

I—23 任意角度で入射する弾性波を受ける円形トンネルの動的応答解析

室蘭工業大学大学院	学生員	天野 俊哉
室蘭工業大学	正 員	松岡 健一
室蘭工業大学	正 員	岸 徳光
日本大学生産工学部	正 員	能町 純雄

1. まえがき

弾性体中にある円形トンネルや埋設管が地震波などの弾性波動を受ける時の動的挙動を知ることは興味ある問題である。既に著者らはトンネルや埋設管を単純な3次元モデルとして弾性体中にある厚肉円筒を仮定し、その円筒の軸線に角度をもって入射し、伝播するRicker Waveletによる弾性体部の動的応答を解析したが¹⁾、本研究はさらに、弾性体と円筒の弾性定数比、Ricker Waveletの入射角を変化させた時の円筒部の応力に注目して、解析検討を行ったものである。

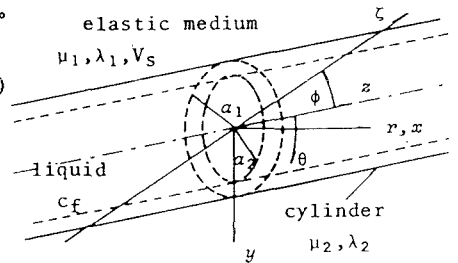
2. 入射波および基礎変位式

Ricker Wavelet は時間の関数として次のように表される²⁾。

$$A_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} U_0 (\pi^2 \tau^2 - \frac{1}{2}) \exp[-\pi^2 \tau^2] \quad , \quad \tau = t/t_p$$

tp: 周期 $\frac{\sqrt{\pi}}{4} U_0$: 最大変位 (1)

図一1に示すように、無限弾性体中におかれた厚肉円筒の円筒軸方向にz軸、半径方向にr軸、円周方向にθ軸をとり、図のx-z平面に平行にz軸と角度φをなす方向からせん断波が入射する定常状態を考えるものとする。入射波の角速度ω、進行速度Vsとして、円柱座標系に座標変換し時間についてFourier変換し、その逆変換をとると次のようになる。



図一1 無限弾性体中の厚肉円筒

$$A_0(t, r, \theta, z) = \frac{tp}{4\pi} U_0 \int \xi^2 \exp[-\xi^2 + i\omega\{t - (z \cos \phi - r \cos \phi \sin \theta)/V_s\}] d\omega \quad , \quad \xi = \omega tp / (2\pi) \quad (2)$$

従って、定常波動伝播の計算で、ωのときの入射波の振幅を $tp U_0 \xi^2 \exp[-\xi^2]/4\pi$ として周波数領域で重ね合わせることにによりRicker Waveletが入射するときの応答を計算することができる。

解析理論は以前にも発表しているので³⁾、ここでは特に必要なものを掲載する。

入射波による円柱座標 r, θ, z 方向の各変位成分、 $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, $w^{(0)}$ は (2) 式より次のようになる。

$$u^{(0)} = A_0 \cos \phi \cos \theta, \quad v^{(0)} = A_0 \cos \phi \sin \theta, \quad w^{(0)} = A_0 \sin \phi \quad (3)$$

一方、入射波によって引きおこされる円筒の変位および応力は定常状態を仮定しているので

$$f = \tilde{f} \exp[i(\omega t - N_s z)], \quad N_s = \omega \sin \phi / V_s \quad (4)$$

の形で与えることができる。(4)式を考慮し、波動方程式をFourier・Hankel変換することにより定常散乱波の変位式は、次のように求められる。

$$u^{\mu} = \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_s z)] \quad (5)$$

$$v^{\mu} = \sum_m C_m (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m \theta \exp[i(\omega t - N_s z)] \quad (6)$$

$$w^{\mu} = \sum_m C_m \tilde{W}_{mr} \cos m \theta \exp[i(\omega t - N_s z)] \quad (7)$$

ここで、 $C_0 = 1/2\pi$, $C_m = 1/\pi$ ($m \neq 0$) である。

さらに、μ, λをLameの定数、ρを円筒の密度とし $N_{S\mu}^2 = N_s^2 - \rho \omega^2 / \mu$, $N_{S\lambda}^2 = N_s^2 - \rho \omega^2 / (2\mu + \lambda)$, とすれば、

