

## II-9

## 遅延要素をもつ降雨・流出系の周波数応答解析

苫小牧工業高等専門学校 正員 嵯峨 浩

## 1. はじめに

流出解析の手法はSherman による単位図法に始まり、現在まで数多くの手法が提案されてきた。その分類はブラックボックスモデルと物理モデルに大別される。ブラックボックスモデルの同定法としての変換法（ラプラス変換法・フーリエ変換法等）は多くの研究者により開発されてきたが、洪水流出の場合 IUH (instantaneous unit hydrograph) がスムーズな形にならず不規則な振動波形、ときには負値さえ現われることがあるとされている。これは、データの観測誤差や非線形性によるものと周波数領域で間接的に IUH を求め時間領域に変換する誤差等が原因になっていると思われる。本論文は IUH を直接関数形で近似し、遅延要素（むだ時間とタンク時定数）をその関数のパラメータとして導入し、遅延要素を周波数領域で決定する手法を示したものである。また、遅延要素の物理モデル系（貯留法・タンクモデル法）との対応とその物理的意味の若干の考察を行ない、流出現象の非線形性を明らかにすると共に実流域における流出解析の応用を図るものである。

## 2. 基礎理論

降雨流出系において降雨開始後、数時間の後に流出が始まる現象はよく知られている事実である。本論文において入力開始時刻 $t_1$ と出力開始時刻 $t_2$ のずれ、即ち出力が発生するまでの時間をむだ時間 $L$  ( $L=t_2-t_1$ ) と定義する。むだ時間 $L$ の概念はこれまで実用に供されてきた流出解析手法においても自然な形で導入されてきた。たとえば、貯留法は現在のところ貯留関数系とタンクモデル系に大別されるが、貯留関数系の場合 Prasad の式は次式で表わされる。

$$S = K_1 Q^P + K_2 \frac{dQ}{dt} \quad (1) \quad \frac{dS}{dt} = R - Q \quad (2)$$

ここに、 $S$ ：貯留量、 $R$ ：流入量、 $Q$ ：流出量、 $K_1 \cdot K_2 \cdot P$ ：定数

(1) 式は  $S-Q$  曲線の 2 価性を最も単純化した表現であると理解できるが、むだ時間 $L$ を導入した出力  $Q(t+L)$  を Taylor 展開すると次式となる。

$$Q(t+L) = Q(t) + L \frac{dQ}{dt} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2Q}{dt^2} + \dots + \frac{L^m}{m!} \frac{d^m Q}{dt^m} \quad (3)$$

したがって、(1) 式はむだ時間 $L$ を一次微分項まで採用した近似式( $P=1$ の場合)と見なすことができる。また、木村の貯留関数法においては、 $S-Q$  曲線のループ解消を目的として遅れ時間 $T_L$ を考慮している。

$$S_t = K Q_t^P \quad (4) \quad \frac{dS_t}{dt} = R - Q_t \quad (5) \quad Q_t(t) = Q(t+T_L) \quad (6)$$

ここに、 $S_t$ ：見かけの貯留量、 $Q_t$ ：遅れ時間 $T_L$ を考慮した流出量

タンクモデル系においては、たとえば Nash の  $n$  段タンクモデルは次式で表わされる。

$$K^n \frac{d^n Q}{dt^n} + nK \frac{d^{n-1} Q}{dt^{n-1}} + \dots + \binom{n}{i} K \frac{d^{n-i} Q}{dt^{n-i}} + \dots + Q = R \quad (7)$$

$\binom{n}{i}$  : 2 項係数

(7) 式に(3)式を導入すると、見かけ上の  $(n+m)$  段のモデルを構成することになり、むだ時間 $L$ は、タンク段数を増すことに等しいと理解できる。また、このことは多段のモデルを（むだ時間）+（段数の少ないモデル）で近似できることを示唆している。

