

## I—2| 応答スペクトル解析におけるCQC法の適用

中央コンサルタンツ(株)\* 正員 松井義孝

### 1. まえがき

橋梁の耐震設計にあたっては、地形、地質の条件、橋の構造特性、既応の震害経験、橋の重要度等により震度法及び修正震度法の様な静的解析により設計を行なっている。

更に、複雑な挙動を示す構造や長周期な橋梁について、動的解析により構造物の安全性を検証するものである。動的解析は、道路橋示方書によると平均応答スペクトル法と時刻歴応答解析に大別できる。ここでは、最も一般的に用いられている応答スペクトル法について述べてとりわけRMS法(SRSS法)に代わるCQC法の適用について述べる。

CQC法は、すべてのモード連成項の結合として、モードの相関性とモードベクトルの符号を正確に評価できる有効な手法である。又、固有値接近及びモード連成の影響として問題が生じる様な場合、概略的に判断する手法として固有値が算出された時点で、各モードの角速度比を見比べながらモード相関係数 $\rho_{ij}$ の影響が大きければCQC法を選択すべく、判断図の利用法を提案する。

### 2. 応答スペクトル法

線形解析における実用的解析は、Fig-1の様に分類できる。線形的な場合入力地震動が適正であるならば、応答値に大差ないが、逆に電算コストでは、時刻歴応答解析に比べて応答スペクトル法の方が低価格である。応答スペクトル法では、モーダルアナリシス法を用いて次に示す様な解析法がある。

- ①単純和法 ;  $\{U_i \max\} = \{ \sum_{j=1}^n U_{ij} \}$
- ②絶対値和法 ;  $\{U_i \max\} = \{ \sum_{j=1}^n |U_{ij}| \}$
- ③RMS法(SRSS法) ;  $\{U_i \max\} = \{ \sqrt{\sum_{j=1}^n U_{ij}^2} \}$
- ④CQC法 ;  $\{U_i \max\} = \{ \sqrt{\{U_i\}^T [\rho] \{U_i\}} \}$

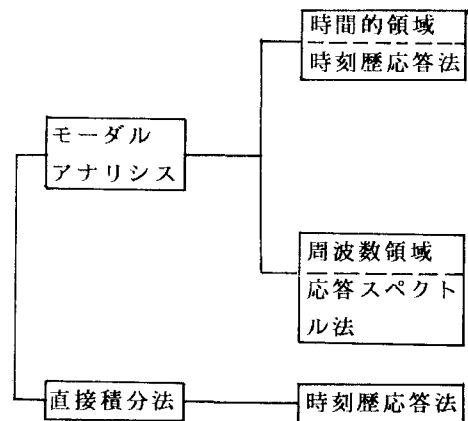


Fig.1 Division of Dynamic Analysis

この4つの方法では、②の絶対値和法が過大評価をうけ、③のRMS法が一般的に用いられている。①、②は現在用いられていない解析法であり、モード連成がある様な場合、CQC法が良い。

\*.....旧(株)橋梁設計事務所

### 3. モーダル法におけるCQC法について

モーダルアナリシスは、構造が有している固有の振動モードの重ね合わせによって動的応答を求める方法である。まず固有値特性を求める。

$$[M]\ddot{U} + [K]U = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\{u\} = \{\phi\} \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots (2)$$

(2)式を (1)式に代入すると

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \phi \cdot e^{i\omega t} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

$e^{i\omega t} \neq 0$  であるから

$$([K] - \omega^2 [M]) \phi = 0 \quad \dots\dots (4)$$

$\phi = 0$  でない解が存在する為には、次の関係が成立しなければならない。

$$|\lambda M + K| = 0 \quad \lambda = -\omega^2 \quad \dots\dots (5)$$

(5) 式は特性方程式であり、その根、 $\lambda$ を固有値といい、 $\phi$ を固有ベクトルとする固有値問題として解き、応答スペクトルを用いて応答値を計算する。

強制振動の運動方程式は、式(6)であり

$$[M]\ddot{U} + [C]\dot{U} + [K]U = -[M] \cdot 1 \cdot \ddot{U}_e \quad \dots\dots (6)$$

