

# I—28 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するRC梁部材の曲げについて

北大・工学部 正会員 上田 正生

## 1 はじめに

Post-Tensioning方式のPC梁部材は、補強のためのSteelが曲線形状を有するコンクリート構造の典型であり、今や正に無数と言える幾多の実用例の存在が示すように、この種構造の設計に必要な理論体系は、既に完全に確立されている感がある。然し乍ら、PC梁部材の設計手法を概観してみると、その主眼とするところは、緊張鋼材への応力導入と、それに伴う構造全体の短・長期の力学性状の検討が殆ど全てであり、シース（緊張鋼材配置のための）内へのグラウト注入による付着完了後の梁の理論は等閑視されており、検討されて然るべき「曲線形状配筋を有するRC梁部材」としての正当な取り扱い、全くと云っていい程なされていないのが現状のように思われる。

以上のような研究の現況に鑑み、本報告は、補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するRC梁部材の曲げを支配する基本式の定式化を試みたもので、更に有限要素法による二、三の数値計算例を掲げて、この種構造の力学性状について若干の検討・考察を行ったものである。

## 2 補強筋の付着滑りを考慮した場合の曲げ理論

### 2-1 基本仮定事項

理論展開を行うに当たって、次に掲げるような基本仮定事項を設ける。

- ① 梁は材軸に沿って一様外形断面を有するものとし微小変形の仮定が適用できるものとする。
- ② コンクリートは等方弾性体であり、コンクリート断面には変形後も平面保持の仮定が成立する。
- ③ 梁断面には梁丈方向にm層の鉄筋が配筋されており、各鉄筋は材軸に沿って鉛直方向に滑らかな曲線を描いて配筋されている。
- ④ ある位置における各鉄筋層とコンクリートの間には、個々の配筋曲線に沿って付着滑りが生じ、その位置の鉄筋の滑り変位は、平面が保持されるコンクリート部分からの相対的なズレ変位で表示出来る。また付着応力と滑り変位の間には線形関係が成り立つものとする。

## 2-2 変位場、及び歪と応力

### 【変位場】

図1は、梁の断面記号と梁内部に配筋されている任意のi層の鉄筋の設置状況を図示したものである。先の仮定より、この問題を定式化するために設定しなければならない変位場は、梁中央のx軸（材軸）方向の変位uとz方向の鉛直変位w、および断面内にm層配筋されている各鉄筋層の配筋曲線 $\delta_i$ に沿うm個の滑り変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_m$ の計 $(2+m)$ 個の独立変数である。

### 【コンクリートの歪と応力】

梁中央のx軸からzだけ離れた任意位置のコンクリート部分の歪 $\epsilon_c$ は次式で表される。

$$\epsilon_c = \epsilon_0 + z\phi \quad (1)$$

ここに、 $\epsilon_0$ は軸歪、 $\phi$ は曲率であり、それぞれ次のように与えられる。

$$\epsilon_0 = du/dx \quad (2)$$

$$\phi = -d^2w/dx^2 \quad (3)$$

したがって、同じ位置のコンクリートの応力 $\sigma_c$ は下式で表される。

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c \quad (4)$$

但し、 $E_c$ ：コンクリートのヤング係数

### 【鉄筋層の歪と応力】

m層ある鉄筋の内の任意のi層を考える。ある位置におけるこの鉄筋層の配筋曲線方向に沿う歪 $\epsilon_{si}$ は次のように表示することができる。

$$\epsilon_{si} = \epsilon_0 + h_{si}\phi + \epsilon_{ssi} \quad (5)$$

但し、 $\epsilon_{ssi}$ ：i層の鉄筋の配筋曲線に沿う滑り率

$h_{si}$ ：i層の鉄筋の中心軸からの距離

上式中の $h_{si}$ は、図1に示すように梁の中心軸からi層の鉄筋までの距離で、先の仮定よりxの関数として下式で与えられる。

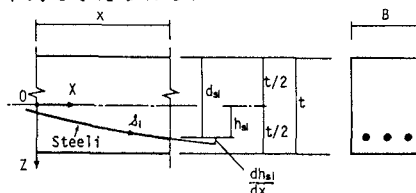


図1 曲線配筋を有するRC梁の鉄筋層iの配筋形状と断面記号

$$h_{si} = g_i(x) \quad (6)$$

また、(5)式中の鉄筋の滑り率  $\epsilon_{ssi}$  は次式で表される。

$$\epsilon_{ssi} = \frac{dS_i}{dJ_i} = \frac{dS_i}{dx} \frac{dx}{dJ_i} = \frac{1}{\sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2}} \frac{dS_i}{dx} \quad (7)$$

