土木学会北海道支部　論文報告集　昭和61年度

I —17　有限厚肉円筒殻の軸対称応力解析について

北見工業大学　正員　奥村 勇

1. 緒 言

厚肉円筒殻に関する研究は，従来，多くの研究者によって行われている。それらの研究において用いられた解法を大別すれば，いわゆる高次理論と呼ばれる解法と3次元弾性論に基づいた解法とに分けられる。前者の高次理論に属する研究には，Lin－Morgan理論[1]，Mirsky－Herrmann理論[2]及び異方性体に関するGulati及びEssenburg[3]の研究などが見受けられる。これらの研究は，軸対称問題に関する研究であるが，その後，幾人かの研究者が，非軸対称問題に発展させており，Pawlik及びReismann[4]及びBenzleyら[5]は，無限厚肉円筒殻を平面ひずみ状態に置き換えて強制振動を解析し，Whitney及びSun[6]は，層状異方性円筒殻に関する改良理論を提案している。

一方，後者の3次元弾性論に基づいた解法に属する研究は，極めて少なく，無限厚肉極異方性円筒殻を解析したMisovec及びKempner[7]の研究，Armenàkas及びReitz[8]の研究及び極めて厚い有限円筒殻の軸対称問題にLegendreの多項式を用いたVinson[9]の研究などがわずかに見受けられる程度である。これらの3つの研究は，近似解法によるものであるが，3次元弾性論に基づいた厳密な解法では，Matsuoka及びNomachi[10]，吉野及び宇津木[11]及びOkumura[12]の研究などが見受けられる。厚肉円筒殻といえども，3次元弾性論に基づいた厳密な解法が最も望ましい解法であるが，この解法では，特殊な境界条件を除けば，円筒殻の肉厚が減少するにつれ，収束の良い結果を得ることがむずかしくなり，いわゆる厚肉円筒殻と呼ばれる中程度の大きさの肉厚を持った有限円筒殻の解析は，実質的に困難となる。厚肉円筒殻の種々の理論及び解法が提案されているのも，3次元弾性論に基づいた厳密な解法に，この難点があるためと思われる。

本論文は，著者が先に提案した一厚板理論[13]と同様な考え方で，3次元弾性論に基づいた一解法により，有限厚肉円筒殻の軸対称応力解析を行うものである。本論文で用いる解法は，荷重条件を満たすための特殊解と境界条件を満たすための同次解とを重ね合わせて有限厚肉円筒殻を解析するものであり，何らの殻近似仮定を含んでいない。また，特殊解及び同次解が，共に，3次元弾性解より導出される厳密な弾性解であり，有限厚肉円筒殻の端面の境界条件を満たすために，Saint－Venantの原理が用いられているだけである。

2. 3次元弾性問題の解

円柱座標 (r, θ, z) における3次元弾性問題の解[14]は，物体力を無視すると，次の様に表わされる。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r}\left[\phi_0 + r\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z\frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1\right] + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} \cdots\cdots (1.a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\phi_0 + r\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z\frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_1\right] - 2\frac{\partial \psi_z}{\partial r} \cdots\cdots (1.b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[\phi_0 + r\frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z\frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu)\phi_3\right] \cdots\cdots (1.c)$$

ここで，$\nabla^2\phi_0 = \nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_3 = \nabla^2\psi_z = 0$，$\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + (1/r^2)\partial^2/\partial\theta^2 + \partial^2/\partial z^2 \cdots\cdots (2.a, b)$

また，G 及び ν は，それぞれ，せん断弾性係数及びポアソン比を表わすものとする。

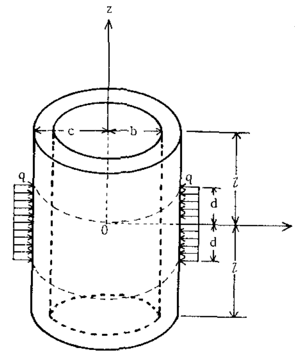
3. 境界条件を満たすための同次解

曲面厚板の弾性解があれば，それを同次解として用いることができるが，その様な解がなかなか見当らないため，本論文では，同次解を3次元弾性解より求めることにする。変位ポテンシャルが調和関数であることに留意

