

II-1 降雨の鉛直浸透における kinematic wave 特性とヒステリシスの効果を考慮した新しい不飽和浸透方程式の解の特性

北海道大学工学部 正員 山田 正
同 上 正員 藤田 睦博
同 上 学生員 小林 稔

1. はじめに

近年放射性物質をトレーサーとする雨水の土壌中における挙動に関して幾つかの野外実測が行なわれており、降雨に対する地下水面の異常に速い応答や土壌水分の移動速度がトレーサーの移動速度に比べて1桁以上速いということが報告されている。^{5) 6)} 一方土壌中での水分移動に関して、吸水時には与えられたポテンシャル勾配のもとでは定常時に比べて浸透しにくく、脱水時には容易に水分移動が行なわれるというヒステリシス効果が存在することが知られている。この現象の取り扱いにおいては脱水時と吸水時における毛管ポテンシャル-水分量関係として別々の曲線を用いることが通常行なわれて来た。これに対して著者らは本来土壌の特性は定常状態において測定されたものを用いるべきであり、ヒステリシスの効果は基礎方程式中に含ませるべきものであると考えている。

そこで、本研究は上記の事情を考慮し、以下の二つの目的のもとに遂行されたものである。

- (1) 土壌中の雨水の浸透現象を取り扱うときに従来使用されて来た不飽和の浸透方程式(リチャーズの式あるいはクルートの式)を再検討し、解の持つ特性とその水文学的意義を明らかにする。
- (2) ヒステリシスの効果を内包した新しい不飽和浸透の基礎式を提案し、その適用範囲を明らかにする。

2. 不飽和浸透方程式の持つ kinematic wave 特性

ここでは次に導かれる土柱水分に関するクルートの式である (3)式を用い、降雨の鉛直浸透における解の挙動を解析的に検討してみた。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$q = -k(\theta) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} \quad (2)$$

ここで、 θ : 体積含水率、 ψ : 毛管ポテンシャル

q : フラックス、 $k(\theta)$: 不飽和透水係数、である。

(2)式を (1)式に代入すると、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{dk(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \quad (3)$$

ここで、 $D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z}$ である。

また、不飽和透水係数の関数形としては以下に示す経験式を用いる。

$$k(\theta) = a\theta^m \quad (4)$$

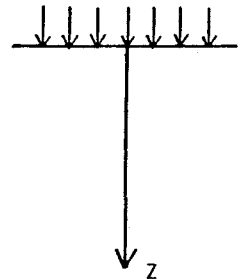


図 1 座標系

今、土壌表面に一定の時間一定強度の散水を与えたとき、散水終了後しばらくの間は降雨強度=浸透速度という連続関係を満たしているが、土中に十分深く浸透した雨水は次第に kinematic wave としての特

性を示し始める。(3),(4)式より kinematic wave としての波速は次式で示される。

$$\frac{dk(\theta)}{d\theta} = m a \theta^{m-1} \quad (5)$$

一方重力水としての水粒子の移動速度は $\frac{k(\theta)}{\theta}$ で与えられることから次式となる。

$$\frac{k(\theta)}{\theta} = a \theta^{m-1} \quad (6)$$

(5),(6)式より kinematic wave としての波速は

水粒子の移動速度に比べて m 倍大きくなること
がわかる。図 2 は西垣³⁾によりまとめられた様
々な土壌に対する m の値を示すものであるが、
この図より m の値としては粘性土で 4-10, 砂質
土で 3-6 の値を取ることがわかる。よって、土
中十分に深いところでの水分量パターンの降下
速度はトレーサの降下よりわかる水粒子の降

下速度に比べて 3-10 倍速いことになる。表 1 表 1 水分量分布の降下速度とトレーサの降下速度
は Aneblom⁶⁾によってまとめられたトレーサの移動速度と水分量パターンの移動速度に関する野外観
測値を比較したものであるが、この表に見られる水分量の移動速度がトレーサの移動速度より 3-9 倍程
度速いということを合理的に説明することができる。また、実際の地下水かん養量つまりフラックスをほ
ぼ $k(\theta)$ と考えるならば、(4),(5)式より kinematic wave としての波速は、地下水かん養量よりも m
/ θ 倍となることがわかる。一般に θ は 1 より小さい値であるから、前述の 3-10 倍よりも大きい値にな
ることがわかる。以上のことより、不飽和浸透流の kinematic wave 特性が今までに観測されている降雨
に対する地下水位の異常に速い応答や、トレーサ濃度から知られる水粒子速度と水分量分布の降下速度
との間の異常に大きいずれの原因になっていることがわかる。