ここに、上式中の微分  $dS_i/dx = \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2}$  は、図 2 を参照することによって直ちに求められる。

従って、同じ位置の  $i$  層の鉄筋の応力は、

$$\sigma_{si} = E_{si} \epsilon_{ssi} \quad (8)$$

但し、 $E_{si}$  :  $i$  層の鉄筋のヤング係数

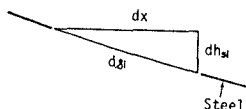


図 2  $dS_i, dh_{si}, dx$  の関係

#### [付着応力]

任意の  $i$  層の鉄筋の付着境界に生ずる付着応力  $\tau_i$  は、先の仮定より次式で与えられる。

$$\tau_i = K_{bi} S_i \quad (9)$$

但し、 $K_{bi}$  :  $i$  層の鉄筋の付着係数

#### 2-3 軸力および曲げモーメント

梁断面の軸力と曲げモーメントは、(1)~(8)式の関係より下式で表される。

$$N = B \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_c dz + \sum \{ A_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} (\sigma_{si} - h_{si} \sigma_c) \} \quad (10)$$

$$M = B \int_{-1/2}^{1/2} z \sigma_c dz + \sum \{ A_{si} h_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} (\sigma_{si} - h_{si} \sigma_c) \} \quad (11)$$

但し、 $B$  : 梁幅、 $A_{si}$  : 鉄筋層  $i$  の断面積

上式中の  $h_{si} \sigma_c$  は  $i$  層の鉄筋と同じ位置のコンクリートの応力であり、鉄筋によるコンクリートの断面欠損を考慮するために必要となるものである。上の二式に(4),(5),(8)式の関係を代入して整理すると下式を得る。

$$N = [A E_c + \sum \{ A_{si}^* E_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \}] \frac{du}{dx} - \sum \{ A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum \{ A_{si} E_{si} \frac{dS_i}{dx} \} \quad (12)$$

$$M = \sum \{ A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} \frac{du}{dx} - [I_0 E_c + \sum \{ A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \}] \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum \{ A_{si} E_{si} h_{si} \frac{dS_i}{dx} \} \quad (13)$$

但し、 $A$  : 梁断面積 ( $A=Bt$ )、 $I_0$  : 無筋梁の断面二次モーメント、 $A_{si}^*$  :  $i$  層の鉄筋の換算断面積  $A_{si}^* = A_{si} (1 - E_c/E_{si})$

#### 2-4 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

補強筋の付着滑りを考慮した場合の R C 部材の全ポテンシャル・エネルギー汎関数は、次式で表示す

ることができる。1), 2), 3)

$$\Pi = (U_{cn} + U_{st} + U_{bs}) - V \quad (14)$$

但し、 $U_{cn}, U_{st}, U_{bs}$  : 内部エネルギー、 $V$  : 外部ポテンシャル・エネルギー

上式中の  $U_{cn}, U_{st}, U_{bs}$  は、それぞれコンクリート、鉄筋、および付着滑りに係る内部エネルギーを表しており、次のように表される。

$$U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-1/2}^{1/2} B E_c \epsilon_c^2 dz dx - \frac{1}{2} \int_0^L \{ \sum A_{si} E_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \epsilon_{si}^2 \} dx \quad (15)$$

$$U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \sum A_{si} E_{si} \epsilon_{si}^2 \} dJ_i \quad (16)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \sum A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \} dJ_i \quad (17)$$

但し、 $L$  : 梁の部材長、 $L_{si}$  : 鉄筋層  $i$  の全長、

$K_{bi}$  : 鉄筋層  $i$  の付着係数、 $A_{bsi}$  : 鉄筋層  $i$  の単位長さ当たりの付着表面積

以上の3式のうち、 $U_{st}$  と  $U_{bs}$  は配筋曲線に沿ってとられた  $J_i$  に関する積分の形で表示されているので、これを図 2 を参照して  $x$  に関する積分の型に変換すると、(16),(17)式は次のようになる。

$$U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \sum A_{si} E_{si} \epsilon_{si}^2 \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} dx \quad (18)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \sum A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} dx \quad (19)$$

従って、(14),(15),(18),(19)式に(1)~(8)式の関係を代入して整理すると、全ポテンシャル・エネルギー汎関数は下式となる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ [A E_c + \sum \{ A_{si}^* E_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \}] \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right. \\ - 2 \left[ \sum \{ A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} \frac{du}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \sum \{ A_{si} E_{si} \frac{dS_i}{dx} \} \right. \\ \left. - h_{si} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dS_i}{dx} \right] + [I_0 E_c + \sum \{ A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \}] \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \\ \left. + \sum \left\{ \frac{A_{si} E_{si}}{\sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2}} \left( \frac{dS_i}{dx} \right)^2 + \sum \{ A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} \right\} \right\} dx \\ - \int_0^L \{ R_u (du/dx) + q_z w \} dx \end{aligned} \quad (20)$$