すると，$z=0$ に関して偶の変位ポテンシャルは，次の様に表わされる。

$$\phi_{03}=T_0^{(1)}\left(\frac{z^2}{2}r^2-\frac{z^4}{6}-\frac{r^4}{16}\right)+T_0^{(2)}\left\{z^2r^2\log\frac{r}{b}-\frac{z^4}{3}\left(\log\frac{r}{b}+1\right)-\frac{1}{8}\right.$$
$$\left.\cdot\left(r^4\log\frac{r}{b}-\frac{r^4}{2}\right)\right\}+N_0^{(1)}\left(\frac{z^4}{2}r^2-\frac{z^6}{15}-\frac{3}{8}z^2r^4+\frac{r^6}{48}\right)+N_0^{(2)}\left\{z^4r^2\log\frac{r}{b}\right.$$
$$\left.-\frac{2z^6}{15}\left(\log\frac{r}{b}+1\right)-\frac{3z^2}{4}\left(r^4\log\frac{r}{b}-\frac{r^4}{2}\right)+\frac{1}{24}\left(r^6\log\frac{r}{b}-\frac{5}{6}r^6\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.a)$$

$$\phi_{3}=R_0^{(1)}\left(\frac{z^2}{2}r^2-\frac{z^4}{6}-\frac{r^4}{16}\right)+R_0^{(2)}\left\{z^2r^2\log\frac{r}{b}-\frac{z^4}{3}\left(\log\frac{r}{b}+1\right)-\frac{1}{8}\right.$$
$$\left.\cdot\left(r^4\log\frac{r}{b}-\frac{r^4}{2}\right)\right\}+O_0^{(1)}\left(\frac{z^4}{2}r^2-\frac{z^6}{15}-\frac{3}{8}z^2r^4+\frac{r^6}{48}\right)+O_0^{(2)}\left\{z^4r^2\log\frac{r}{b}\right.$$
$$\left.-\frac{2z^6}{15}\left(\log\frac{r}{b}+1\right)-\frac{3z^2}{4}\left(r^4\log\frac{r}{b}-\frac{r^4}{2}\right)+\frac{1}{24}\left(r^6\log\frac{r}{b}-\frac{5}{6}r^6\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.b)$$



図ー1　帯状外圧を受ける有限厚肉円筒殻

ここで，$T_0^{(1)}$ から $O_0^{(2)}$ は，境界条件によって定められるべき未定定数である。

式 (3.a) 及び式 (3.b) の変位ポテンシャルを式 (1.a) 及び式 (1.c) にそれぞれ代入し，変位成分及びひずみ成分を求めて，Hooke の法則を用いれば，同次解の応力成分が得られ，例えば，$\sigma_{zr}^{(1)}$ は，次式となる。

$$\sigma_{zr}^{(1)}=T_0^{(1)}(2zr)+2R_0^{(1)}(2\nu zr)+N_0^{(1)}(4z^3r-3zr^3)+4O_0^{(1)}\left\{2(1+\nu)z^3r-\frac{3\nu}{2}zr^3\right\}+T_0^{(2)}\left[2z\left(2r\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\log\frac{r}{b}+r\right)-\frac{4z^3}{3r}\right]+2R_0^{(2)}\left\{2\nu z\left(2r\log\frac{r}{b}+r\right)-\frac{4(1+\nu)}{3r}z^3\right\}+N_0^{(2)}\left\{4z^3\left(2r\log\frac{r}{b}+r\right)-\frac{4z^5}{5r}\right.$$
$$\left.-\frac{3z}{2}\left(4r^3\log\frac{r}{b}-r^3\right)\right\}+4O_0^{(2)}\left\{2(1+\nu)z^3\left(2r\log\frac{r}{b}+r\right)-\frac{2}{5r}(2+\nu)z^5-\frac{3\nu z}{4}\left(4r^3\log\frac{r}{b}-r^3\right)\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

4. 荷重条件を満たすための特殊解

荷重条件を満たすための特殊解として，3次元弾性問題の解の一部を用い，変位ポテンシャルを次の様に表わす。

$$\phi_{01}=\sum_{n=1}^{\infty}\cos\beta_n z\left\{D_n^{(1)}I_0(\beta_n r)+D_n^{(2)}K_0(\beta_n r)\right\},\quad \phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\cos\beta_n z\left\{F_n^{(1)}I_0(\beta_n r)+F_n^{(2)}K_0(\beta_n r)\right\}\cdots(5.a,b)$$
$$\phi_{0(0,0)}=D_{00}\log r,\quad \phi_{1(0,0)}=F_{00}\left(\frac{r^2}{2}-z^2\right),\quad \phi_{3(0,0)}=C_{00}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{r^2}{4}\right)\cdots\cdots\cdots(5.c\sim e)$$