3. ヒステリシスの効果を内包した新しい不飽和浸透の基礎式とその解析

3.1 基礎方程式の誘導

ここでは毛管ポテンシャル-水分量の関係と、不飽和透水係数-水分量または毛管ポテンシャルの関係
として定常状態において得られる関係式を用いる。これに対し水分フラックス $\vec{q}$ を新たに次式で表わす。

$$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k_x(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \tau \frac{\partial q_x}{\partial x} \\ q_y &= -k_y(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \tau \frac{\partial q_y}{\partial y} \\ q_z &= -k_z(\theta) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} - \tau \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

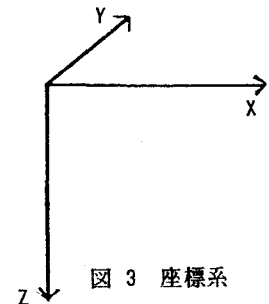


図 3 座標系

ここで、 τ はヒステリシスの効果による緩和時間を表わす時定数である。(8)式に示されるモデルを考
えるときには、水の入った水槽に太さが様々な管を立てたものを想定するとわかりやすい。土の間隙には
様々な大きさがあるので管がその間隙を表現していると考ええる。それぞれの管では毛管力が異なるので上

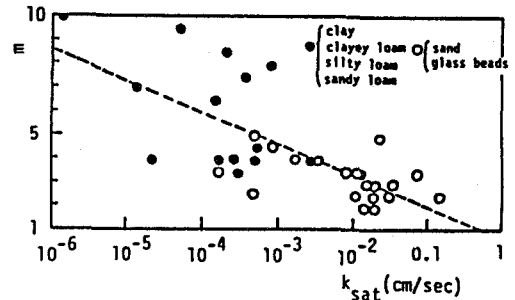


図 2 (4) 式の m と K_{sat} (飽和透水係数) の関係

Site \ Velocity	True velocity (m/month)	Apparent velocity (m/month)
Grønhoj (Andersen & Sevel 1974)	0.4	3 - 3.5
Tärnsjö (Aneblom & Persson 1978)	~ 0.5	1.5 - 2.5

昇する水の高さが異なる。今ある圧力のもとでそれぞれの管での毛管水位が平衡に達しているときを考え、そこから圧力のある値に変化させる。当然、管の水位は上昇するが、ふたたび平衡状態に達するまでには各管ごとにそれぞれのある時間を要する。この時間遅れをヒステリシスと考え、これを式で表現したものが (8) 式である。ここで前述の (2) 式と比較して (8) 式の右辺第二項が本研究で新に導入した項である。この時間遅れの項を考慮することにより同一のポテンシャル勾配に対して脱水時には浸透し易く、浸潤時には浸透しにくいというヒステリシスの効果を表現し得る。一方、土中水分の連続式は

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = 0 \quad (9)$$

であるから、(7) 式を (9) 式に代入すると次式を得る。

$$\tau \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{dk_z(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \{D_x(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{D_y(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}\} + \frac{\partial}{\partial z} \{D_z(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}\} \quad (10)$$

また、毛管ポテンシャルを従属変数にして表わすと次式となる。

$$\tau C(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{dk_z(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \{k_x(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x}\} + \frac{\partial}{\partial y} \{k_y(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y}\} + \frac{\partial}{\partial z} \{k_z(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z}\} \quad (11)$$

ここで、 $C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ である。

(10), (11) 式で左辺第一項が新に加えられた項であり、従来の不飽和浸透方程式が移流分散方程式であったのに対して、その特性に加えて電信方程式としての特性が加わってくるようになった。即ちこの方程式の数学上の特性から不飽和浸透に新に波動という特性が現われるようになったのである。

