

I — 25 軸対称衝撃力が作用する2層円柱の応力解析

室蘭工業大学	正 員	松岡 健一
同	同	岸 徳光
同	同	菅田 紀之
日 本 大 学	同	能町 純雄

1. はじめに

異なる弾性定数をもつ材料を同心円状に置いて構成される多層同心円柱の力学的性状を明らかにすることは、鉄筋コンクリート部材や鋼管コンクリート柱のモデルとして興味のある問題である。著者らはこれまで主として2層同心円柱について、これを伝播する弾性波の位相速度の問題や^{1) ~ 3)}、周期的集中力が作用するときの応答を三次元弾性理論により解析しているが⁴⁾、ここではこれを衝撃的な外力が作用する場合に応用しその応答を解析したものである。

2. 基礎変位式

衝撃応答解析を行なう場合、時間に関する解析は、直接積分法、Laplace 変換を用いる方法、Fourier 変換を用いる方法などあるが、ここでは比較的取扱いが簡単であり、これまでの方法を利用できる、Fourier 変換を用いる方法で解析する。すなわち、時間方向には、有限時間内で解析するものとし、変位および応力解を時間方向に有限 sine 変換し次のようにおく、

$$\tilde{f} = \mathbf{S}_t[f] = \int_0^{T_c} f \sin \omega t \, dt \quad \dots (1) \quad \omega = \frac{i\pi}{T_c}, \quad T_c = \text{解析の対称となる時間}$$

とこの逆変換は、

$$f = \frac{2}{T_c} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f} \sin \omega t \quad \dots (2)$$

と表わせる。基礎微分方程式を時間に関して上のように有限 sine 変換を行なえば、その解は、すでに発表した周期的外力を受ける解の重ね合せとして、周期的領域で考えることが出来、次のように示される⁴⁾。

$$\tilde{u} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n C_m (\tilde{A}_{mnr} + \tilde{B}_{mnr}) \cos m\theta \cos Nz \quad \dots (3)$$

$$\tilde{v} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n (\tilde{A}_{mnr} - \tilde{B}_{mnr}) \sin m\theta \cos Nz \quad \dots (4)$$

$$\tilde{w} = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n \tilde{W}_{mnr} \cos m\theta \sin Nz \quad \dots (5)$$

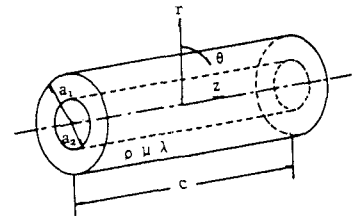


図-1 有限円筒

さらに有限円筒の場合、外径、内径を a_1 、 a_2 、長さを c とすれば、

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mnr} = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{N_\nu} \chi_{\nu\mu}^{(0)}(N_\nu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} + (m+1) A_{mnk} + (m-1) B_{mnk} - \frac{N}{2} E_{mnk} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_\nu} \chi_{\nu\mu}^{(0)}(N_\nu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{\nu\mu}^{(0)}(N_\alpha r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} + N E_{mnk} \right\} \right\} \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mnr} = & \sum_{k=1}^2 \left\{ -\frac{1}{N_\nu} \chi_{\nu\mu}^{(0)}(N_\nu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mnk} + (m+1) A_{mnk} + (m-1) B_{mnk} + \frac{N}{2} E_{mnk} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\mu N^2}{\rho \omega^2} \left\{ \frac{1}{N_\nu} \chi_{\nu\mu}^{(0)}(N_\nu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{\nu\mu}^{(0)}(N_\alpha r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} + N E_{mnk} \right\} \right\} \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{mnr} = & \sum_{k=1}^2 \left\{ G_{\nu\mu}^{(0)}(N_\nu r) E_{mnk} - \frac{2\mu N}{\rho \omega^2} \left\{ G_{\nu\mu}^{(0)}(N_\nu r) - G_{\nu\mu}^{(0)}(N_\alpha r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1) A_{mnk} - (m-1) B_{mnk} + N E_{mnk} \right\} \right\} \\ & \dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 $c_0 = 1/2$, $c_m = 1$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$), $N = n\pi/c$ であり、 $N_\mu^2 = N^2 - \rho\omega^2/\mu$, $N_\alpha^2 = N^2 - \rho\omega^2/(2\mu + \lambda)$ である。また、式中の関数 G , χ は