ここで，β_n は，$\beta_n=n\pi/l$ $(n=1,2,\cdots)$ であり，また，$D_n^{(1)}$ から C_{00} は，荷重条件によって定められるべき未定定数である。

式 (5.a) から式 (5.e) の変位ポテンシャルを式 (1.a) 及び式 (1.c) にそれぞれ代入し，変位成分及びひずみ成分を求めて，Hooke の法則を用いれば，特殊解の応力成分が得られ，例えば，$\sigma_{zr}^{(2)}$ は，次式となる。

$$\sigma_{zr}^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta_n^2)\sin\beta_n z\left\{I_1(\beta_n r)\left\{D_n^{(1)}-2(1-\nu)F_n^{(1)}\right\}+F_n^{(1)}(\beta_n r)I_0(\beta_n r)\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\sin\beta_n z\left\{K_1(\beta_n r)\left\{D_n^{(2)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-2(1-\nu)F_n^{(2)}\right\}-F_n^{(2)}(\beta_n r)K_0(\beta_n r)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

5. 荷重条件及び境界条件

図ー1に示した上，下対称で外側面に帯状圧力を受ける有限厚肉円筒殻の荷重条件及び境界条件は，次の様に表わされる。

$r=b$ において，$\sigma_{rr}=0$，$\sigma_{rz}=0$，　$r=c$ において，$\sigma_{rr}=-P(z)$，$\sigma_{rz}=0$ $\cdots\cdots\cdots(7.a\sim d)$

$z=\pm l$ において，$T_z=0$，$Q_z=0$，$M_z=0$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8.a\sim c)$

ここで，$p(z)$は，$-d<z<d$においてq，$d<|z|$において0と定義した荷重の関数であり，また，T_z，Q_z及びM_zは，それぞれ，軸力，せん断力及び曲げモーメントである。軸力及びせん断力を合応力及び曲げモーメントを合モーメントと呼ぶことにする。

6．未定定数の消去

有限厚肉円筒殻の内，外側面におけるせん断応力σ_{rz}に関する荷重条件（7.b）及び（7.d）は，数式の上で厳密に満たされる様に未定定数の関係式を求めておくと好都合である。この２つの荷重条件を式（4）及び式（6）に課して，未定定数の関係式を求めれば，次式の様になる。

$$N_0^{(1)}=-2(1+\nu)O_0^{(1)}+2O_0^{(2)}\left(\frac{2\kappa^2}{\kappa^2-1}\log\kappa+1\right),\quad N_0^{(2)}=-2(2+\nu)O_0^{(2)},\quad \kappa=\frac{c}{b}\cdots\cdots(9.\,a\sim c)$$

$$T_0^{(1)}=-2\nu R_0^{(1)}+\frac{3}{2}b^2O_0^{(1)}\left(\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}-2\right)+3b^2O_0^{(2)}\left[\kappa^2\left(\frac{2}{\kappa^2-1}\log\kappa+1\right)-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}+2\right]\cdots\cdots(9.\,d)$$

$$T_0^{(2)}=-\frac{3(1+\nu)}{2\log\kappa}(\kappa^2-1)b^2O_0^{(1)}-3(1+\nu)b^2O_0^{(2)}\left(\frac{4\kappa^2}{\kappa^2-1}\cdot\frac{\nu}{1+\nu}\log\kappa+\kappa^2-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}\right)\cdots\cdots(9.\,e)$$

$$R_0^{(2)}=\frac{3(\kappa^2-1)}{4\log\kappa}b^2O_0^{(1)}+\frac{3}{2}b^2O_0^{(2)}\left[\kappa^2\left(\frac{4}{\kappa^2-1}\log\kappa+1\right)-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}\right]\cdots\cdots(9.\,f)$$

$$D_n^{(1)}=F_n^{(1)}[2(1-\nu)+e_1]+e_2F_n^{(2)},\quad D_n^{(2)}=f_1F_n^{(1)}+F_n^{(2)}[2(1-\nu)+f_2]\cdots\cdots(10.\,a,b)$$