3.2 数値解法および計算条件

本研究では、上で導いた (10), (11) 式を鉛直次元について数値計算を行った。計算方法としては、不飽和浸透の数値計算に従来からよく使われる、陰解法の差分計算を用いた。差分化は Crank-Nicolson 法によって行い、Gauss-Saidel 法を用いて計算を行った。土壌物理条件の $\theta - \psi$ 関係、 $k - \theta$ または ψ 関係については Rehovot sand のデータを数値で与えたものと、Rehovot sand にほぼ等しくなるように置いた関数形で与えたものと、二通りを使用した。関数形としては、実験値をよく表現する経験式として次式を用いた。

$$S_e = \left(\frac{\psi - \psi_{cr}}{\psi} \right)^\lambda \quad (12)$$

$$k(\theta) = k_{sat} S_e^n \quad (13)$$

$$\text{ここで、} S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_{sat} - \theta_r}$$

θ_{sat} : 飽和体積含水率、 θ_r : 最小含水量

ψ_{cr} : 限界毛管ポテンシャル

k_{sat} : 飽和透水係数、 n, λ : 係数、である。

ここで関数の形で土壌物理条件を与えた理由としては、数値

で各関係を与えた場合にはそれぞれの数値間は内挿することになり、その誤差が解析の結果に大きく現われることを危惧したためである。降雨は図 5 のように一定降雨

強度を一定時間与え、その後降雨を打ち切った。初期条件としては、水分および圧力ともに一定値分布を与え、次のようにした。

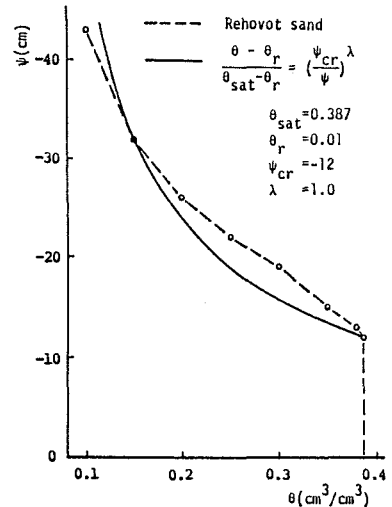


図 4 $\theta - \psi$ 関係

$t=0$ で $\theta_i = \theta_0$ ($i=1,2,3,\dots$)

土壌物理条件を数値によって与えた場合 $\theta_0=0.1$

土壌物理条件を関数形によって与えた場合 $\theta_0=0.1$

$t=0$ で $\psi_i = \psi_0$ ($i=1,2,3,\dots$)

土壌物理条件を数値によって与えた場合 $\psi_0=-43.0$

土壌物理条件を関数形によって与えた場合 $\psi_0=-50.27$

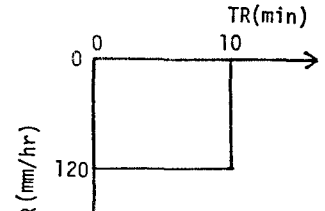


図 5 降雨条件

境界条件は、地表面では降雨強度に等しい浸透があるものとし、最下部では上からの影響がまったく表われない程度の深さを想定し、実際には θ および ψ を初期値に固定した。

また Δz はいずれの計算でも1cmとし、 Δt は τ の値によって多少異なっているが、ほぼ1秒とした。

4. 計算結果および考察

(1) 土壌物理条件をデータによって与えた場合の結果

図 6は Rehovot sand のデータを用いた計算の τ が 0の場合であるが、これは本研究で導入したヒステリシスの効果を見逃した、つまり従来までの解析で得られていた解である。これを見ると、時間の経過とともに θ の分布形も

ψ の分布形も同様に拡散効果のために平坦な状態になっていくのがわかる。また θ と ψ とを比較すると、分布形のピーク位置はほとんど変わらずにほぼ同じスピードで進んでいることがわかる。これに

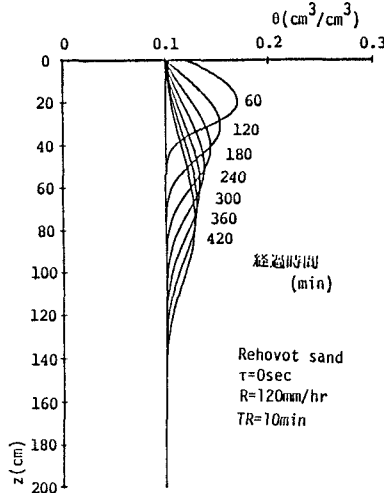


図 6 (a) θ 分布の時間変化
(土壌物理条件を数値で与えたとき)