#### 2-5 支配微分方程式

曲線形状配筋を有する R C 梁の補強筋の付着滑りを考慮した場合の曲げを支配する基礎微分方程式は、上式の汎関数(20)式の第一変分をとることによって得られ、次のようになる。

$$\begin{aligned} (A E_c + \sum \{ A_{si}^* E_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \}) \frac{d^2 u}{dx^2} + \sum \left\{ \frac{A_{si}^* E_{si}}{\sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{du}{dx} \right. \\ \left. - \sum \{ A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} \} \frac{d^3 w}{dx^3} \right. \\ \left. - \sum \{ A_{si}^* E_{si} \frac{dh_{si}}{dx} \sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2} + \frac{A_{si}^* E_{si} h_{si}}{\sqrt{1+(dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \right\} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \left. + \sum \{ A_{si} E_{si} \frac{d^2 S_i}{dx^2} \} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left( A_{si}^2 E_{si} h_{si} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2 \left( A_{si}^2 E_{si} \frac{dh_{si}}{dx} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} \\
& + \frac{A_{si}^2 E_{si} h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{2} \left( A_{si}^2 E_{si} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} \\
& + \frac{2 A_{si}^2 E_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \left( \frac{dh_{si}}{dx} \right)^2 \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{A_{si}^2 E_{si} h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \left( \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \right)^2 \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^3 h_{si}}{dx^3} \\
& - \frac{A_{si}^2 E_{si} h_{si}}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{dh_{si}}{dx} \right)^2 \left( \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \right)^2 \frac{du}{dx} - \frac{1}{2} \left( A_{si}^2 E_{si} h_{si} \frac{d^3 S_i}{dx^3} \right) \\
& - 2 \left( A_{si} E_{si} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 S_i}{dx^2} \right) - \left( A_{si} E_{si} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{d S_i}{dx} \right) \\
& + \left\{ \frac{1}{2} E_c + \frac{1}{2} \left( A_{si}^2 E_{si} h_{si} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \right) \frac{d^4 w}{dx^4} \right. \\
& + 2 \left( A_{si}^2 E_{si} h_{si} \frac{dh_{si}}{dx} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + \frac{A_{si}^2 E_{si} h_{si}^2}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \right) \frac{d^3 w}{dx^3} \\
& + \frac{1}{2} \left( 2 A_{si}^2 E_{si} \left( \frac{dh_{si}}{dx} \right)^2 \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + 2 A_{si}^2 E_{si} h_{si} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \right. \\
& + \frac{4 A_{si}^2 E_{si} h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \left( \frac{dh_{si}}{dx} \right)^2 \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} + \frac{A_{si}^2 E_{si} h_{si}^2}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \left( \left( \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \right)^2 + \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^3 h_{si}}{dx^3} \right) \\
& \left. \left. - \frac{A_{si}^2 E_{si} h_{si}^2}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{dh_{si}}{dx} \right)^2 \left( \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \right)^2 \right) \frac{d^2 w}{dx^2} = q_x \right. \\
& \left. A_{si} E_{si} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} - h_{si} \frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{d^2 S_i}{dx^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{\frac{3}{2}}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{d S_i}{dx} \right) = A_{bsi} K_{bi} S_i \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \right. \\
& \left. \right) \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{\frac{3}{2}}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{d S_i}{dx} = A_{bsi} K_{bi} S_i \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \quad (23)
\end{aligned}$$

但し、 $i=1 \sim m$

### 3 有限要素解析

#### 3-1 有限要素展開のための追加仮定事項

前節 2-1 の基本仮定事項からも推察し得るように、先に導いたこの RC 梁の基礎微分方程式には、補強筋が曲線形状を有することに起因して生ずる、通称“曲げ上げ”と称される鉛直方向の上向きの力の効果は考慮されていない。ここでは、“この曲げ上げ”を考慮することとし、プロトタイプとしての有限要素展開を容易にするため、前節 2-1 の仮定に加えて以下の仮定を追加することとする。