時間領域で(3)式の右辺第何項まで採用するかという問題は、タンク段数を何段にするかという問題と等価であり非常に重要な問題である。たとえば、タンクモデルの主流である菅原の直列4段タンクモデルは同

定すべきモデル定数が16個と多いのが特徴で欠点でもあるとされており、タンク段数を多くすることは実際上の計算を複雑にする原因となっている。

本論文において、流出モデルはむだ時間 $L$ の導入の容易さを考慮して(7)式で示されるNashの $n$ 段タンクモデルを採用した。

(7)式の瞬間単位図 $h(t)$ は次式で与えられる。

$$h(t) = \frac{1}{K\Gamma(n)} \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{t}{K}\right) \quad (8)$$

ここで、 $n$ はタンクの数、 $\Gamma(n)$ はガンマ関数、 $K$ はタンク時定数で、ハイトグラフとハイドログラフの重心の時間差を $M$ とすると $K=M/n$ で与えられる。 $M$ は雨水流の伝播時間 $t_c$ との間に、 $M=t_c/2$ の関係があることから、 $K=t_c/2n$ となり、 $K$ は雨水流の伝播時間の変化の影響も表わしている。したがって本論文において遅延要素として、むだ時間 $L$ とタンク時定数 $K$ を考慮することとする。

(3)式において右边第何項までとるかという重要な問題は、周波数領域では解消され、以下のように $L$ の簡単な導入が可能になる。

(7)式の解は時間領域と周波数領域で次式で与えられる。(以後フーリエ変換関数を大文字で表わすため(7)式の $Q$ を $q$ と改める)

$$q(t) = \int_0^\infty r(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (9) \quad H(\omega) = R(\omega) \cdot Q(\omega) \quad (10)$$

ここに、 $Q(\omega) = \int_0^\infty q(t)\exp(-j\omega t)dt$   
 $R(\omega) = \int_0^\infty r(t)\exp(-j\omega t)dt \quad (11)$   
 $H(\omega) = \int_0^\infty h(t)\exp(-j\omega t)dt$   
 $j$ : 虚数単位  
 $\omega$ : 円周波数

$H(\omega)$ は最小位相推移系( $L=0$ の場合)の伝達関数である。むだ時間 $L$ を有する伝達関数

$HL(\omega)$ は(12)式で表わされ、 $n$ 段タンクモデルを表現する(7)式にむだ時間 $L$ を導入した伝達関数は(13)式となる。

$$HL(\omega) = H(\omega) \cdot \exp(-jL\omega) \quad (12)$$

$$HL(\omega) = \frac{\exp(-jL\omega)}{(1+jK\omega)^n} \quad (13)$$

表-1

|                  |                                                  | 最小位相推移系                                                                                                                                                                | むだ時間 $L$ を含む場合                                                                                                                                                               |
|------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 伝達関数             |                                                  | $H(\omega) = \frac{1}{(1+jK\omega)^2}$                                                                                                                                 | $HL(\omega) = \frac{\exp(-jL\omega)}{(1+jK\omega)^2}$                                                                                                                        |
| ゲイン (G)          |                                                  | $G = \frac{1}{1+K^2\omega^2}$                                                                                                                                          | $G = \frac{1}{1+K^2\omega^2}$                                                                                                                                                |
| 位 相 ( $\theta$ ) |                                                  | $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2K\omega}{1-K^2\omega^2}\right)$                                                                                                       | $\theta = \theta + \omega L$                                                                                                                                                 |
| ゲインと位相の対応        |                                                  | $G = \cos^2 \frac{\theta}{2}$                                                                                                                                          | 無数                                                                                                                                                                           |
| 単位図              | $0 < t < \Delta t$<br>$(L < t < \Delta t + L)^*$ | $U(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{K}\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{K}\right)$                                                                                          | $U(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t-L}{K}\right) \cdot \left(1 + \frac{t-L}{K}\right)$                                                                                            |
|                  | $t > \Delta t$<br>$(t > \Delta t + L)^*$         | $U(t) = \exp\left(-\frac{t}{K}\right) \cdot \left\{ \exp\left(\frac{\Delta t}{K}\right) \left(1 + \frac{t-\Delta t}{K}\right) - \left(1 + \frac{t}{K}\right) \right\}$ | $U(t) = \exp\left(-\frac{t-L}{K}\right) \cdot \left\{ \exp\left(\frac{\Delta t}{K}\right) \left(1 + \frac{t-\Delta t-L}{K}\right) - \left(1 + \frac{t-L}{K}\right) \right\}$ |

