

I — 15 棒のエラスティカ問題への選点法の応用

北海道大学工学部 正会員 芳村 仁
北海道大学工学部 正会員 三上 隆
北海道大学工学部 吉田 紀之

1. はじめに

最近構造物の軽量化に伴い、構造解析はより精密なものが要求され、構造物の線形挙動のみならず非線形挙動の正確な解明が課題となってきた。特に大変形挙動を生じやすい構造要素の挙動を正確に把握しようとすればひずみ-変位関係式に非線形性を取り入れた幾何学的非線形問題の解析が必要となる。この場合の問題は、非線形微分方程式によって支配され、厳密に解く一般的な解法が存在しないため、数多くの近似解法が提案されているが、荷重条件や境界条件の異なる広範囲の問題に対する適用性や効率性などの解決すべき多くの問題を抱えているのが現実である。

本報告では、著者らが静的・動的問題に対して展開し、その有効性を確認している選点法¹⁾を棒のエラスティカ問題に適用し、その適用可能性および有効性の検討を行ったものである。数値例では集中荷重および一様等分布荷重を受ける棒の後座屈問題を解析し、本手法の高い非線形性を有する問題への有効性を明らかにする。

2. 基礎方程式

図-1 (a) に示すように下端が固定され、上端が自由な細長い棒を考える。棒上の任意の点は (x, y) と (S, θ) で定義されるものとする。 (x, y) は原点を O とする直角座標上の位置であり、 S は原点 O から棒の軸に沿った距離を表わし、 θ は接線と鉛直軸となす角である。

解析の対象とするモデルは、図-1 (b) と (c) に示すような集中荷重 P および一様な等分布荷重 q を受ける棒である。このようなモデルに対して、棒の大変形挙動を支配する基本微分方程式は、棒の変形曲線の曲率が曲げモーメントに比例し、曲げに伴う棒の伸縮を無視するという古典的エラスティカ理論に従うものとするれば、以下のように与えられる。

集中荷重を受ける場合；

$$EI \frac{d^2\theta}{dS^2} + P \sin\theta = 0 \quad (1.a)$$

ここで、 EI = 曲げ剛性。

一様分布荷重を受ける場合；

$$EI \frac{d^2\theta}{dS^2} + qS \sin\theta = 0 \quad (1.b)$$

境界条件は2つのモデルに対して以下となる。

$$S=0 \text{ で } d\theta/dS = 0 \quad (2.a)$$

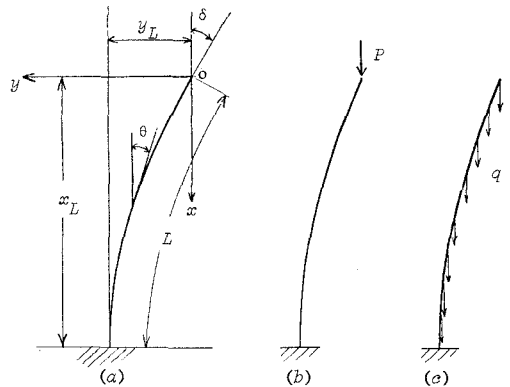


図-1. 解析モデルと座標系

$$S=L \text{ で } \theta=0 \quad (2.b)$$

さて、 S の無次元化座標 $\xi (= S/L)$ を導入すれば、式(1)および式(2)は次のようになる。

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + k f(\xi) \sin\theta = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi=0 \text{ で } d\theta/d\xi = 0 \\ \xi=1 \text{ で } \theta=0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

ここで、 k および $f(\xi)$ は荷重モデルに応じた次のようなものである。

集中荷重を受ける場合；

$$k = \frac{PI^2}{EI}, \quad f(3) = 1 \quad (5, a)$$

一様分布荷重を受ける場合;

$$k = \frac{8L^3}{EI}, \quad f(3) = 3 \quad (5, b)$$

3. 選点法による定式化

選点法による離散化過程は、基本的には文献1)に従うので、ここでは後の展開で必要なことのみを記すことにする。

① 内部選点と端点;

棒の軸に沿って、 $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = 1$ の $M+2$ 個の点を配置する。内部選点 ξ_j ($j = 1 \sim M$, $M = \text{内部選点数}$) には、区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre 多項式の零点を採用する。 $\xi_0 = 0$ と $\xi_{M+1} = 1$ は、境界条件が指定される点に配置されるもので端点とよぶ。

② マトリクス $[A]$ と $[B]$;

ξ に関する 1, 2 階微分を内部選点と端点における関数値 (θ の値) に結びつける $(M+2)$ 次の正方マトリクスである。

$$\{\theta\} = [A]\{\theta\} \quad (6)$$

$$\{\theta'\} = [B]\{\theta\} \quad (7)$$

ここに、 $(M+2) \times 1$ 次のベクトル、たとえば $\{\theta\}$ は次のようなものである。

$$\{\theta\}^T = (\theta(\xi_0), \theta(\xi_1), \dots, \theta(\xi_{M+1})) \quad (8)$$

