1/5 \sim 1/7$ とすると計算値と実測値は合うことになる。

さて，図-8の上部にあるのはMaxwellの式とBergdahlの式の比較のグラフである。式(7)のMaxwellの式はコンクリートや岩石などで使われている応力-ひずみの関係式であるので，参考までにMaxwellの式とBergdahlの式の比較を行なっている。このグラフからBergdahlの式はMaxwellの式の応力の上限2.5MPaを約1.5MPaに押さえているようである。それは氷が非線形の粘弾性体であるためであろう。

最後に，図-9は2月4日8時(K=8)から14時(K=14)までの熱応力の垂直分布を示したものである。水温増加とともに，引張応力から圧縮応力へと変化している様子がよくわかる。

5 あとがき

水温の計算方法に関して，気象条件を算入しなければならないであろう。特に太陽放射は図-1のRoseの図でも考慮されているとおり重要な因子である。また氷板表面の温度が既知としているため，本文中に一度も出て来なかったが積雪も重要である。というのも，積雪は断熱材の役割をして水温変化を著しく鈍感なものにしてしまう。貯水池などの場合，氷板上の積雪深が大きいと熱応力は，ほとんど考慮すべき値にはならない。しかし，屈斜路湖の観測地点のように吹きさらしなどの特別な場合もあるので積雪の影響は非常に大きい。

参考文献

- 1) 日本大ダム会議：改定ダム設計基準，日本大ダム会議，1978。
- 2) Lars Bergdahl: Thermal Ice Pressure in Lake Ice Cover, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1978。
- 3) Gordon F.N. Cox: A Preliminary Investigation of Thermal Ice Pressures, Cold Regions Science and Technology, 1984。
- 4) 山岡勲・藤田睦博：大雪ダム貯水池の表層結氷と温度上昇に伴う氷圧，第14回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集，1977。
- 5) 山岡勲・藤田睦博：貯水池表層結氷の氷圧測定，日本雪氷学会秋季大会，1975。
- 6) 佐渡公明：地表面伝熱量の実用的算定法，土木学会北海道支部論文集，1984。
- 7) Bernard Michel: Ice Mechanics, Les Presses de l'Université Laval, 1978。

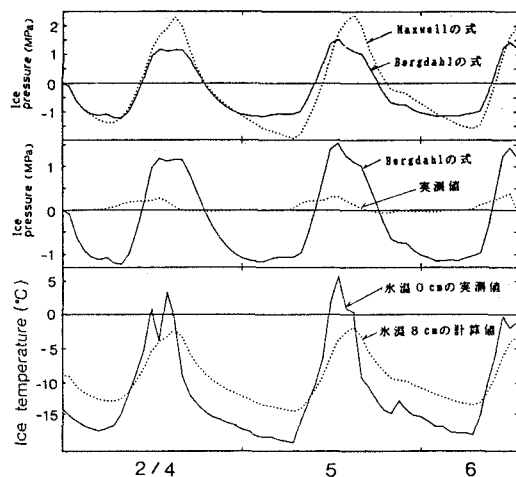


図-8 屈斜路湖における熱応力の比較

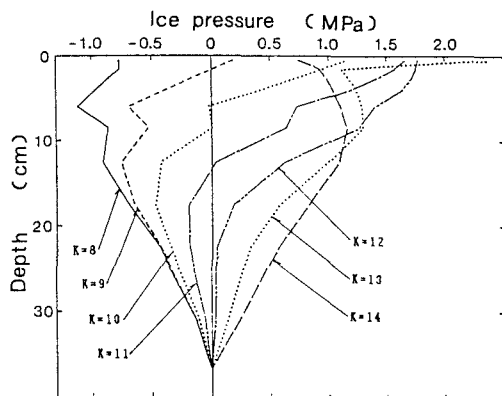


図-9 Bergdahlの方法による熱応力の垂直分布