- ① 各鉄筋は、材軸に平行な鉛直平面内に  $x$  に関する 2 次曲線（定式化が煩雑になるが、より高次の曲線型も容易に取り扱うことが可能）で配筋されているものとする。
- ② 鉄筋が曲線形状を有することによって惹起される“曲げ上げ”の効果には、
  - 1) 配筋曲線が曲率を有するための、鉄筋応力に依存する曲率中心方向への“曲げ上げ”（以下ではこれを「補強筋応力に起因する曲げ上げ」と略称）
  - 2) 配筋曲線が傾斜角（材軸との）を有するための、鉄筋からコンクリートへの応力伝達分（付着応力）の鉛直成分としての“曲げ上げ”（以下ではこれを「付着応力に起因する曲げ上げ」と略称）の 2 種があるが、本報告ではこの両者を考慮する。

#### 3-2 有限要素法への定式化

##### (1) 配筋曲線の設定

前項(3-2)の仮定①より、任意の鉄筋層  $i$  の配筋曲線  $h_{si}$  を次式で与える。

$$h_{si} = \bar{a}_i + \bar{b}_i x + \bar{c}_i x^2 \quad (24)$$

但し、 $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$ ：鉄筋層  $i$  の曲線形を決定するための梁の全体座標系に関する定数

##### (2) 変位関数と歪

本報告では、変位  $u, w, S_i$  をそれぞれ以下のように設定する。

$$u = [1 \ x] \{ \alpha_{u1} \ \alpha_{u2} \}^T = [f_u] \{ \alpha_u \} \quad (25)$$

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{ \alpha_{w1} \ \alpha_{w2} \ \alpha_{w3} \ \alpha_{w4} \}^T = [f_w] \{ \alpha_w \} \quad (26)$$

$$S_i = [1 \ x] \{ \alpha_{si1} \ \alpha_{si2} \}^T = [f_s] \{ \alpha_{si} \} \quad (27)$$

但し、 $[f_u], [f_w], [f_s]$ ：それぞれ変位  $u, w, S_i$  の形状関数、 $\{ \alpha_u \}, \{ \alpha_w \}, \{ \alpha_{si} \}$ ：それぞれ変位  $u, w, S_i$  の一般化変位

上式の関係より、これらの各変位の導関数は、

$$u' = du/dx = [0 \ 1] \{ \alpha_u \} = [f_u'] \{ \alpha_u \} \quad (28)$$

$$w' = dw/dx = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \{ \alpha_w \} = [f_w'] \{ \alpha_w \} \quad (29)$$

$$w'' = d^2 w/dx^2 = [0 \ 0 \ 2 \ 6x] \{ \alpha_w \} = [f_w''] \{ \alpha_w \} \quad (30)$$

$$S_i' = dS_i/dx = [0 \ 1] \{ \alpha_{si} \} = [f_s'] \{ \alpha_{si} \} \quad (31)$$

この梁要素の両端の節点ベクトルは、(25)～(27)、および(29)式に、両節点(J,K)の座標(0,  $l$ )を代入することによって得られ次ぎのように表される。

$$\{ \Delta_u \} = \{ u_j \ u_k \} = [C_u] \{ \alpha_u \} \quad (32)$$

$$\{ \Delta_w \} = \{ w_j \ w_j' \ w_k \ w_k' \} = [C_w] \{ \alpha_w \} \quad (33)$$

$$\{ \Delta_{si} \} = \{ S_{ij} \ S_{ik} \} = [C_{si}] \{ \alpha_{si} \} \quad (34)$$

##### (3) 曲げ上げを無視した場合の剛性マトリックス

以上で得た(27)、(28)、及び(30)～(34)式の間係を先に導いた汎関数(19)式に代入し、各節点変位に関して変分をとると、曲げ上げの効果を考慮しない場合の曲線形状配筋を有する RC 梁部材の剛性マトリックスが得られ下式となる。

$$\begin{Bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_w \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_w \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここに、上式中の各部分マトリックスは次のように求められる。

$$[K_{uu}] = [C_u]^T \left\{ A E_c \int_0^l [f_u']^T [f_u'] dx + \sum_{i=1}^m \left[ \int_0^l A_{si}^2 E_{si} h_{si} \sqrt{1 + b_i^2 + 4b_i c_i x + 4c_i^2 x^2} [f_u'] [f_u'] dx \right] [C_u] \right\} [C_u]$$

$$[K_{uw}] = -[C_u']^T \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ A_{si}^2 E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2) / \sqrt{1 + b_i^2 + 4b_i c_i x + 4c_i^2 x^2} [f_u'] [f_w'] dx \right] [C_u] \right\} [C_w]$$