(5) ~ (7) 式中の $\tilde{A}_{mr}$, $\tilde{B}_{mr}$, $\tilde{W}_{mr}$ は

$$\tilde{A}_{mr} = \sum_k \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} \{ \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iN_S E_{mk}/2 \} + (\mu N_S^2/\rho\omega^2) \{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} \right. \\ \left. - N_{S\alpha} \chi_{mp}^{(k)}(N_{S\alpha}r)/N_S^2 \} \{ B_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk} \} \right\} \quad (8)$$

$$\tilde{E}_{mr} = \sum_k \left\{ -\chi_{ms}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} \{ \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk}/2 \} + (\mu N_S^2/\rho\omega^2) \{ \chi_{ms}^{(k)}(N_{S\mu}r)/N_{S\mu} \right. \\ \left. - N_{S\alpha} \chi_{ms}^{(k)}(N_{S\alpha}r)/N_S^2 \} \{ B_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iN_S E_{mk} \} \right\} \quad (9)$$

$$\tilde{W}_{mr} = \sum_k \left\{ \frac{d_m^{(k)}(N_{S\alpha}r)E_{mk} - i(2\mu N_S/\rho\omega^2) \{ G_m^{(k)}(N_{S\alpha}r) - G_m^{(k)}(N_{S\mu}r) \} \{ B_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \\ \left. + iN_S E_{mk} \} \right\} \quad k=1, 2. \quad (10)$$

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr)K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1})K_j(Nr), \quad j=m-1, m, m+1, \quad a_0=a_2 \quad (11)$$

$$G_m^{(k)}(Nr) = R_{m,m}^{(k)}(Nr)/R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)/R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \quad (12) \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)/R_{m,m}^{(k)}(Na_k)$$

ただし、 I 、 K は変形第一種および第二種の Bessel 関数である。係数 α 、 β 、 A 、 B 、 E は、円筒の内外面の変位および応力が与えられる未知量である。

上式(8)～(10)は円筒に対する変位式であるが、円孔を有する無限体を伝播する散乱波の変位式は、同じように求められ、これらの式で $a_1 = \infty$ とし、 $k=2$ のもののみを考慮することで与えられる。この場合、式(8)～(10)の関数 G 、 χ は次のように表される。

$$G_m(Nr) = K_m(Nr)/K_m(Na) \quad \chi_{mp}(Nr) = -K_{m+1}(Nr)/K_m(Na) \quad \chi_{ms}(Nr) = -K_{m-1}(Nr)/K_m(Na) \quad (13)$$

また、燃料輸送用の埋設管なども考慮して、液体で円筒が満たされた場合の解析も行うこととする。

圧縮性液体の変位・圧力を示す⁴⁾と次のようになる。

$$u_f = \sum_m \{ N_f \chi_{mp}^f(N_f r) + \frac{m}{r} G_m^f(N_f r) \} \phi_a \cos m\theta \exp[i(\omega t - N_S z)] \quad (14)$$

$$P_f = \rho_f \omega^2 \sum_m G_m^f(N_f r) \phi_a \cos m\theta \exp[i(\omega t - N_S z)] \quad (15)$$

$$G_m^f(N_f r) = I_m(N_f r)/I_m(N_f a_2) \quad \chi_{mp}^f(N_f r) = I_{m+1}(N_f r)/I_m(N_f a_2) \quad (16)$$

$$N_f^2 = N_S^2 - \omega^2/c_f^2 \quad \rho_f: \text{液体の密度} \quad c_f: \text{音波の速度} \quad \phi_a: \text{未知定数}$$