1質点系の振動を考えると、モード毎に分離された方程式とその解は、式(7),(8)である。

$$\ddot{u} + 2h\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{u}_e \quad \dots\dots (7)$$

$$u(t) = \frac{-1}{\omega \sqrt{1-h^2}} \int_0^t \ddot{u}_e(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega \sqrt{1-h^2} (t-\tau) d\tau \quad \dots\dots (8)$$

変位  $u$  は、周期  $T (= 2\pi / \omega)$  と減衰  $h$  のみの関数とみなすことができる。

そこで、最大値のみに着目するならば、 $T$  と  $h$  を変えてその最大値を計算し、周期を変数とし、減数をパラメーターとした応答曲線を表せば、必要な応答値を得ることができる。

周期  $T$ 、減数  $h$  の関数として次の様に定義する。

$$SV(T, h) = \left| \int_0^t \ddot{u}_e(\tau) e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)} \sin \frac{2\pi}{T} \sqrt{1-h^2} (t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad \dots\dots (9)$$

これは、加速度応答スペクトルから速度応答スペクトルとして換算することができる。

$$q_{i\max} = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1-h_i^2}} |\beta_i SV| \quad \dots\dots (10) \quad i = 1 \sim n$$

$$\dot{q}_{i\max} = \frac{1}{\sqrt{1-h_i^2}} |\beta_i SV| = \omega_i q_{i\max} \quad \dots\dots (11) \quad \ddot{q}_{i\max} = \frac{\omega_i}{\sqrt{1-h_i^2}} |\beta_i SV| = \omega_i^2 q_{i\max}$$

$\dots\dots (12)$

モードマトリックスを用いて

$$U = [\phi] q \quad \dots\dots (13)$$

ここから、RMS法 (SRSS法) では

$$U_{\max} = \sqrt{\phi^2 \cdot q^2 \max}, \quad (U_{i\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\phi_{ij} q_{j\max})}) \quad \dots\dots (14)$$

単純和法では過大評価を受ける事から、式(14)の様に2乗和の平方根として考えられたもの

がRMS法である。しかし、モード連成が考えられる様な場合、応答値に過大評価をうけやすい事とモードベクトルの方向を無視する欠点がある。その欠点を補うべきCQC法は、非対角項のモード相関係数を考慮し、又モードベクトルの符号も正確に評価できる手法でありすべてのモード項を、次の様に結合させようとする。

変位成分として

$$U_k = \sqrt{\sum_i \sum_j U_{ki} \cdot \rho_{ij} \cdot U_{kj}} \quad \dots\dots (15)$$

力成分として

$$F_k = \sqrt{\sum_i \sum_j F_{ki} \cdot \rho_{ij} \cdot F_{kj}} \quad \dots\dots (16)$$

の応答となり、RMS法と異なるのは、モード相関係数  $\rho_{ij}$  である。

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{h_i \cdot h_j} (h_i + rh_j) \cdot r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4h_i \cdot h_j \cdot r(1+r^2) + 4(h_i^2 + h_j^2)r^2} \quad \dots\dots (17)$$

$$r = \omega_i / \omega_j$$

ここに  $r = \omega_i / \omega_j = 1$  ,  $h = \text{const}$  とすると

$$\rho_{ij} = \frac{8h^2(1+r) \cdot r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4h^2 \cdot r(1+r)^2} \quad \dots\dots (18)$$

CQC法(Complete Quadratic Combination)は、すべてのモード連成項を含む完全2次結合形式である。

モード相関係数は、式(17)から解るように、荷重の継続時間と周期の関係、そして構造物のモード周期と減衰定数の関数である。RMS法では、モードベクトルのみの関数であり、CQC法は、周期、減衰定数の関数、そしてモードベクトルの方向性を考慮することがわかる。

Fig-2 に示すのは、式(18)を図化したものであるが、角速度比が判明した時点でグラフより  $\rho_{ij}$  を読みとり、モード連成効果を概略的に判断する手法として用いると良い。例えば  $h=0.05$  の場合  $\rho_{ij} > 0.5$  となるのは、 $0.9 < r = \omega_i / \omega_j < 1.1$  であり、 $h=0.02$  の場合  $0.95 < r = \omega_i / \omega_j < 1.05$  では  $\rho_{ij}$  が急速に 1.0 に近ずき、モード連成効果の大きいことがわかる。