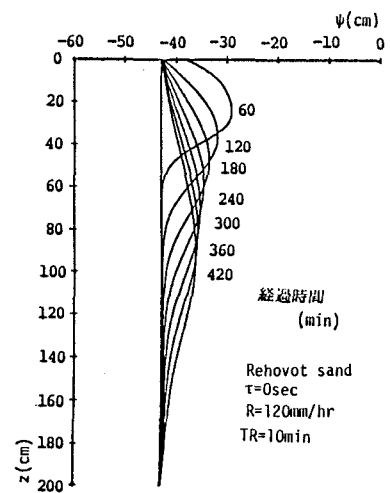


図 6 (b) ψ 分布の時間変化
(土壌物理条件を数値で与えたとき)

ot sand のデータを用いた計算の $\tau=5$ の場合であって、図 6と比べて大きく異なる点は、 θ および ψ のどちらの場合でも $\tau=5$ の時には分布形がある程度形を保ちつつ降下しているのがわかる。図 8は同条件での $\tau=10$ の場合であるが、これを見るとそのようすがいっそうよくわかる。もう一つの顕

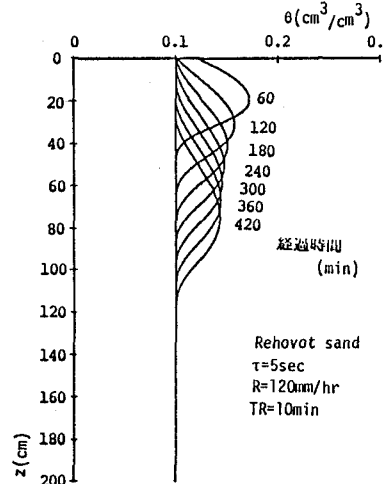


図 7 (a) θ 分布の時間変化
(土壌物理条件を数値で与えたとき)

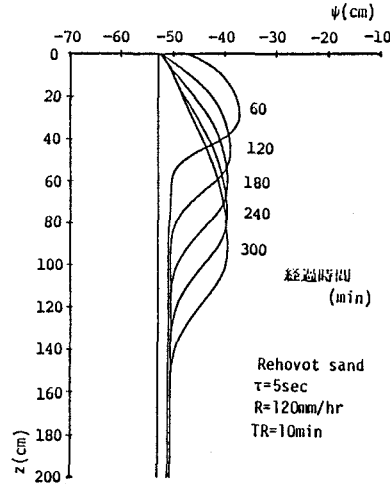


図 7 (b) ψ 分布の時間変化
(土壌物理条件を数値で与えたとき)

著な違いは、同じ τ
 $=5$ においても ψ の
 方が θ よりも明かに
 同時刻では先へ伝わ
 っている事がわかる。
 θ については $\tau =$
 0 の場合と $\tau = 5$ の
 場合とのピーク位置
 を比較してもあまり
 変化がなく、降下速
 度についてはほぼ同
 じであると言えるが、
 ψ については $\tau =$

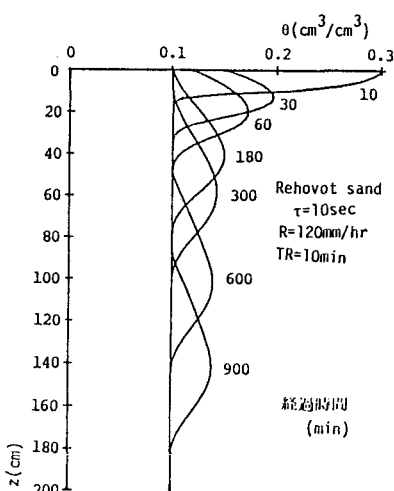


図 8 θ 分布の時間変化
 (土壌物理条件を数値で与えたとき)