ここで，
$$e_1=\frac{1}{\Gamma_n}\left[(\beta_nc)-(\beta_nb)\frac{I_0(\beta_nb)}{I_0(\beta_nc)}\cdot\frac{K_1(\beta_nc)}{K_1(\beta_nb)}\right],\quad \Gamma_n=\frac{I_1(\beta_nb)}{I_0(\beta_nc)}\cdot\frac{K_1(\beta_nc)}{K_1(\beta_nb)}-\frac{I_1(\beta_nc)}{I_0(\beta_nc)}\cdots(11.\,a,b)$$

$$e_2=\frac{K_1(\beta_nb)}{I_0(\beta_nc)}\cdot\frac{1}{\Gamma_n}\left[(\beta_nc)\frac{K_0(\beta_nc)}{K_1(\beta_nb)}-(\beta_nb)\frac{K_1(\beta_nc)}{K_1(\beta_nb)}\cdot\frac{K_0(\beta_nb)}{K_1(\beta_nb)}\right]\cdots\cdots(11.\,c)$$

$$f_1=\frac{I_0(\beta_nc)}{K_1(\beta_nb)}\cdot\frac{1}{\Gamma_n}\left[(\beta_nc)\frac{I_1(\beta_nb)}{I_0(\beta_nc)}-(\beta_nb)\frac{I_1(\beta_nc)}{I_0(\beta_nc)}\cdot\frac{I_0(\beta_nb)}{I_0(\beta_nc)}\right]\cdots\cdots(11.\,d)$$

$$f_2=\frac{1}{\Gamma_n}\left[(\beta_nc)\frac{I_1(\beta_nb)}{I_0(\beta_nc)}\cdot\frac{K_0(\beta_nc)}{K_1(\beta_nb)}-(\beta_nb)\frac{I_1(\beta_nc)}{I_0(\beta_nc)}\cdot\frac{K_0(\beta_nb)}{K_1(\beta_nb)}\right]\cdots\cdots(11.\,e)$$

式（9.a）から式（9.f）の関係式を用いて，同次解の応力成分に含まれる未定定数$N_0^{(1)},\cdots,R_0^{(2)}$を消去することができ，$\sigma_{rr}^{(1)}$，$\sigma_{zz}^{(1)}$及び$\sigma_{zr}^{(1)}$は，次式の様に表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)}=\;&2R_0^{(1)}\left[(1+\nu)z^2-\frac{\nu}{4}r^2\right]+\frac{3}{2}b^2O_0^{(1)}\Big\{-2\left(z^2-\frac{3}{4}r^2\right)+\frac{1}{3b^2}\left[4(1+\nu)z^4-6\nu z^2r^2-\frac{5-\nu}{2}r^4\right]+\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}\\&\cdot\left[z^2\left(2\nu\log\frac{r}{b}+1+\nu\right)+\frac{1-\nu}{3r^2}z^4+\frac{r^2}{2}\left\{(3-\nu)\log\frac{r}{b}-\frac{5-\nu}{4}\right\}\right]\Big\}+3b^2O_0^{(2)}\Big\{2\left(z^2-\frac{3}{4}r^2\right)+\frac{4\kappa^2}{\kappa^2-1}\\&\cdot\log\kappa\left[z^2\left\{2(1+\nu)\log\frac{r}{b}+\frac{7+2\nu}{2}\right\}+\frac{2-\nu}{3r^2}z^4-\frac{r^2}{2}\left(\nu\log\frac{r}{b}+\frac{3-\nu}{4}\right)\right]+\left(\kappa^2-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}\right)\Big[z^2\left(2\nu\log\frac{r}{b}+1\right.\\&\left.+\nu\right)+\frac{1-\nu}{3r^2}z^4+\frac{r^2}{2}\left\{(3-\nu)\log\frac{r}{b}-\frac{5-\nu}{4}\right\}\Big]+\frac{2}{3b^2}\left(\frac{2\kappa^2}{\kappa^2-1}\log\kappa+1\right)\left(z^4-\frac{9}{2}z^2r^2+\frac{5}{8}r^4\right)+\frac{4}{3b^2}\Big[\nu z^4\\&\cdot\left(\log\frac{r}{b}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1-\nu}{15r^2}z^6+\frac{3z^2r^2}{2}\left\{(3-\nu)\log\frac{r}{b}+\frac{1+\nu}{4}\right\}-\frac{r^4}{4}\left(\frac{10-\nu}{2}\log\frac{r}{b}-\frac{7-\nu}{3}\right)\Big]\Big\}\cdots\cdots(12.\,a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)}=\;&-2R_0^{(1)}r^2+3b^2O_0^{(1)}\Big\{-(r^2-2z^2)+\left(\frac{r}{b}\right)^2(r^2-4z^2)-\frac{2(\kappa^2-1)}{\log\kappa}\left[r^2\left(\log\frac{r}{b}-\frac{1}{4}\right)-z^2\left(\log\frac{r}{b}+\frac{1}{2}\right)\right]\Big\}\\&+3b^2O_0^{(2)}\Big\{-\frac{4\kappa^2}{\kappa^2-1}\log\kappa\left[2r^2\left(\log\frac{r}{b}-\frac{1}{4}\right)+z^2\right]-4\left(\kappa^2-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}\right)\left[r^2\left(\log\frac{r}{b}-\frac{1}{4}\right)-z^2\left(\log\frac{r}{b}+\frac{1}{2}\right)\right]\\&+2(r^2-2z^2)+\frac{4}{3b^2}\left(\frac{2\kappa^2}{\kappa^2-1}\log\kappa+1\right)\left[3z^2r^2-z^4-\frac{3}{8}r^4\right]-\frac{4}{3b^2}\Big[12z^2r^2\log\frac{r}{b}-2z^4\left(\log\frac{r}{b}+1\right)\\&-\frac{9}{4}r^4\left(\log\frac{r}{b}-\frac{1}{2}\right)\Big]\Big\}\cdots\cdots(12.\,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zr}^{(1)}=\;&6b^2O_0^{(1)}zr\left[\left(\frac{r}{b}\right)^2-1-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}\log\frac{r}{b}\right]+12b^2O_0^{(2)}\Big\{zr\Big[\left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}\log\kappa+1\right)\left\{1-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right\}-\Big\{\kappa^2\\&-\frac{\kappa^2-1}{\log\kappa}-2\left(\frac{r}{b}\right)^2\Big\}\log\frac{r}{b}\Big]+\frac{4}{3}\cdot\frac{z^3}{r}\left[\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}\log\kappa\left\{\left(\frac{r}{b}\right)^2-1\right\}-\left(\frac{r}{b}\right)^2\log\frac{r}{b}\right]\Big\}\cdots\cdots(12.\,c)\end{aligned}$$