タンク段数  $n=2$

\*はむだ時間 $L$ を含む場合

最小位相推移系とむだ時間 $L$ がある場合の周波数応答特性を表-1に示す。タンク数 $n$ は従来の研究成果より $n=2$ とした。また、最小位相推移系のタンク数の違いによるゲイン線図・位相線図・ナイキスト図を図-1( $n=1,2,3$ )に示す。

表-1より、 $L$ が含まれていてもゲインは最小位相推移系の場合と同じであり位相は $\omega$ [rad]だけ進んでいることがわかる。このことは、 $L$ を含むと $L$ に従っていくらでも周波数応答特性が存在することを示している。その様子を示したのが図-2であり、ナイキスト図では、同一周波数における位置が原点を中心とする同心円上にあることがわかる。もう一つの遅延要素であるタンク時定数 $K$ の違いによるゲイン線図・位相線図・ナイキスト図を図-3に示す。この図ではゲイン・位相が $K$ に従ってそれぞれ変動するが、ナイキスト図においては、同一軌跡を描いている。同一流域の複数の出水例の周波数応答特性を調べると、色々なパターンの応答を示すが(図-4)、このパターンの変動原因として $L$ と $K$ が関与していることが推測される。

また、実際のLとKの求め方は、表-1の各式よりLが含まれていてもゲインは変動しないという事実から各周波数に対応するタンク時定数Kが求まり、Kがわかると最小位相推移系の $\theta$ が求まるから実測資料の位相 $\theta$ からむだ時間Lを求めることができる。

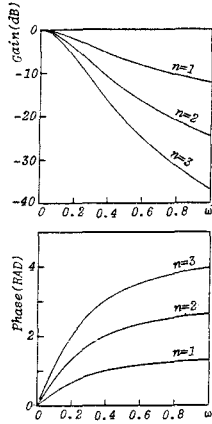


図-1

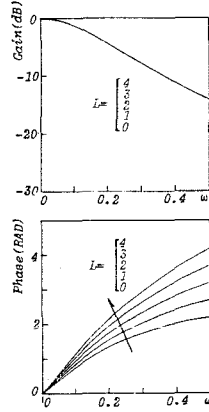


図-2

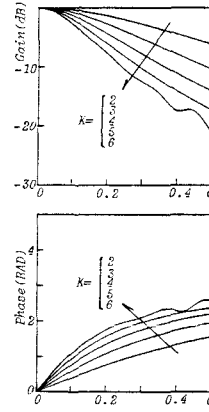


図-3

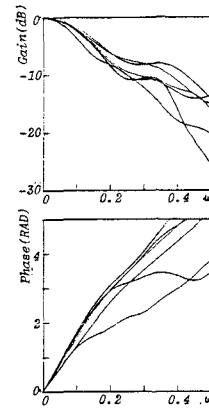


図-4 (鷺川)

### 3. 実流域における計算例

計算の対象とした出水例を表-2に示す。有効雨量は藤田がエントロピー法で推定した値を用い、直接流出量はハイドログラフ立ち上がり時刻と減水部第二折曲点を直線で結ぶ分離法を採用した。cut-off 周波数は $\omega=0.5$ 以上の周波数帯でゲインの減衰が著しいので $\omega=0.5$ とした。鷺川・大和田地点の各周波数に対応するタンク時定数Kとむだ時間Lを図-5・6に示す。