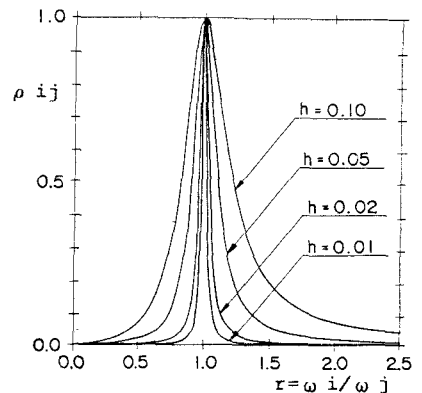


Fig.2  $\rho_{ij}-r=\omega_i/\omega_j$  Curve

#### 4. 例題(1) 連続桁橋の固定支承を有する橋脚の場合

右図に示すように、2 径間連続桁橋の  
固定支承を橋脚にもつ場合について、R  
M S 法と C Q C 法において試算する。

$$W_u = 93 \text{ ton}$$

$$W_1 = 437 \text{ ton} \quad I_{z_1} = 10.94 \text{ m}^4$$

$$W_2 = 612 \text{ ton} \quad I_{z_2} = 5.40 \text{ m}^4$$

$$W_3 = 518 \text{ ton} \quad I_{z_3} = 8.20 \text{ m}^4$$

$$h = 0.05$$

$$E = 2550000 \text{ t/m}^2 \quad A_{\max} = 200 \text{ gal}$$

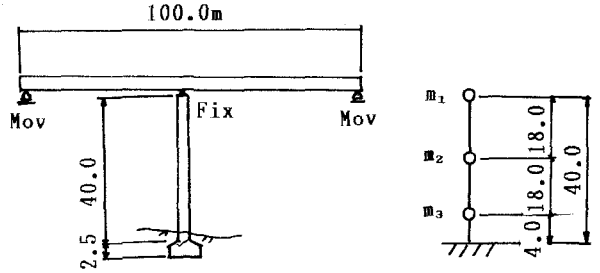
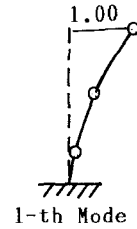


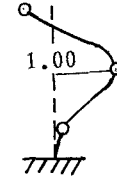
Fig.3 Mass Model

| MODE NO                                                                                                      | 1-th   | 2-th    | 3-th    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---------|---------|
| FREQUENCY                                                                                                    | 0.596  | 3.913   | 26.678  |
| PERIOD                                                                                                       | 1.680  | 0.256   | 0.037   |
| P.FACTOR                                                                                                     | 9.434  | -4.932  | -6.822  |
| MODE 1-X                                                                                                     | 0.1363 | 0.0619  | -0.0029 |
| ( $\phi_i$ ) 2-X                                                                                             | 0.0524 | -0.1148 | 0.0089  |
| 3-X                                                                                                          | 0.0016 | -0.0099 | -0.1372 |
| $q_i = (1/\omega_i \cdot 1-h^2) \cdot \beta_i \cdot SV$                                                      |        |         |         |
| SV                                                                                                           | 0.1177 | 0.1877  | 0.0092  |
| P.F                                                                                                          | 9.434  | -4.932  | -6.822  |
| $q_i$                                                                                                        | 0.2973 | -0.0377 | -0.0004 |
| $u_i = [\phi] \cdot q = \phi_i \cdot q_i$                                                                    |        |         |         |
| point-1                                                                                                      | 0.0405 | -0.0023 | 0.0000  |
| -2                                                                                                           | 0.0155 | 0.0043  | 0.0000  |
| -3                                                                                                           | 0.0005 | 0.0004  | 0.0000  |
| $\rho_{ij} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.00143 & 0.00007 \\ & 1.00000 & 0.00134 \\ & & 1.00000 \end{bmatrix}$ |        |         |         |

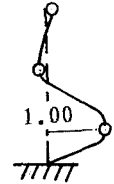
Fig.4 Frequency, Mode,  $u_i$ ,  $\rho_{ij}$  Factor