$$\begin{aligned}
[K_{us}] &= [C_s']^T \left\{ \int_0^l E_c \int_0^l [f_s']^T [f_s'] dx \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m \left[ A_{si}^2 E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2)^2 / \sqrt{1 + b_i^2 + 4b_i c_i x + 4c_i^2 x^2} [f_u'] [f_s'] dx \right] [C_{si}] \right\} [C_{si}]
\end{aligned}$$

$$[K_{ss}] = [C_s']^T \left\{ \int_0^l A_{si} E_{si} [f_s'] [f_s'] dx \right\} [C_{si}]$$

$$[K_{ss}] = [C_s^T] \left[ \int_0^L A_{si} E_{si} (1 + b_i^2 + 4b_i c_i x + 4c_i^2 x^2)^{1/2} [f_s]^T [f_s] dx \right. \\ \left. + \int_0^L A_{si} E_{si} \sqrt{1 + b_i^2 + 4b_i c_i x + 4c_i^2 x^2} [f_s]^T [f_s] dx \right] [C_s]$$

$$[K_{ss}] = -[C_s^T] \left[ \int_0^L A_{si} E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2) [f_s]^T [f_s] dx \right] [C_s]$$

但し、 $\varrho$ ：要素長、 $a_i, b_i, c_i$ ： $i$  層の配筋曲線の形状を規定する各要素の局部座標系に関する定数。

### 3-3 補強筋による“曲げ上げ”の算入

前項 3-1 で述べたように、補強筋が曲線形状をもつ場合、外荷重による構造系の変形応答を求める際には、“曲げ上げ”の効果を算入することが必要になる。

“曲げ上げ”による等価荷重ベクトルを  $\{P_{up}\}$  とすると、この場合の梁の剛性方程式は次のように書き下すことができる。

$$[K] \{\Delta\} = \{P\} - \{\bar{P}_{up}\} \quad (36)$$

但し、 $[K], \{\Delta\}, \{P\}$ ：(35) 式の各項の略記号

$$\{\bar{P}_{up}\} = \{0 \ P_{up} \ 0\}^T$$

先の追加仮定より、等価鉛直荷重ベクトル  $\{P_{up}\}$  は次式で表示される。

$$\{P_{up}\} = \{s_P P_{up}\} + \{n_P P_{up}\} \quad (37)$$

但し、 $\{s_P P_{up}\}$ ：補強筋応力に起因する曲げ上げ

$\{n_P P_{up}\}$ ：付着応力に起因する曲げ上げ

ここで留意すべきは、これらの曲げ上げ荷重  $\{P_{up}\}$  が、外荷重  $\{P\}$  によって生ずる補強筋の応力と付着応力によって惹起されること、換言すれば解析前には未知であると云うことである。即ち、剛性方程式 (36) 式は、iteration によって解かれることになる。

#### (1) 補強筋応力に起因する曲げ上げ荷重 $\{s_P P_{up}\}$

##### の評価

任意の  $i$  層の配筋曲線が曲率を有する場合には ( $d^2 h_{si}/dx^2 \neq 0$ )、補強筋の配筋方向分担力によって、曲率中心方向に下式に示す力  $q_{ni}$  が作用する。

$$q_{ni} = F_{sti} \frac{d\theta_i}{dx_i} \quad (38)$$

但し、 $F_{sti}$ ： $i$  層の鉄筋の合力で  $F_{sti} = A_{si} \sigma_{si}$

$\theta_i$ ： $i$  層の配筋曲線の傾斜角  $\theta_i = dh_{si}/dx$

図 3 から知り得るように、この力  $q_{ni}$  の  $z$  方向成分が梁に、“曲げ上げ力”として働くこととなる。この力の  $z$  方向成分と等価な曲げ上げ荷重  $\{s_P P_{up}\}$  は、仮想働の原理を用いて次式で表示することが

出来る。

$$\{s_P P_{up}\} = [C_w^T] \int_0^L \cos \theta_i \frac{d\theta_i}{dx_i} [f_w]^T F_{sti} d\theta_i \quad (39)$$

(5)～(8) 式、および (24)～(34) 式の関係を上式に代入して整理すると、最終的に  $\{s_P P_{up}\}$  は下式となる。

$$\{s_P P_{up}\} = \{s_P P_{up}\} + \{s_P P_{up}\} + \{s_P P_{up}\} \\ = [C_w^T] \left\{ \int_0^L \frac{A_{si} E_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} [f_w]^T [f_s] dx \right\} [C_s^T] \{\Delta_u\} \\ - [C_w^T] \left\{ \int_0^L \frac{A_{si} E_{si} h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} [f_w]^T [f_w] dx \right\} [C_w^T] \{\Delta_w\} \\ + [C_w^T] \left\{ \int_0^L \frac{A_{si} E_{si}}{1 + (dh_{si}/dx)^2} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} [f_w]^T [f_s] dx \right\} [C_s^T] \{\Delta_{si}\} \right\} \quad (40)$$