図-6の大和田地点においてNo.2は変動が激しく一定値と見なすことができないので遅延要素だけでは説明できない流出であると思われる。各周波数において変動の少ないKとLの平均値を用いて鷺川・大和田地点の流出を再現したものを図-7・8に示す。図-8(a)はタンクが一段であると仮定して求めたKとLから流出を再現したものである。図-8(b)は二段タンクを仮定した結果である。同一の流出であっても遅延要素(K and L)の導入により一段タンクモデルと二段タンクモデルの両方で再現することができた。このような結果は他の流出にも多く見られた。このことは高次の遅れ系を(見かけのむだ時間)+(低次の遅れ系)で近似できることを示している。

計算の対象とした地点の内4例について、むだ時間L・

| 表-2 採用した資料 |     |                        |             |
|------------|-----|------------------------|-------------|
| 水系         | 地点  | 流域面積(km <sup>2</sup> ) | 洪水番号        |
| 留萌川        | 峠下  | 48.7                   | 1,2         |
|            | 幌糠  | 168.8                  | 1,2,3,4     |
|            | 大和田 | 245.0                  | 1,2,3,4,5,6 |
| 後志利別川      | 今金  | 361.4                  | 1           |
| 鷺川         | 稲穂  | 122.7                  | 1,2         |
|            | 標別  | 949.5                  | 1,2,3,4     |
|            | 鷺川  | 1228.0                 | 1,2,3,4,5   |
| 渚滑川        | 滝上  | 233.3                  | 1,2,3       |
|            | 上渚滑 | 1050.6                 | 1,2         |
| 常呂川        | 鹿の子 | 124.0                  | 1,2,3,4,5   |
|            | 北光  | 558.5                  | 1,2,3       |
|            | 北見  | 1394.2                 | 1,2,3,4     |

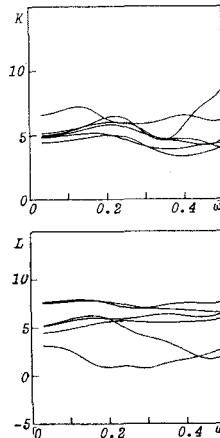


図-5 鷺川

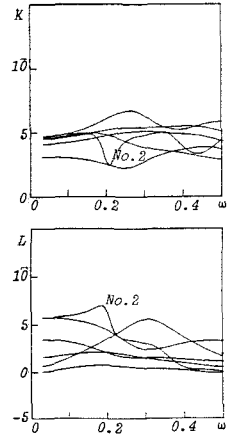


図-6 大和田

タンク時定数 $K$ および降雨特性を表-3に示

す。本手法において $K$ と $L$ を同定できた流出は、同一流域内において比較的中小規模の流出(降雨)であった。

タンク数を二段と仮定して求めた各地点の流出毎のタンク時定数 $K$ ・むだ時間 $L$ と流域面積 $A$ との関係を図-10・11に示す。図-10において、 $K$ は $A$ の大きさによってある幅をもって変動している。その幅は小流域ほど大きく大流域ほど小さくなっている。また、上限値は一定であるが、下限値は $A$ が大きくなるほど $K$ も大きくなっている。このこ