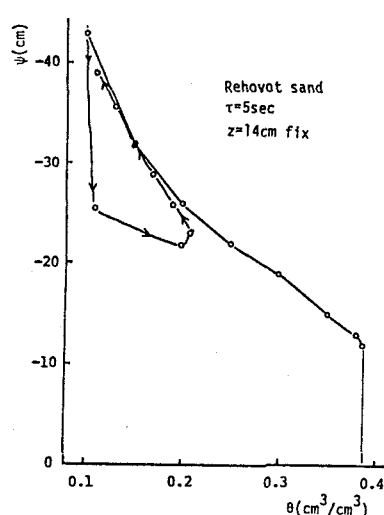


図 9 ヒステリシスカーブ
 (土壌物理条件を数値で与えたとき)

0 の場合と $\tau = 5$ の
 場合とでは、 $\tau = 5$
 の方が伝わるスピー
 ドが速いということ
 がわかる。また、図
 9はある深さの一点
 に注目し、その点で
 の θ と ψ の関係を矢
 印のように時間を追
 ってプロットしたも
 のであるが、この図
 からわかるようにそ
 の軌跡は明かにヒス
 テリシスを表わして

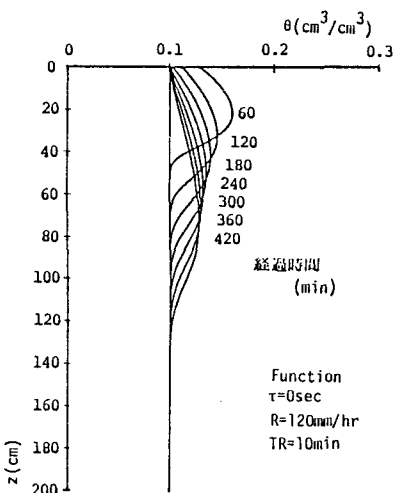


図 10 (a) θ 分布の時間変化
 (土壌物理条件に関数形を与えたとき)

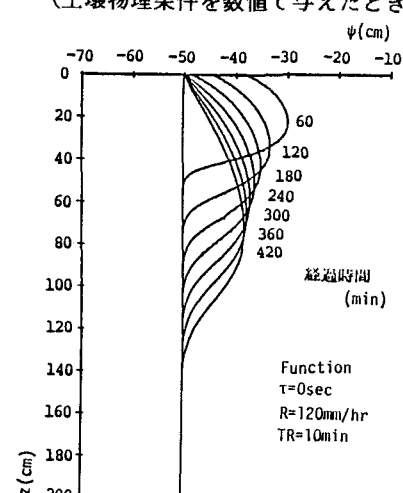


図 10 (b) ψ 分布の時間変化
 (土壌物理条件に関数形を与えたとき)

(2) 土壌物理条件を関数形で与えた場合の結果

図 10 は土壌物理条件に関数形を用いた計算の $\tau = 0$ の場合であるが、土壌物理条件をデータで与えた場合と同じ傾向の結果となり θ も ψ も拡散の効果による広がりが見られ、 θ と ψ とのスピードの差は見られない。図 11 は土壌物理条件に関数形を用いた計算の $\tau = 20$ の場合であるが、これもまた土壌物理条件をデータで与えた場合とほぼ同様の傾向を示すことがわかる。すなわち $\tau = 0$ と $\tau = 20$ とでは後者の方が分布形を保ちつつ降下し、また後者の方の ψ が速いスピードで伝わっているのがよくわかる。図 12 は図 9と同様にある一点での θ と ψ の関係の時間変化を示したものであり、この図も θ と ψ の関係にヒステリシスが表われていることを示している。

(3) 土壌物理条件をデータで与えた場合と関数形で与えた場合の比較

いずれの場合も τ の値に違いがあるものの τ を無視した解と τ を考慮した解との関係、または τ を考慮した解の θ と ψ との関係などはほぼ同様であると考えることができる。土壌物理条件をデータで与えた方が関数形で与えた方よりも小さな τ の値でほぼ同様の解が得られているという事は、データで与えた方で

はデータ間の内挿による誤差が表われたためだと考えられるが、その誤差は解の性質に影響を与えるものではないと言えることができるであろう。

5. 結論

(1) 降雨の鉛直浸透における kinematic wave 特性を検討

することによって、土中水のトレーサー (土壤物理条件に関数形を与えたとき) の移動速度と水分量の降下速度との大きな違いや、降雨に対する地下水位の異常に速い応答を説明することが可能となった。