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(0)}(Nr) &= \frac{R_{m,n}^{(0)}(Nr)}{R_{m,n}^{(0)}(Na)} & \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m+1,n}^{(k)}(Nr)}{R_{m,n}^{(k)}(Na)} & \chi_{ms}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m-1,n}^{(k)}(Nr)}{R_{m,n}^{(k)}(Na)} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

$$R_{j,m}^{(0)}(Nr) = I_j(Nr)K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1})K_j(Nr)$$

円柱の場合は、式(5)～(7)で $a_2 = 0$ とすることにより与えられるが、詳しいことは文献(4)に示してある。

3. 境界条件

弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒によって構成される二層円柱の動的応答は、2. で求めた円筒の解と円柱の解を境界条件が満足するように重ね合せて解析することができる。

いま、円筒について添字 1、円柱について添字 2 で表すものとする。円筒と円柱の境界条件を考えるに先だち、式(12)、(13)の関係から次の適合条件を満足しなければならない。

円筒に対して

$$a_k A_{mk,1} = \tilde{A}_{mr,1})_{r=a_k} \quad \dots (10) \quad a_k B_{mk,1} = \tilde{B}_{mr,1})_{r=a_k} \quad \dots (11)$$

円柱に対して

$$a_2 A_{m1,2} = \tilde{A}_{mr,2})_{r=a_2} \quad \dots (12) \quad a_2 B_{m1,2} = \tilde{B}_{mr,2})_{r=a_2} \quad \dots (13)$$

次に境界条件を考えると

$r = a_1$ における条件：円筒の外側に半径方向の衝撃的な力が作用するものと考えと

$$\sigma_{r,1})_{r=a_1} = p(\theta, z, t) \quad \dots (14) \quad \tau_{r\theta,1})_{r=a_1} = 0 \quad \alpha_{m1,1} = 0 \quad \dots (15)$$

$$\tau_{rz,1})_{r=a_1} = 0 \quad \dots (16)$$

$r = a_2$ における条件：円筒と円柱の境界面で変位と応力が連続している場合と、境界面でせん断力が存在しない場合が考えられるが、ここでは前者の条件によるものとする

$$u_1)_{r=a_2} = u_2)_{r=a_2}, \quad v_1)_{r=a_2} = v_2)_{r=a_2}, \quad A_{m2,1} = A_{m1,2}, \quad B_{m2,1} = B_{m1,2} \quad \dots (17)$$

$$w_1)_{r=a_2} = w_2)_{r=a_2}, \quad E_{m2,1} = E_{m1,2} \quad \dots (18) \quad \sigma_{r,1})_{r=a_2} = \sigma_{r,2})_{r=a_2}, \quad \beta_{m2,1} = \beta_{m1,2} \quad \dots (19)$$

$$\tau_{r\theta,1})_{r=a_2} = \tau_{r\theta,2})_{r=a_2}, \quad \alpha_{m2,1} = \alpha_{m1,2} \quad \dots (20) \quad \tau_{rz,1})_{r=a_2} = \tau_{rz,2})_{r=a_2} \quad \dots (21)$$

となる。以上の条件から未知係数を求め、応答解析を行うこととなる。

4. 数値計算例

数値計算例として、図-2 のように軸方向の分布巾が c_0 で、円周方向には一様に分布し、载荷時間 $2T_1$ の sine 半波の衝撃的外力を受ける、単純支持された二層円柱について考える。荷重条件は軸対称であるから、級数 m については $m = 0$ のみ、 n については奇数のみを取れば良いこととなる。