| 地点    | No | $L$ | $K$ | 降雨継続時間<br>(hr) | 総降雨量<br>(mm) | 平均降雨量<br>(mm/hr) |
|-------|----|-----|-----|----------------|--------------|------------------|
| 幌糠    | 1  | 0.2 | 4.3 | 13             | 27.9         | 2.1              |
|       | 2  | 3.3 | 4.2 | 10             | 28.0         | 2.8              |
|       | 3  | 2.3 | 3.6 | 8              | 27.8         | 5.6              |
|       | 4  | —   | —   | 34             | 100.7        | 3.0              |
| 大和田   | 1  | 3.9 | 3.1 | 26             | 34.5         | 4.7              |
|       | 2  | —   | —   | 35             | 126.2        | 3.6              |
|       | 3  | 3.4 | 5.7 | 14             | 79.6         | 19.4             |
|       | 4  | 1.5 | 4.7 | 14             | 33.1         | 10.2             |
|       | 5  | 0.4 | 5.2 | 7              | 33.2         | 8.1              |
|       | 6  | 2.0 | 4.1 | 18             | 43.7         | 5.1              |
| 鹿の子ダム | 1  | 0.0 | 2.6 | 20             | 15.1         | 0.8              |
|       | 2  | 1.4 | 2.6 | 14             | 45.0         | 3.2              |
|       | 3  | 1.3 | 2.8 | 25             | 21.7         | 0.9              |
|       | 4  | 1.2 | 3.6 | 33             | 19.0         | 0.6              |
|       | 5  | —   | —   | 26             | 55.8         | 2.1              |
| 鷺川    | 1  | 5.5 | 4.5 | 28             | 124.2        | 4.4              |
|       | 2  | 7.5 | 5.0 | 13             | 28.0         | 2.2              |
|       | 3  | 7.2 | 4.2 | 23             | 28.7         | 1.2              |
|       | 4  | 6.0 | 6.0 | 18             | 91.6         | 5.1              |
|       | 5  | 1.7 | 5.6 | 24             | 102.7        | 4.3              |

とは小流域ほど流出の局所的な影響を強く(大流域ほど弱く)受けることを意味する。図-11によると、むだ時間 $L$ は流域面積 $A$ との強い相関は見られないが、上限値は $A$ によって規定されている。この場合 $L$ の上限値は先行降雨および土壌水分の初期状態が非常に少ない場合を表わしていると思われる。これは流出に寄与する流域が全体ではなく部分的であるというPartial Source Area の概念を表わしていると思われる。

むだ時間 $L$ と初期降雨強度 $r(t=1)$ の関係を図-12に示す。図から $r(t=1)$ と $L$ には相関があり $r(t=1)$ が大きくなると $L$ が小さく、 $r(t=1)$ が小さいと $L$ が大きくなることがわかる。

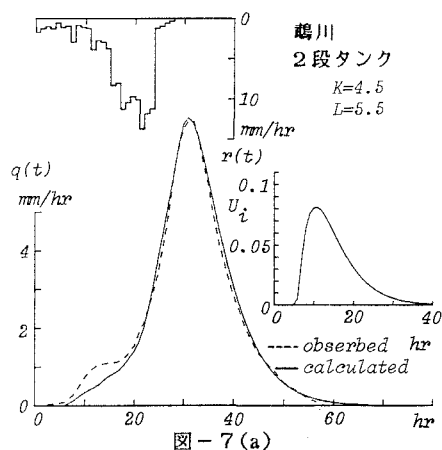


図-7(a)

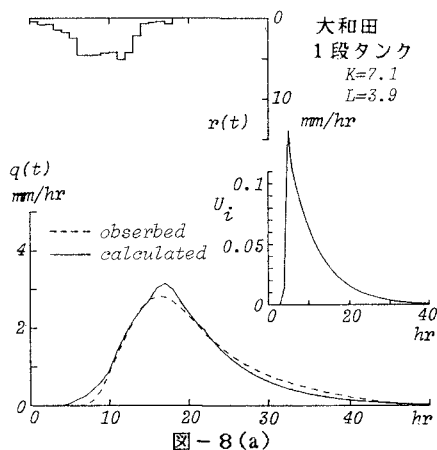


図-8(a)