但し、 $\{\Delta_u\}, \{\Delta_w\}, \{\Delta_{si}\}$ ：繰り返し計算における一ステップ前の各節点変位

#### (2) 付着応力に起因する曲げ上げ荷重 $\{n_P P_{up}\}$

##### の評価

補強筋が梁の材軸に対して傾斜角をもつ場合（配筋形状が曲線である必要はない）には、鉄筋とコンクリートの付着境界に働く配筋方向に平行な付着応力（図 4）の鉛直成分が、梁に“曲げ上げ力”として作用することになる。この等価鉛直荷重  $\{n_P P_{up}\}$  もまた、仮想働の原理を用いて下式で表示される。

$$\{n_P P_{up}\} = [C_w^T] \int_0^L A_{bi} [f_w]^T \sin \theta_i \tau_i d\theta_i \quad (41)$$

但し、 $\tau_i$ ： $i$  層の鉄筋の付着境界に働く付着応力

$\varrho_{si}$ ：要素内の  $i$  層の鉄筋長

上式に (9), (24), (27), (34) 式の関係を用いて整理すると次のようになる。

$$\{n_P P_{up}\} = [C_w^T] \left\{ \int_0^L A_{bi} K_{bi} \frac{dh_{bi}}{dx} [f_w]^T [f_s] dx \right\} [C_s^T] \{\Delta_{si}\} \quad (42)$$

但し、 $\{\Delta_{si}\}$ ：繰り返し計算における一ステップ前の  $i$  層の鉄筋の節点滑り変位

### 4 数値計算例とその考察

曲線形状配筋を有する RC 梁部材の場合、補強筋の付着特性だけでなく、配筋曲線の形状の違いが、その力学性状に大きな影響をおよぼすことが予想される。本報告では、図 5 示す単配筋の RC 梁を対象にして、補強筋の曲線形状、ならびに付着係数が、梁全体の変形・応力性状に如何ような影響を与えるかを調べることにする。ここでは、梁の外形寸法及び使用鉄筋を同一とし、6 種の配筋曲線（2 次曲線）形状（ $de=7, 11, 15, 19, 23, 27$  cm, 但し  $dc=4$  cm=const.）

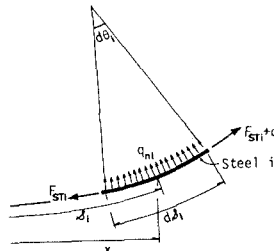


図 3 補強筋応力による曲げ上げ

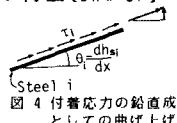


図 4 付着応力の鉛直成分としての曲げ上げ

を設定して、更に各配筋曲線ごとに付着係数を7段階 ( $K_b=1.0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ) に変化させ、総計42例について計算を行った。但し、鉄筋は全て材端で完全に定着されているものとし、付着係数以外の材料定数は一定とする。

図6~11に各配筋曲線ごとの解析結果を掲げた。これら各図の(a),(b)は、ここで設定した7種の付着係数のうちの両極の値に対する、鉛直変位曲線と曲げモーメント(内力として計算される)の分布曲線をそれぞれ無次元化して例示したもので、また、(c),(d)は、7段階すべての付着係数に対応する、鉄筋応力分布曲線と付着応力分布曲線を、それぞれ対比して図示したものである。これらの解析結果は明らかに、材端における鉄筋位置  $d_e$  の値が大きくなり配筋曲線の無次元化湾曲率 ( $=2(d_e-d_c)/L$ ) が増すに

つれて、また、付着係数の増加とともに、“曲げ上げ効果”が顕著となることを示している。特に、外面からみるとこの梁は“完全な静定構造”であるにも拘らず、内力として計算される各曲げモーメント分布曲線の、可成り大きな変動(既往の理論では、これらは全て同一の“単純支持梁の曲げモーメント分布曲線”に一致するはずであり、事実、曲げ上げを考慮しない場合の本解析値は予期した通り同一曲線となる)が示すように、この種のRC梁部材は「内的不静定」とも称すべき特殊な構造形態を有していることを示している。