解析の対象とする二層円柱は、Case-I として $E_2/E_1 = 7.0$, $\nu_1 = 1/6$, $\nu_2 = 0.3$, $\rho_2/\rho_1 = 3.2$, $c/a_1 = 10.0$, $a_2/a_1 = 0.25$ 、Case-II として $E_1/E_2 = 7.0$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 1/6$, $\rho_1/\rho_2 = 3.2$, $c/a_1 = 10.0$, $a_2/a_1 = 0.9$ とする。また、荷重は $c_0/a_1 =$

1.0 , $T_1/t_0 = 0.05$, $T_c/t_0 = 3.0$ (ただし、 t_0 は円筒部と円柱部の材料のせん断波速度のうち遅い方のせん断波速度が、円柱の軸方向に往復する時間であり $t_0 = 2c/V_s = 2c/\sqrt{\rho/\mu}$) として、 n

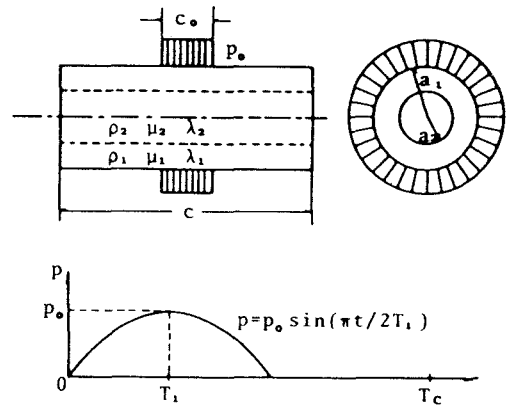
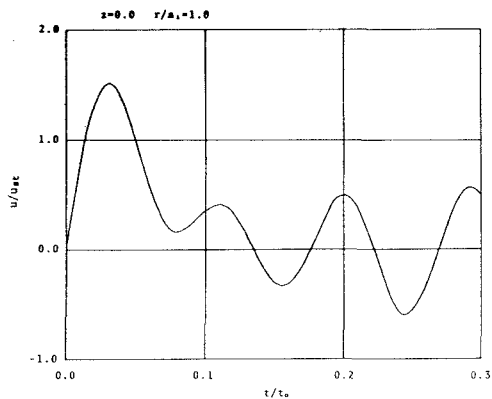
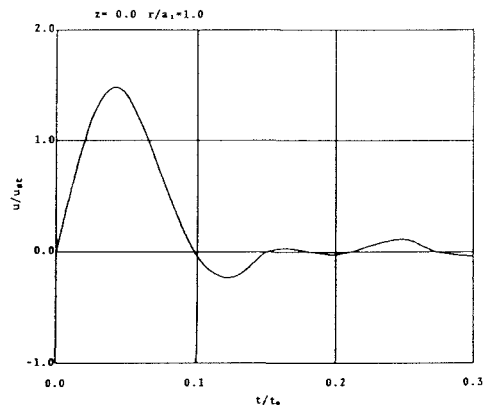