3. 境界条件

入射波を受ける弾性体中の円筒の動的応答は、上で求めた円孔を有する無限体と、円筒の変位式を円筒の境界条件を満足するように重ね合わせて解析することができるが、 A 、 B は式(8)～(10)の関係から次の適合条件を満足しなければならない。

$$A_m^{(1)} = \tilde{A}_{mr}^{(1)}|_{r=a_1}/a_1 \quad B_m^{(1)} = \tilde{B}_{mr}^{(1)}|_{r=a_1}/a_1 \quad A_{mk}^{(2)} = \tilde{A}_{mr}^{(2)}|_{r=a_k}/a_k \quad B_{mk}^{(2)} = \tilde{B}_{mr}^{(2)}|_{r=a_k}/a_k \quad (17)$$

i) 円筒の外表面($r=a_1$)で変位および応力が連続な場合

$$\sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(1)}|_{r=a_1} = \sigma_r^{(2)}|_{r=a_1} \quad \tau_{r\theta}^{(0)} + \tau_{r\theta}^{(1)}|_{r=a_1} = \tau_{r\theta}^{(2)}|_{r=a_1} \quad \tau_{rz}^{(0)} + \tau_{rz}^{(1)}|_{r=a_1} = \tau_{rz}^{(2)}|_{r=a_1} \\ u^{(0)} + u^{(1)}|_{r=a_1} = u^{(2)}|_{r=a_1} \quad v^{(0)} + v^{(1)}|_{r=a_1} = v^{(2)}|_{r=a_1} \quad w^{(0)} + w^{(1)}|_{r=a_1} = w^{(2)}|_{r=a_1} \quad (18)$$

ii) 円筒の内面($r=a_2$)

a) 中空の場合

$$\tau_{r\theta}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \tau_{rz}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \sigma_r^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad (19)$$

b) 液体で満たされた場合

$$\tau_{r\theta}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \tau_{rz}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad \sigma_r^{(2)}|_{r=a_2} = -P_f \quad u^{(2)}|_{r=a_2} = u_f \quad (20)$$

4. 数値解析結果と考察

数値計算例として、円筒の内外径比 $a_2/a_1 = 0.9$ 、ポアソン比 $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.25$ 、密度比 $\rho_2/\rho_1 =$

1.0、 $t=0$ 、入射波の周期 $tp=5\pi$ に対して、円筒と無限弾性体の弾性定数比 $\mu_2/\mu_1=10, 100, 1000$ 、入射角 $\phi=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 83^\circ$ 、円筒内面の条件を変えて(液体の有無、 $\rho_f/\rho_1=0.5$ 、 $C_f/Vb=10.0$)解析を行い結果を図-2～13に示した。図は、円筒内外面の周方向応力の分布を示しているが、縦軸は全て、応力を弾性定数比で除した値をとり示した。

1) 入射角の変化に対する考察

円筒と弾性体の弾性定数比 $\mu_2/\mu_1=100$ とし、入射角を変化させて解析した結果の一部を図-2～9に示した。図-2～5は、円筒内外面の周方向応力の軸方向分を示したものである。

図-2は円筒外面の $\theta=0^\circ$ における値であるが、 $\phi=0^\circ$ では $z=0$ を中心とした対称形になっていて、他のものも $\phi=83^\circ$ を除いて対称軸は違うが、対称に近い。円筒内面の $\theta=0^\circ$ における値は図-3に示したが、円筒の外面と比べて $\phi=0^\circ$ では同じ値をとっているが他の線は、正負を逆にした値をとり、その値も小さい。また、 $\phi=30^\circ$ で $z=-2$ 付近での応力の乱れは反射波によるものと考えられる。同じように $\theta=180^\circ$ の値を図-4、5に示した。円筒外面(図-4)では、 $\theta=0^\circ$ のものとは比べて値は小さいが同じ結果が得られた。ただし $\phi=0^\circ$ では正負逆になっている。円筒内面(図-5)では、円筒外面の場合とは逆に $\theta=0^\circ$ のものとは比べて値は大きくなっており、また $\phi=0^\circ$ では正負逆になっている。

図-6～9は、円筒内外面の周方向応力の円周方向分布を示したものである。図-6、7は、 $z/a_1=-4.0$ での円筒内外面の値を示している。図-6では、各入射角で同じような値をとるが、 $\theta=90^\circ$ 付近で最大値をとる。図-7も同様のことがいえるが、図-6と比べれば正負逆で最大値も大きくなっている。図-8、9は、 $z/a_1=4.0$ での円筒内外面の値を示している。図-8は、図-6と比べれば応力の現れ方逆で値も少し大きくなっている。図-9