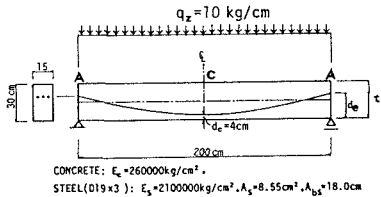
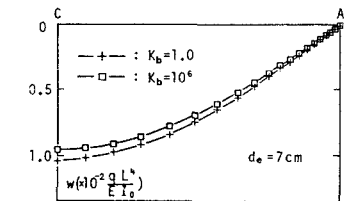
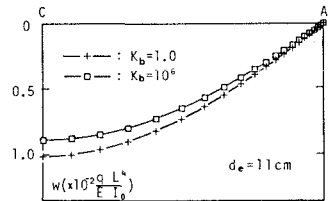


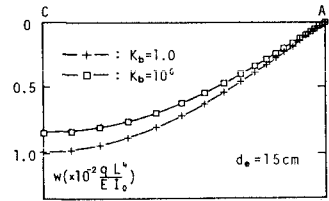
図5 モデル梁の概要



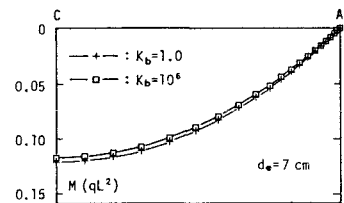
(a) 撓み曲線の比較



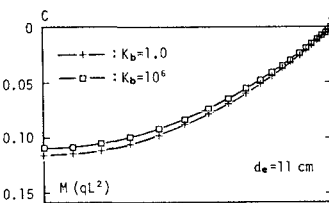
(a) 撓み曲線の比較



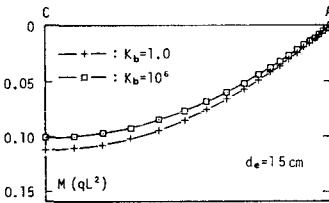
(a) 撓み曲線の比較



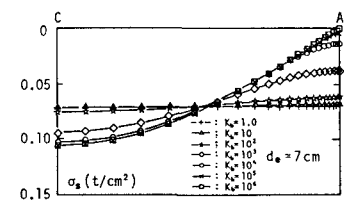
(b) 曲げモーメント曲線の比較



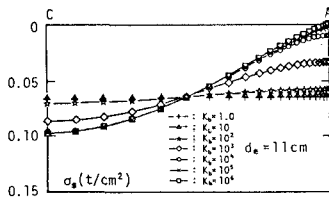
(b) 曲げモーメント曲線の比較



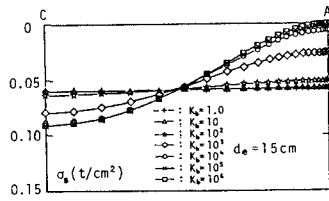
(b) 曲げモーメント曲線の比較



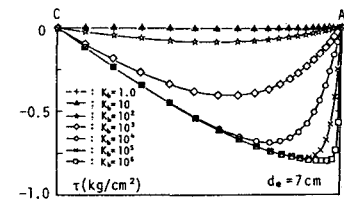
(c) 鉄筋応力曲線の推移



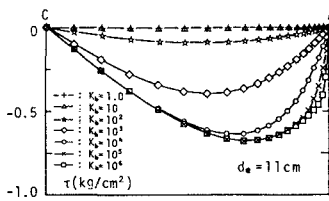
(c) 鉄筋応力曲線の推移



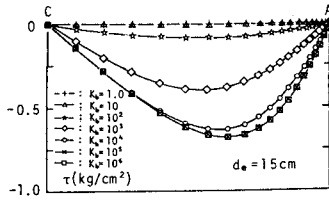
(c) 鉄筋応力曲線の推移



(d) 付着応力曲線の推移



(d) 付着応力曲線の推移

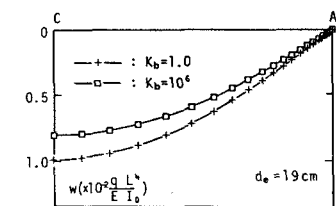


(d) 付着応力曲線の推移

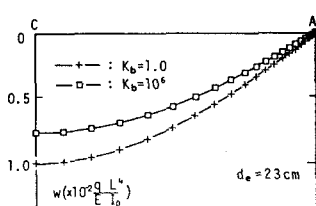
図6  $d_e=7\text{cm}$ の梁の解析結果

図7  $d_e=11\text{cm}$ の梁の解析結果

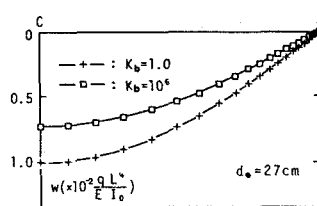
図8  $d_e=15\text{cm}$ の梁の解析結果



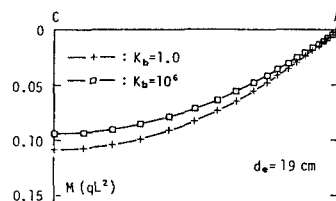
(a) 撓み曲線の比較



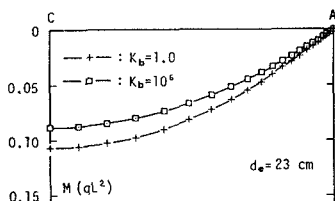
(a) 撓み曲線の比較



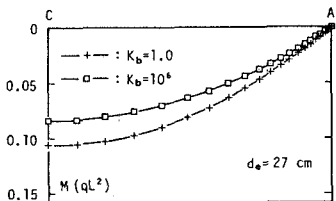
(a) 撓み曲線の比較