(2) 不飽和浸透におけるヒステリシスの効果を方程式自体に組み込むという方法で与え、その基礎式を導いた。

(3) 本研究で得られた新しい方程式を差分計算を用いて解くことで、十分ヒステリシス効果を表現できることがわかっただけでなく、土中深いところでは孤立波状に一定形状を保ったまま降下浸透するという興味深い結果が得られた。

謝辞：本研究を進めるにあたり、本学の長谷川和義助手、並びに道口敏幸技官の協力を得た。ここに心から感謝の意を表する。

参考文献

- (1) 山田正、日野幹雄、藤田光一：小試験地における雨水の流出機構，第26回水理講演会論文集，pp229-23，1982。
- (2) 藤田光一、日野幹雄、山田正：ダルシー則に基づく降雨鉛直浸透の解析，第26回水理講演会論文集，pp321-328，1982。
- (3) 西垣誠：飽和不飽和領域内の土中水の浸透特性に関する 2,3の考察，土質工学会論文報告集，Vol.23，No.3，1983。
- (4) U.Zimmerman, K.O.Munnich and W.Roether：Downward Movement of Soil Moisture Traced by Means of Hydrogen Isotopes, Isotope Techniques in The Hydrologic Cycle, pp28-36, 1967。
- (5) L.J.Andersen and T.Sevel：Six Years' Environmental Tritium Profiles in The Unsaturated and Saturated Zones, Gronhoj, Denmark, Isotope Techniques in Groundwater Hydrology, Vol.1, pp3-20, 1984。
- (6) T.Aneblom and G.Persson：Studies of The variations in Water Content in The Unsaturated Zone of ESKER，Nordic Hydrological Conference and Second Nordic IHP Meeting, 1978。

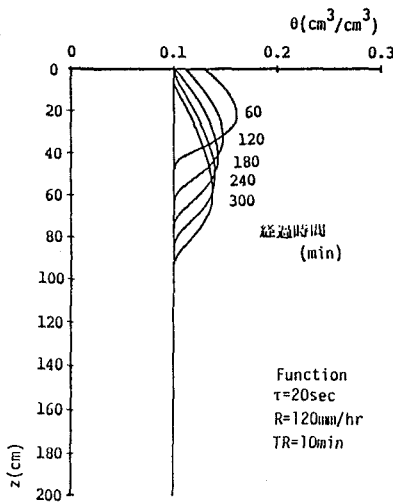


図 11 (a) θ 分布の時間変化 (土壤物理条件に関数形を与えたとき)

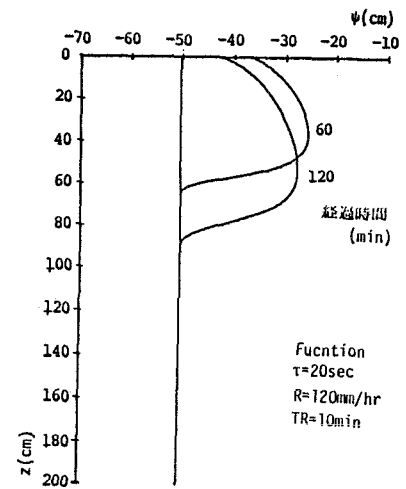


図 11 (b) ψ 分布の時間変化 (土壤物理条件に関数形を与えたとき)

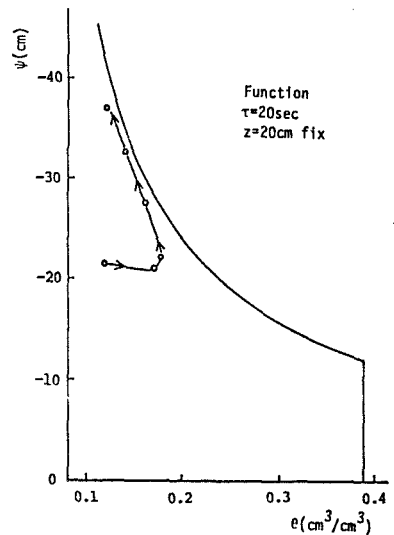


図 12 ヒステリシスカーブ (土壤物理条件に関数形を与えたとき)