1-th Mode



2-th Modes



3-th Modes

Fig.5 Mode Shap

応答変位の計算 RMS 法 (SRSS 法) では

$$|u_i|_{\max} = \sqrt{u_i^2}$$

$$U_1 = \sqrt{0.04052^2 + (-0.0023)^2 + 0.000001^2} = 0.0405$$

$$U_2 = 0.016 \quad U_3 = 0.00061$$

CQC 法では

$$U = \sqrt{[u_1 \cdot u_2 \cdot u_3] \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ & \rho_{22} & \rho_{23} \\ & & \rho_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}$$

$$U_1 = 0.0405 \quad U_2 = 0.0161 \quad U_3 = 0.0006$$

# 5. 例題(2) 5径間連続V橋脚ラーメン橋の場合

本モデルは、上部工、鋼5径間連続V橋脚ラーメン橋であり、橋脚はRCラーメン橋脚である。支点条件は、A1固定支点、P1、P2はピン支点、A2は可動支点である。この種の複雑な多質点系モデルの場合、固有値接近とモード連成が想定される。

本橋の場合、2～3のモード連成群があり、その結果RMS法とCQC法の比率では、5%程度CQC法が減少する応答変位値を得た。

この例題では、10次モード迄に2～3次、9～10次間に振動数が接近し、モード連成が発生した。CQC法のモード相関係数(Fig.7)と、モードベクトル $u(k)$ を用いて応答変位を試算してみると

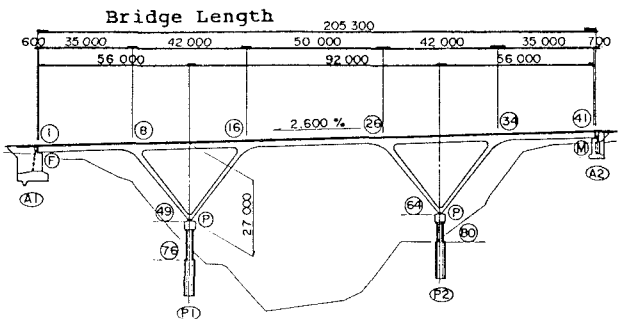


Fig.6 General of Bridge

$$u(k), (j=1 \sim 10) = [0.0011, -0.00068, 0.00225, -0.00144, 0.00027, -0.00087, 0.00253, 0.00119, 0.00061, -0.00070]$$

CQC法の場合

$$\begin{aligned} \bar{U}(k) &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,10} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \dots & \rho_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{10,1} & \rho_{10,2} & \dots & \rho_{10,10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{10} \end{bmatrix} \\ &= 0.0074 \end{aligned}$$

| MODE NO | FREQ. Rad/sec | PARTICIPATION FACTOR |        | MODAL CROSS-CORRELATION COEFFICIENT ( $\rho_{ij}$ ) |        |        |        |        |        |        |        |        |        | $\omega_i / \omega_j$ |
|---------|---------------|----------------------|--------|-----------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------------------|
|         |               | X                    | Y      | 1                                                   | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |                       |
| 1       | 1.906         | 1.271                | 1.255  | 1.0                                                 | 0.0232 | 0.0158 | 0.0071 | 0.0038 | 0.0027 | 0.0022 | 0.0014 | 0.0012 | 0.0011 | —                     |
| 2       | 2.467         | -0.749               | 0.511  |                                                     | 1.0    | 0.3502 | 0.0363 | 0.0118 | 0.0067 | 0.0051 | 0.0027 | 0.0024 | 0.0022 | 0.773                 |
| 3       | 2.605         | -3.295               | 0.318  |                                                     |        | 1.0    | 0.0655 | 0.0164 | 0.0087 | 0.0064 | 0.0034 | 0.0027 | 0.0026 | 0.832                 |
| 4       | 3.029         | 4.301                | -1.723 |                                                     |        |        | 1.0    | 0.0617 | 0.0221 | 0.0136 | 0.0060 | 0.0048 | 0.0042 | 0.860                 |
| 5       | 3.539         | -7.576               | 5.048  |                                                     |        |        |        | 1.0    | 0.1194 | 0.0462 | 0.0129 | 0.0074 | 0.0078 | 0.856                 |
| 6       | 3.944         | 3.515                | 7.448  |                                                     |        |        |        |        | 1.0    | 0.2324 | 0.0274 | 0.0178 | 0.0140 | 0.897                 |
| 7       | 4.241         | 3.164                | 4.920  |                                                     |        |        |        |        |        | 1.0    | 0.0556 | 0.0312 | 0.0230 | 0.929                 |
| 8       | 4.999         | 5.027                | 0.492  |                                                     |        |        |        |        |        |        | 1.0    | 0.3273 | 0.1514 | 0.848                 |
| 9       | 5.293         | 3.240                | 0.882  |                                                     |        |        |        |        |        |        |        | 1.0    | 0.5353 | 0.944                 |
| 10      | 5.494         | -4.492               | 0.540  |                                                     |        |        |        |        |        |        |        |        | 1.0    | 0.963                 |