式（10.a）及び式（10.b）の関係式を用いて，特殊解の応力成分に含まれる未定定数 $D_n^{(1)}$ 及び $D_n^{(2)}$ を消去することができ，$\sigma_{rr}^{(2)}$，$\sigma_{zz}^{(2)}$ 及び $\sigma_{zr}^{(2)}$ は，次式の様に表わされる。

$$\sigma_{rr}^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta_n^2)\cos\beta_n z\Big\{F_n^{(1)}\Big[\{e_1-2(1-\nu)\}\frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r}-(\beta_n r)I_1(\beta_n r)-(e_1-1)I_0(\beta_n r)-f_1\Big\{\frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r}+K_0(\beta_n r)\Big\}\Big]$$

$$-F_n^{(2)}\Big[\{f_2-2(1-\nu)\}\frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r}-(\beta_n r)K_1(\beta_n r)+(f_2-1)K_0(\beta_n r)-e_2\Big\{\frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r}-I_0(\beta_n r)\Big\}\Big]\Big\}\cdots\cdots\quad(13.a)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta_n^2)\cos\beta_n z\Big\{F_n^{(1)}\big[(2+e_1)I_0(\beta_n r)+(\beta_n r)I_1(\beta_n r)+f_1K_0(\beta_n r)\big]+F_n^{(2)}\big[(2+f_2)K_0(\beta_n r)$$

$$-(\beta_n r)K_1(\beta_n r)+e_2I_0(\beta_n r)\big]\Big\}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(13.b)$$

$$\sigma_{zr}^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta_n^2)\sin\beta_n z\Big\{F_n^{(1)}\big[e_1I_1(\beta_n r)+(\beta_n r)I_0(\beta_n r)-f_1K_1(\beta_n r)\big]-F_n^{(2)}\big[f_2K_1(\beta_n r)-(\beta_n r)K_0(\beta_n r)-e_2$$

$$\cdot I_1(\beta_n r)\big]\Big\}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(13.c)$$