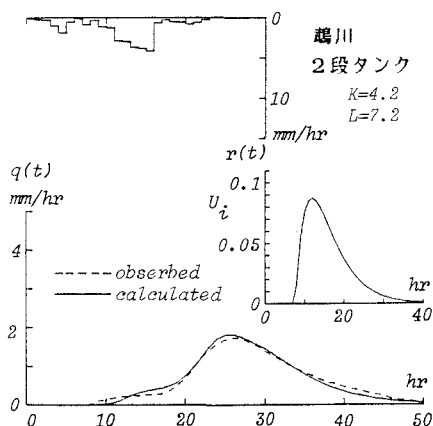


図-7(b)

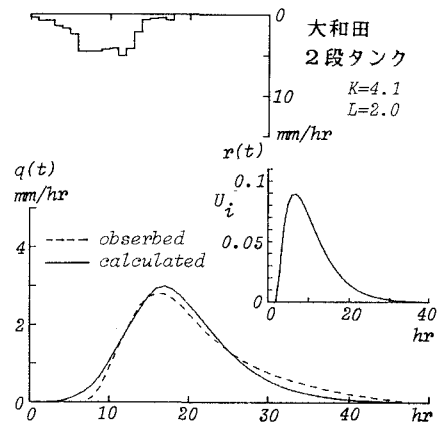


図-8(b)

むだ時間 $L$ とハイドロ・ハイトグラフとの関係を示すと次のようになる。

時刻 $t$ に入力 $r(t)$ があり、直ちに出力 $q(t)$ があるはずのものがむだ時間 $L$ の後出力されたとすると、図-9のように出力は $q(t-L)$ となる。 $q(t-L)$ をTaylor展開すると

$$q(t-L) = q(t) - L \frac{dq}{dt} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2q}{dt^2} - \dots + \frac{(-L)^n}{n!} \frac{d^n q}{dt^n} \quad (14)$$

物理的意味をわかりやすくするため(14)式の右辺第2項までを考えると

$$\begin{aligned} q(t-L) &= q(t) - L \frac{dq}{dt} = 0 \quad (0 < t < L) \\ \therefore q(t) &= \tilde{L} \frac{dq}{dt} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、右辺第2項まで採用した場合 $L$ が $\tilde{L}$ に変化したとする。

(15)式を $0 < t < L$ の範囲で積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^L q(t) dt &= \tilde{L} \int_0^L \frac{dq}{dt} dt \\ \therefore \tilde{L} &= \frac{\int_0^L q(t) dt}{q(L)} \end{aligned} \quad (16)$$

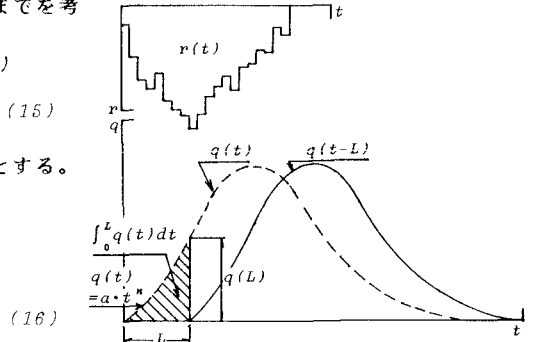


図-9

したがって、 $\tilde{L}$ は $t=L$ までの累加流量と $t=L$ での流量 $q(L)$ との比で表わされる。また $\tilde{L}$ と $L$ の対応は次のようになる。ハイドログラフ立ち上がり部分が $n$ 次放物線で近似できるとすると

$$q(t) = a \cdot t^n \quad (0 < t < L) \quad (17)$$

$$\int_0^L q(t) dt = \frac{1}{n+1} a L^{n+1}, \quad q(L) = a L^n$$

$$\therefore \tilde{L} = \frac{L}{n+1} \quad (18)$$

ここに、 $a$ ：定数

したがって、(16)式と(18)式から

$$L = (n+1) \frac{\int_0^L q(t) dt}{q(L)} \quad (19)$$

降雨との関係は雨水流法の特性曲線によると

$$q(L) = \left[ \frac{1}{k} \int_0^L r(t) dt \right]^{\frac{1}{p}} \quad (20)$$

$p, k$ ：斜面流定数

(19)式と(20)式から

$$L = (n+1) \frac{\int_0^L q(t) dt}{\left[ \frac{1}{k} \int_0^L r(t) dt \right]^{\frac{1}{p}}} \quad (21)$$