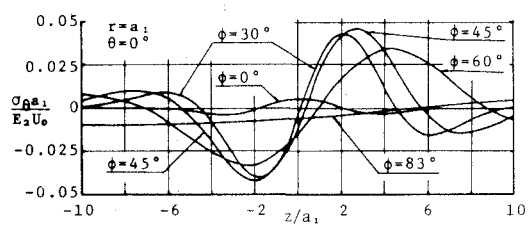


図-2 円筒の周方向応力の軸方向分布(入射角が変化)

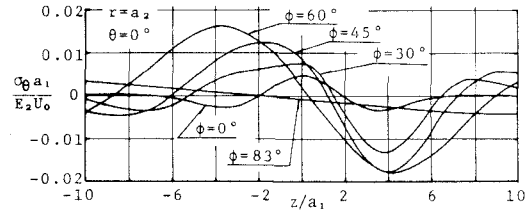


図-3 円筒の周方向応力の軸方向分布(入射角が変化)

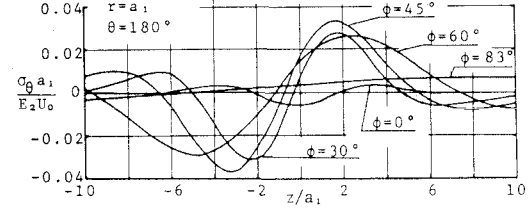


図-4 円筒の周方向応力の軸方向分布(入射角が変化)

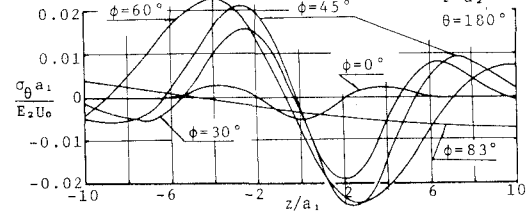


図-5 円筒の周方向応力の軸方向分布(入射角が変化)

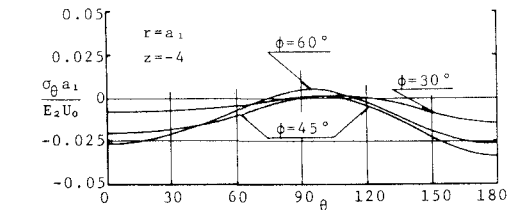


図-6 円筒の周方向応力の周方向分布(入射角が変化)

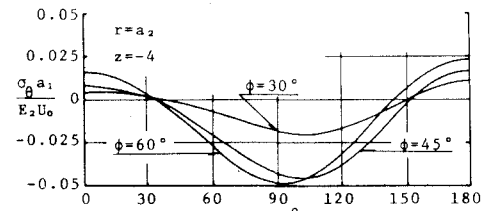


図-7 円筒の周方向応力の周方向分布(入射角が変化)

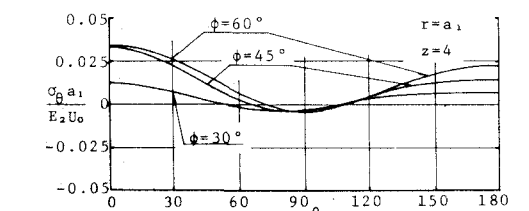


図-8 円筒の周方向応力の周方向分布(入射角が変化)

も、図-7を正負逆にした値になっている。

2) 弾性定数比の変化に対する考察

入射角 $\phi=45^\circ$ 、円筒と弾性体の弾性定数比を10, 100, 1000と変化させて解析した場合のものを図-10~13に示したが、同時に液体で満たされている場合についても破線で示した。図の横軸は、 z 軸を示している。図-10で、弾性定数比による応力集中の違いはみられないが、応力を弾性定数比で除した値は比が大きくなれば小さくなっている。比が小さい時、液体の影響が現れるが、(液体が無い時に比べて、大きい値をとる。)比が大きくなっていくと液体の影響が見られなくなる。図-11では、図-10と比べて $\mu_2/\mu_1=10$ のときは、値は小さいが同じ挙動を示すが、比が大きくなると正負逆の挙動を示している。図-12では、図-10と比べて値の大きさは同じくらいだが、全体的に左へ移動した図になっている。図-13でも、図-11と比べて全体的に左へ移動している。値は $\mu_2/\mu_1=100$ を除いては小さくなっている。