7．合応力及び合モーメント

有限厚肉円筒殻の中央面の半径を a で表わすと，合応力及び合モーメントは，それぞれ，次式で表わされる。

$$T_z=\frac{1}{a}\int_b^c\sigma_{zz}\,r\,dr,\quad Q_z=-\frac{1}{a}\int_b^c\sigma_{zr}\,r\,dr,\quad M_z=-\frac{1}{a}\int_b^c\sigma_{zz}(r-a)\,r\,dr\qquad(14.a\sim c)$$

同次解の合応力 $T_z^{(1)}$，$Q_z^{(1)}$ 及び合モーメント $M_z^{(1)}$ は，r の多項式についての単なる積分であるので，簡単に求められるが，特殊解の合応力 $T_z^{(2)}$，$Q_z^{(2)}$ 及び合モーメント $M_z^{(2)}$ は，変形 Bessel 関数の積分になるので，やゝ複雑である。しかしながら，変形 Bessel 関数に関する漸化式と次式に示す積分公式とを併わせ用い，部分積分を行えば，すべて厳密に積分できる。

$$\int^x I_0(x)\,dx=x\,I_0(x)+\frac{\pi}{2}x\big[I_0(x)\mathbf{L}_1(x)-\mathbf{L}_0(x)I_1(x)\big]\cdots\cdots\cdots\quad(15.a)$$

$$\int^x K_0(x)\,dx=x\,K_0(x)+\frac{\pi}{2}x\big[K_0(x)\mathbf{L}_1(x)+\mathbf{L}_0(x)K_1(x)\big]\cdots\cdots\cdots\quad(15.b)$$

ここで，$\mathbf{L}_0(x)$ 及び $\mathbf{L}_1(x)$ は，それぞれ，次式で定義される次数0及び次数1の変形 Struve 関数である。

$$\mathbf{L}_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2k+1}}{\{\Gamma(k+\frac{3}{2})\}^2},\quad \mathbf{L}_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2k+2}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(k+\frac{5}{2})}\cdots\cdots\cdots\quad(16.a,b)$$

8．未定定数を定めるための5元連立1次方程式

荷重条件（7.b）及び（7.d）は，すでに満足されているので，残りの荷重条件及び境界条件から，同次解及び特殊解に含まれる未定定数 $R_0^{(1)}$，$O_0^{(1)}$，$O_0^{(2)}$，$F_n^{(1)}$ 及び $F_n^{(2)}$ を決定することになり，次式が得られる。

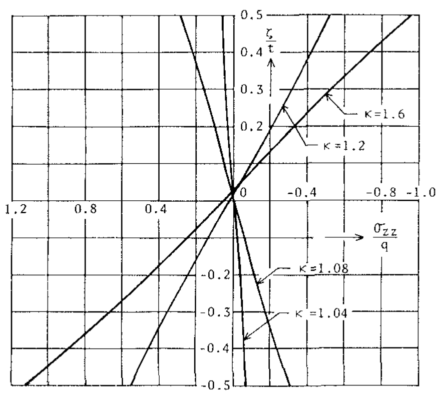
$$(\sigma_{rr}^{(1)}+\sigma_{rr}^{(2)})_{r=b}=0,\quad(\sigma_{rr}^{(1)}+\sigma_{rr}^{(2)})_{r=c}=-p(z)\cdots\cdots\cdots\quad(17.a,b)$$

$$(T_z^{(1)}+T_z^{(2)})_{z=\pm l}=0,\quad(Q_z^{(1)})_{z=\pm l}=0,\quad(M_z^{(1)}+M_z^{(2)})_{z=\pm l}=0\cdots\cdots\quad(17.c\sim e)$$