Fig.7 Frequency, Modal Cross-Correlation Coefficient and Participation Factor

## RMS法の場合

$$U(k) = \sqrt{\sum u_{i,j}^2} = 0.0076$$

ここで、CQC法/RMS法=0.97であり大差なかったが、CQC法はすべてのモード項を評価する手法として、充分活用できる。

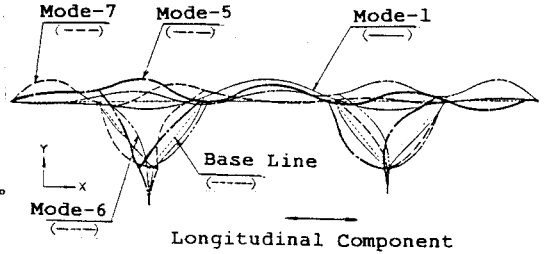


Fig.8 Mode Shape(Longitudinal)

## 6. まとめ

- 1) 応答スペクトル法では、RMS法、CQC法の2通りの方法が実用的である。各々のモードが独立する様な場合は、RMS法が望ましいし、モード連成がある様な場合、CQC法が妥当である。
- 2) 「 $\rho_{ij} = r = \omega_i / \omega_j$ 」曲線を作り、固有値解析が完了後、角速度比が接近する様な場合、グラフから $\rho_{ij}$ を読みとり、モード連成の影響をCQC法にて検討を促す概略的な方法を提案した。
- 3)  $\rho_{ij}$ は  $0.0 \leq \rho_{ij} \leq 1.0$  の範囲にあり、1.0の場合完全相関となり $\rho_{ij}$ が小さくなればなる程、相関係数が小さくなる事を意味する。もし各モードの相関係数を無視すれば $\rho_{ij} = 1.0 (i=j)$ ,  $\rho_{ij} = 0.0 (i \neq j)$ となりRMS法とCQC法は一致する。
- 4) 本文では2例の試算例を示したが、例題(1)では各モードが独立しており全くモード連成の影響がなく、RMS法とCQC法では同値であった。例題(2)では2~3のモード連成が発生し、若干ではあるがCQC法にその影響を示した。CQC法の効果が最も表れるのは、EL.Wilson(Ref(4))らによって指摘されている様に非対称性を有する構造物の立体的応答解析である。これらについては、今後の研究課題である。

## 7. 参考文献

- (1) Japan Road Association: "Specifications for Earthquake Resistant Design of Highway Bridges"
- (2) Tokyo Astronomical Observatory: "Science Chronological Table"
- (3) Civil Engineering Technology Center: "Civil Engineering Journal"
- (4) E.L. Wilson et al.: "A Replacement for the Stress Method Seismic Analysis". Earthquake. Eng. Struct. Dyn. 9. 187-194 (1981)
- (5) T. Kaneko: "Study on Three-Dimensional Response of a Solid to Space Input Earthquake", Proceedings of JSCE, 331, 1-11 (1983)
- (6) 山村・中垣: スペクトル法による特定地震解析
- (7) 谷本: 耐震設計における応答スペクトル解析
- (8) 松井・高松・吉田・金子: 5径間連続V橋脚ラーメン橋の動的解析. 土木学会第41回年次学術講演会講演概要集. 857-858. 昭和61年11月
- (9) Y. MATSUI et al.: Dynamic Analysis of a Five Span Continuous Rigid-Frame Bridge With V-Legs". Proceedings of The Seventh Japan Earthquake Engineering Symposium. 1921-1926 (1986)