(19)式から、累加流量が一定とした場合ハイドログラフの立ち上がりが急なほど $L$ が小さくなり、(21)式からハイトグラフとの関係は降雨開始時から強度の強い雨が降ると $L$ が小さくなることがわかる。このことは表面流の発生と密接な関係があることを推測させる。

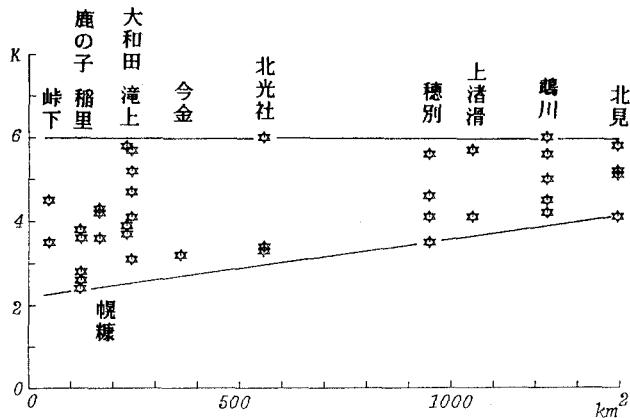


図-10 タンク時定数Kと流域面積Aとの関係

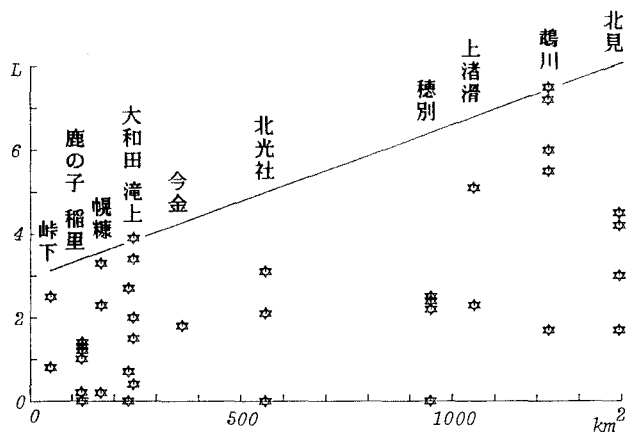


図-11 むだ時間Lと流域面積Aとの関係

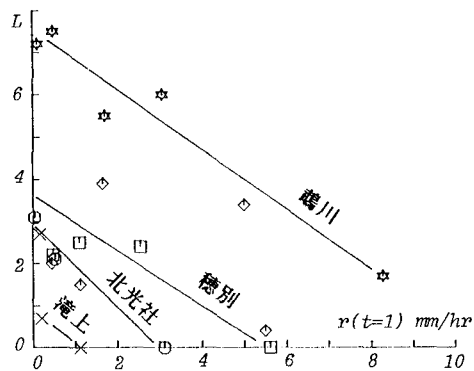


図-12 むだ時間Lと初期降雨強度 $r(t=1)$ との関係

#### 参考文献

- (1) 藤田・道口 : 北海道内諸河川における流出成分の分離について 土木学会北海道支部論文報告集 第42号、1986
- (2) 嵯峨・藤田 : 非線形流出系の周波数応答解析について 第39回年講、1984
- (3) 嵯峨・藤田 : 周波数応答法を用いた流出成分の分離 第40回年講、1985
- (4) 嵯峨 : 周波数応答法による流出成分の分離について 土木学会北海道支部論文報告集 第41号、1985
- (5) 藤田・神田 : 新体系土木工学26・水文学 技報堂出版
- (6) 角屋 : 流出解析手法(講座) 農業土木学会誌