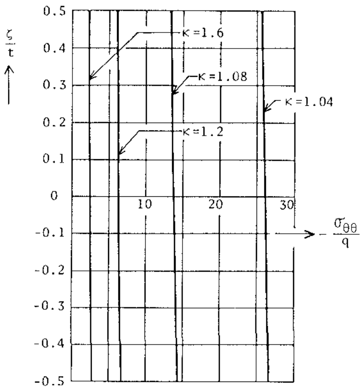
9．数値計算例

数値計算例として，有限厚肉円筒殻の長さ $2l$ と内径 $2b$ との比 $l/b=3.0$，圧力分布幅 $2d$ と長さ $2l$ との比 $d/l=0.3$ 及びポアソン比 $\nu=0.25$ の場合を取り扱い，外半径 c と内半径 b との比 $\kappa=c/b$ を変化させて計算した。以下に示す図において，t は肉厚 $t=c-b$ であり，ζ は，肉厚座標 $\zeta=r-(b+c)/2$ である。図−2に示されている様に，肉厚が大きい場合には，軸方向の垂直応力 σ_{zz} は，比較的大きな値を示すが，肉厚が減少するに従い小さな値となり，$\kappa=1.04$ の薄肉殻では極めて小さな値となる。図−3に示されている様に，周方向の垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は，σ_{zz} に比較して2倍程度大きな値を示し，肉厚の減少に従い大きな値となる。図−4に示されている様

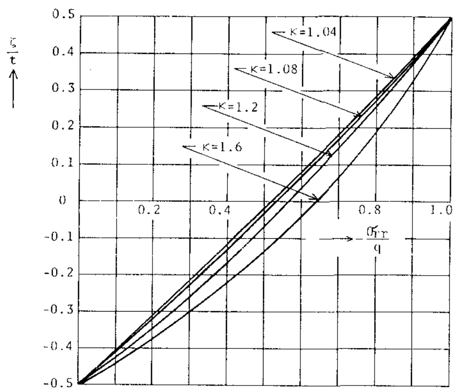
に，肉厚方向の垂直応力 σ_{rr} は，肉厚の減少に従い直線分布に近づき，$\kappa=1.04$ では，ほぼ直線分布となる。図−5に示されている様に，せん断応力 σ_{zr} は，肉厚の減少に従い放物線分布に近づき，$\kappa=1.04$ では，ほぼ放物線分布となる。図−6は，σ_{zz} の3次元応力解析による結果と本解法による殻解析による結果との比較を示したものであり，$\kappa=2.0$ 及び $l/b=1.5$ の極めて厚い且つ短い厚肉円筒殻でありながら，端面を十分に離れた $z=0$ においては，数値3〜4桁一致している。図−7は，σ_{rz} の3次元応力解析による結果と本解法による殻解析による結果との比較を示したものであり，$z=0$ においては，放物線分布と著しくへだたっているが，数値3〜4桁一致している。図−2から図−5を通し，有限厚肉円筒殻の肉厚方向の応力分布が，厚肉殻から薄肉殻に近づくに従い，いかに変化するかが明確に示されている。また，図−6及び図−7から，本論文で用いた解法が，肉厚が相当に大きい有限厚肉円筒殻に対しても高い精度で適用され得ることが分かる。



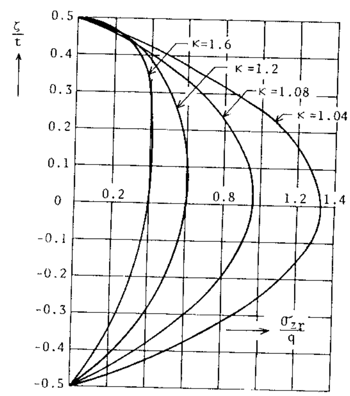
図−2　Z=0 における σ_{zz} の分布



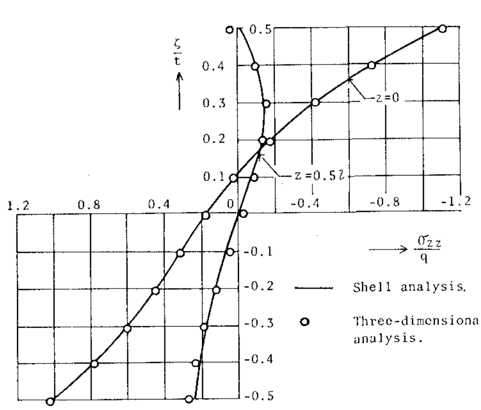
図−3　Z=0 における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布