5. まとめ

Ricker Waveletを受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答問題を取り扱い、円筒の周方向応力について若干の数値解析を行い結果を考察したが、このことから次のようなことがわかった。

- 1) 入射角の変化によって円筒は、入射角が極端に大きくならない限り、応力応答の様子は同じ結果になるが、角度が小さい方が応力の現れる範囲が小さくなり、反射波の響影を受けやすくなる。
- 2) 円筒の内面と外面では、弾性定数比が小さく、入射角 ϕ が小さい場合を除き、正負逆の応答を見せる。
- 3) 弾性定数比が大きくなれば応力も大きくなるが、分布の形状にはあまり変化はみられない。
- 4) 液体で満たされた場合は、液体が無い場合より応力の値は大きいが、弾性定数比が大きくなると変化はだんだんみられなくなる。

* 参考文献 *

- 1) 天野・松岡・吉田・能町：土木学会北海道支部論文報告集，第42号，pp.69~72, 1986
- 2) 丹羽・廣瀬：土木学会論文報告集，第337号，pp.57~66, 1983
- 3) 松岡・能町・岸：構造工学論文集，Vol.31A，pp.465~472, 1985
- 4) 坂下・松岡・能町：土木学会北海道支部論文報告集，第32号，pp.155~160, 1976

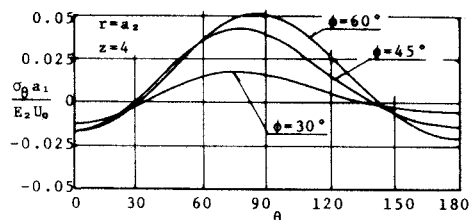


図-9 円筒の周方向応力の周方向分布(入射角が変化)

————— : Empty Bore
 - - - - - : Liquid Filled Bore

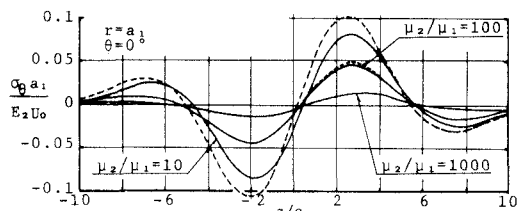


図-10 円筒の周方向応力の軸方向分布(弾性定数比が変化)

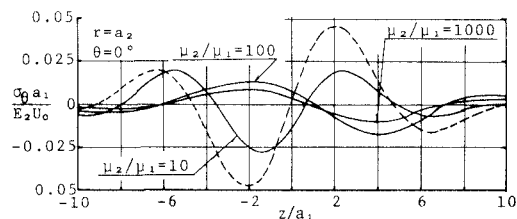


図-11 円筒の周方向応力の軸方向分布(弾性定数比が変化)

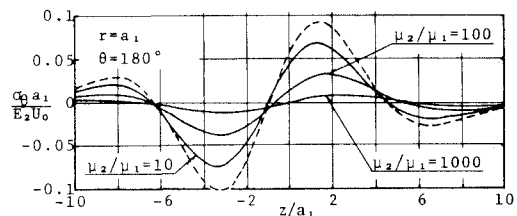


図-12 円筒の周方向応力の軸方向分布(弾性定数比が変化)

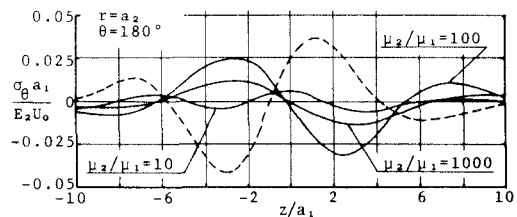


図-13 円筒の周方向応力の軸方向分布(弾性定数比が変化)