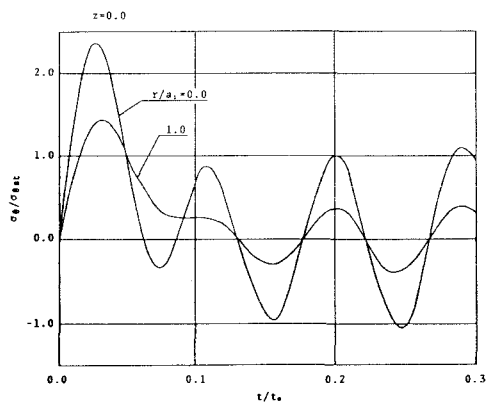
図-2 二層円柱及び荷重状態



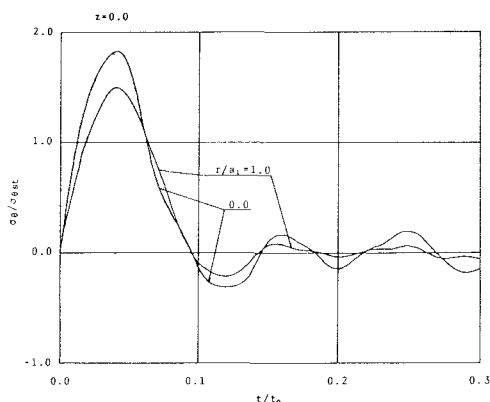
図一3 変位 u の応答倍率 (Case-I)



図一4 変位 u の応答倍率 (Case-II)



図一5 応力 σ_z の応答倍率 (Case-I)



図一6 応力 σ_z の応答倍率 (Case-II)

を35項、 i を200項と解析した。

図一3～6は、変位および応力の時間応答であり、横軸には t/t_0 をとり、縦軸は静的な変位および応力との比をとって示してある。

図一3および4は、 $z = 0$ 、 $r/a_1 = 1.0$ すなわち円柱表面での半径方向変位 u の時間応答を示したものである。Case-I、IIともに $t/t_0 = 0.0$ で変位速度があり $t/t_0 \approx 0.03$ までは荷重の増加とともに変位も増加している。Case-I (図一3)では、 $t/t_0 \approx 0.075$ 付近で、内部の円柱表面からの反射の影響と思われる変化が現われ、 $t/t_0 \approx 0.15$ からは自由振動に移っているようであり、その振巾は静的変位の約6割に達している。また、Case-II (図一4)では、内部境界からの影響は少なく、 $t/t_0 \approx 0.15$ からはやはり自由振動に移っているようであるが、その振巾はかなり小さい。

図一5および6には、 $z = 0.0$ で、 $r/a_1 = 0.0$ と 1.0 での周方向応力 σ_θ の時間応答を示した。半径方向変位 u と同様の傾向を示しているが、応答倍率の最大値はいずれの場合も $r = 0$ の方が大きくなっている。Case-I (図一5)では、 $r/a_1 = 1.0$ の点で、 $t/t_0 \approx 0.075$ 付近でやはり内部の円柱面からの反射波の影響が現われており、 $t/t_0 \approx 0.15$ から自由振動へ移行している。Case-II (図一6)では、内部境界の影響は変位より大きく、自由振動へ移行後も複雑に影響している様子が見られる。

また、自由振動の周期 T はCase-I、IIとも $T \approx 0.09 t_0$ であり、これは、それぞれ対応する2層円柱を伝わる波長 $2L_0$ の縦波動の位相速度から得られる周期に対応している。

図一7および8は、円柱表面の半径方向変位 u の軸方向分布を示したものである。横軸は z/a_1 を縦軸は半径方向変位を $p_0 a_1 / E$ で無次元化して示している。Case-I (図一7)では、載荷点付近で変

位が大きいことは当然として、載荷点付近以外でも割合大きな変位（載荷点での最大変位の約3割位）を生じており、 $t/t_0 > 0.1$ では全体的な変位を生じ振動していることがわかる。Case II（図-8）では、解析した全時間に恒って、変位は載荷点付近に集中し、変形は局部的である。