図−4　Z=0 における σ_{rr} の分布

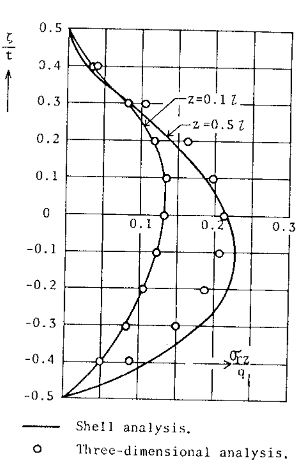


図−5　Z=0.3l における σ_{zr} の分布



$(\kappa=\frac{c}{b}=2.0, \frac{l}{b}=1.5, \frac{d}{l}=0.3, \nu=0.25.)$

図−6　σ_{zz} の3次元解析による結果との比較



$(\kappa=\frac{c}{b}=2.0, \frac{l}{b}=1.5, \frac{d}{l}=0.3, \nu=0.25.)$

図−7　σ_{rz} の3次元解析による結果との比較

10. 結 語

弾性論に基づいた一近似解法により，有限厚肉円筒殻の軸対称応力解析を行った。ここで言う近似の意味は，端面における境界条件を，Saint-Venant の原理に基づいて，合応力及び合モーメントにより規定している点に弾性論的な近似が含まれているという意味である。この近似の効果は，有限厚肉円筒殻の肉厚が減少するに従いどんどん低下し，また，肉厚が大きくても，端面から十分に離れた位置では小さくなる。厚肉殻理論は，本来，肉厚と中央面の半径との比が，0.1 程度の円筒殻に適用されるものであるため，肉厚が極端に減少して，薄肉殻の範囲になると一般的に収束がむずかしくなるが，本論文で用いた解法は，外半径と内半径との比が 1.04 という薄肉殻に対しても十分に適用されている。何らの殻近似仮定を含まない弾性論に基づいた精度の高い及び適用性の広い解法であることに注目すれば，本論文で用いた解法は，有限厚肉円筒殻の有用な一解法と考えられる。

参考文献

1) Lin, T. C. and Morgan, G. W. : A study of axisymmetric vibrations of cylindrical shells as affected by rotatory inertia and transverse shear, J. Appl. Mech., Vol. 23, No. 2, pp. 255～261, 1956.

2) Mirsky, I. and Herrmann, G. : Axially symmetric motions of thick cylindrical shells, J. Appl. Mech., Vol. 25, No. 1, pp. 97～102, 1958.

3) Gulati, S. T. and Essenburg, F. : Effects of anisotropy in axisymmetric cylindrical shells, J. Appl. Mech., Vol. 34, No. 3, pp. 659～666, 1967.

4) Pawlik, P. S. and Reismann, H. : Forced plane strain motion of cylindrical shells – A comparison of shell theory with elasticity theory, J. Appl. Mech., Vol. 40, No. 3, pp. 725～730, 1973.

5) Benzley, S. E., Hutchinson, J. R. and Key, S. W. : A dynamic shell theory coupling thickness stress wave effects with gross structural response, J. Appl. Mech., Vol. 40, No. 3, pp. 731～735, 1973.

6) Whitney, J. M. and Sun, C.-T. : A refined theory for laminated anisotropic, cylindrical shells, J. Appl. Mech., Vol. 41, No. 2, pp. 471～476, 1974.

7) Misovec, A. P. and Kempner, J. : Approximate elasticity solution for orthotropic cylider under hydrostatic pressure and band loads, J. Appl. Mech., Vol. 37, No. 1, pp. 101～108, 1970.

8) Armenàkas, A. E. and Reitz, E. S. : Propagation of harmonic waves in orthotropic circular cylindrical shells, J. Appl. Mech., Vol. 40, No. 1, pp. 168～174, 1973.

9) Vinson, J. R. : Methods of analysis for very thick-walled cylindrical shells, J. Eng. Ind., Trans. ASME, Vol. 97, Series B, No. 1, pp. 175～181, 1975.

10) Matsuoka, K. G. and Nomachi, S. G. : On a 3-dimensional stress analysis of an annual cylindrical body by means of Fourier-Hankel transforms, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 22, pp. 199～209, 1974.

11) 吉野利男・宇津木 諭：有限円筒の非軸対称変形問題の解析，機械学会論文集（A編），第 46 巻 402号, pp. 218～226, 1980.

12) Okumura, I. A. : On stresses in very thick cylindrical panels analyzed by the three-dimensional theory of elasticity, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 31, pp. 73～83, 1982.

13) 奥村 勇・本多祐也・芳村 仁：一厚板理論による扇形平板の解析について，土木学会論文報告集，第 326 号, pp. 15～28, 1982.

14) Okumura, I. A. and Onaka, T. : An expression for solutions to three-dimensional elasticity problems in cylindrical and spherical coordinates, 土木学会論文集, No. 374/I-6, pp. 185～194, 1986.