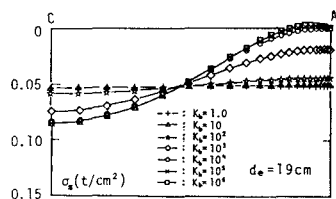
(b) 曲げモーメント曲線の比較



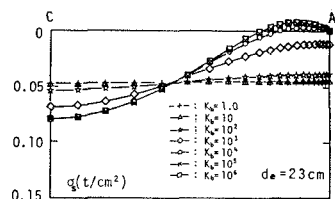
(b) 曲げモーメント曲線の比較



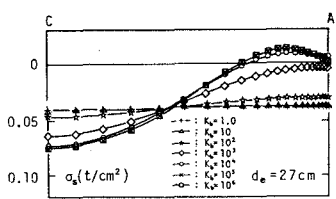
(b) 曲げモーメント曲線の比較



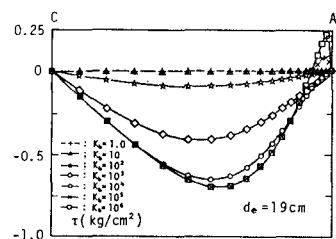
(c) 鉄筋応力曲線の推移



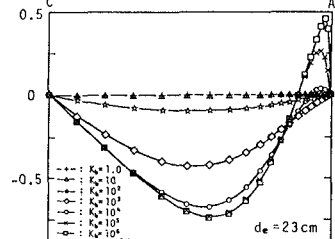
(c) 鉄筋応力曲線の推移



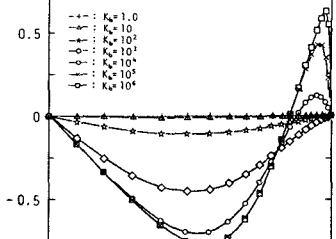
(c) 鉄筋応力曲線の推移



(d) 付着応力曲線の推移



(d) 付着応力曲線の推移



(d) 付着応力曲線の推移

図 9 de=19cmの梁の解析結果

図 10 de=23cmの梁の解析結果

図 11 de=27cmの梁の解析結果

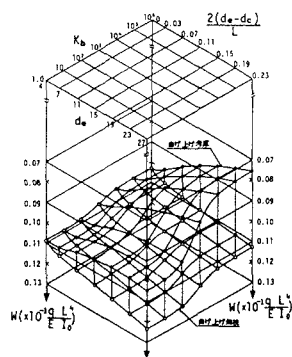


図 12 梁中央点撓みの推移

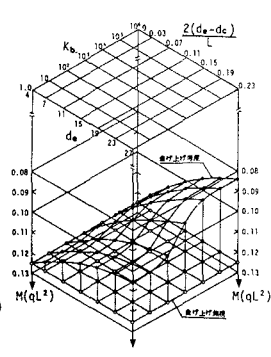


図 13 梁中央点モーメントの推移

図 12, 13 は, 「曲げ上げの考慮の有・無」が解析結果に如何様な影響を及ぼすかを調べるため, 梁中央点における撓みと曲げモーメントの各値を, それぞれ直線配筋の場合<sup>2)</sup>を含めた全計算例について一覧したものである。両図は, 「曲線形状配筋が, R C 梁の有用な補強形式として, 充分に成立し得る可能性のある」ことを示唆している。

【参考文献】

- 1) 上田・土橋：軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析, 土木学会論文集 第360号/V-3, 1985.8
- 2) 上田・土橋：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の曲げ変形解析, 土木学会論文集 第372号/V-5, 1986.8
- 3) 上田・土橋：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床版の変形挙動解析 (その 1. 矩形領域における基礎微分方程式と数値計算例), 日本建築学会構造系論文報告集 第371号, 1987.1
- 4) 横達英雄 監訳：147mmの300mm x 100mm, 鹿島出版会, 1984.9