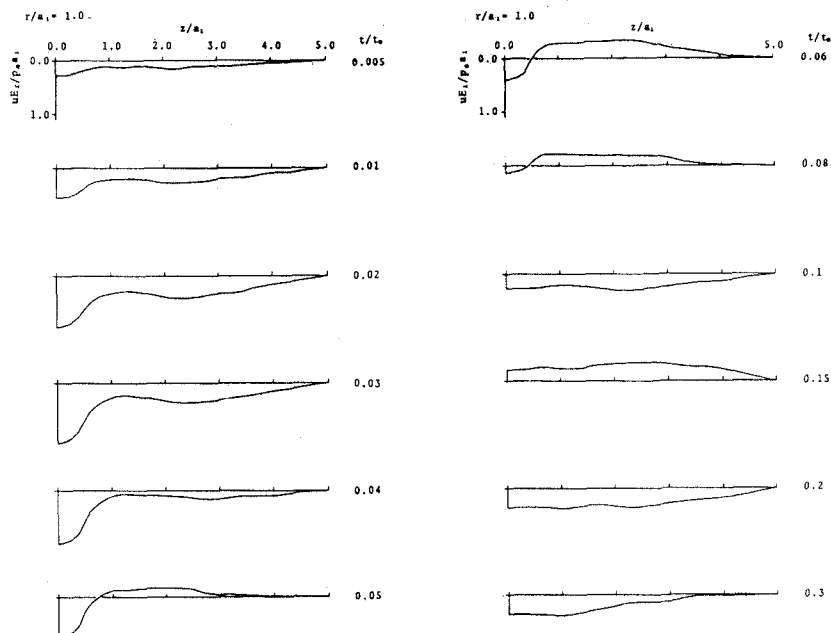


図-7 半径方向変位 u の軸方向分布 (Case I)

4. まとめ

2層円柱に、衝撃的外力が作用したときの応答問題を、時間に関して Fourier 変換し解析した。初期条件として変位速度等が存在する場合の解析を行なったことになるが、数値計算結果からは

i) 半径方向変位

は Case I, II とも最大応答倍率が約 1.5 となること。

ii) 周方向の応力

比は中心部で大きくなり Case I, II では大きさがかなり異なること。などが明らかとなった。

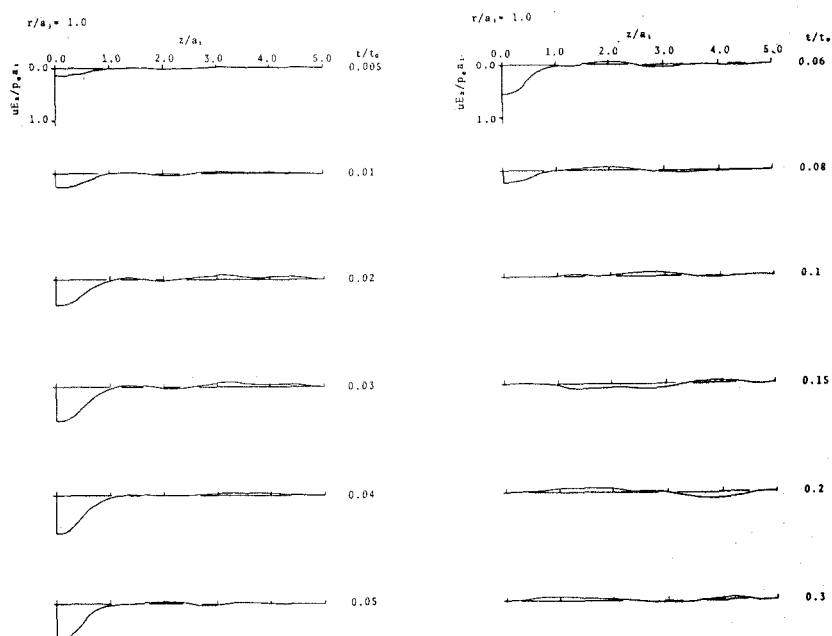


図-8 半径方向変位 u の軸方向分布 (Case II)

参考文献

- 1) 松岡・能町; 土木学会北海道支部論文報告集, 第35号, pp.94~97, 1979.
- 2) 松岡・菅田・能町・木田; 構造工学論文集, Vol.32A, pp.641~648, 1986.
- 3) 松岡・菅田・岸・能町; 土木学会第41回年次学術講演概要集, 第1部, pp.733~734, 1986.
- 4) 菅田・松岡・岸・能町; 土木学会北海道支部論文報告集, 第42号, pp.73~78, 1986.