③ $\{\theta_c\}$ と $\{\theta_e\}$;

式(8)は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下ではこれらを分離し次のように表わす。

$$\{\theta\}^T = (\theta(\xi_1), \theta(\xi_2), \dots, \theta(\xi_M)) \quad (9)$$

$$\{\theta_e\}^T = (\theta(\xi_0), \theta(\xi_{M+1})) \quad (10)$$

ここに、添字 c と e はそれぞれ、内部選点および端点を表わす。

さて、式(3)は非線形微分方程式なので、次のような逐次近似法(繰返し法)で解析過程を構成する。繰返し計算過程の n 回目のサイクルにおいては、式(3)は次式が成立するものとする。

$$\frac{d^2 \theta^{(n)}}{d\xi^2} + k^{(n)} f(\xi) \left(\frac{\sin \theta^{(n-1)}}{\theta^{(n-1)}} \right) \theta^{(n)} = 0 \quad (11)$$

ここで、 $\theta^{(n-1)}$ は 1 つ前のサイクルの θ の値である。

棒の軸に沿って採られた $M+2$ 個の点における θ の値を定めるための条件式は次のように与えられる。

まず、微分方程式(11)の内部選点における残差条件より得られる M 個の条件式は、式(7), (9) を用いて次のように表わされる。

$$[\alpha_c]\{\theta_c^{(n)}\} + [\alpha_e]\{\theta_e^{(n)}\} + k^{(n)} f(\xi) \{\theta_c^{(n)}\} = \{0\} \quad (12)$$

ここで、 $[\]$ は対角マトリクスを表わし、各マトリクスの要素は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_c(i, j) &= B(i+1, j+1) \\ \alpha_e(i, q) &= B(i+1, t) \\ \gamma(i, j) &= f(\xi_j) \frac{\sin[\theta^{(n-1)}(\xi_i)]}{\theta^{(n-1)}(\xi_j)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし、 $i, j = 1 \sim M$

$\ell = 1, 2$ であり、 t は次の値をとる。

$\ell = 1$ で $t = 1$, $\ell = 2$ で $t = M+2$

残り 2 個の条件は、棒の両端で規定される境界条件式より得られる。この条件を一般的な形で次のように表示しておく。

$$[\beta_c]\{\theta_c^{(n)}\} + [\beta_e]\{\theta_e^{(n)}\} = \{0\} \quad (14)$$

ここで、 $[\beta_c]$ と $[\beta_e]$ は式(6)の $[A]$ の成分などで構成される、それぞれ $(2 \times M)$ 次および (2×2) 次のマトリクスである。

式(12), (14)より $\{\theta_e^{(n)}\}$ を消去すれば、棒の後座屈問題は固有値 $k^{(n)}$ を求める問題に帰着される。

$$[\alpha]\{\theta_c^{(n)}\} + k^{(n)} f(\xi) \{\theta_c^{(n)}\} = \{0\} \quad (15)$$

ただし、 $[\alpha] = [\alpha_c] - [\alpha_e][\beta_e]^{-1}[\beta_c]$ 。

図-1(a)に示す自由端の位置 (x_L, y_L) は、最小の固有値 $k_{\min}^{(n)}$ に対応する固有モード $\{\theta^{(n)}\}$ を用いて、次式により算定できる。

$$\left. \begin{aligned} x_L &= L \int_0^1 \cos \theta^{(n)} \cdot d\xi \\ y_L &= L \int_0^1 \sin \theta^{(n)} \cdot d\xi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

なお、以上の記述では自由端の角度 δ が考慮されていないが、これを考慮して解(角度 δ を与える $k_{\min}$)を求める概略を説明すると以下になる。

①. θ の初期値 $\theta^{(0)}$ を決める。これはオイラーの座屈形に基づいて自由端の角度 $\theta^{(0)}$ を δ となるように調整する。

②. ①で求めた $\theta^{(0)}$ を使って、式(15)のマトリックス $[K^{(0)}]$ を作成し、最小固有値 $k_{min}^{(0)}$ とそれに対応する $\theta^{(1)}$ を求め、 $\theta^{(1)}$ を δ となるように調整する。

③. ②で求めた $\theta^{(1)}$ を使って、②と同様のことを行う。

④. このようにして、 $k_{min}^{(n)} \approx k_{min}^{(n-1)}$ になるまで繰り返し計算を行う。

4. 数値計算例

以下に示す結果は、自由端における接線が鉛直線と δ の角をなすようなたわみを生じさせる荷重（集中荷重 P 、一様分布荷重 q ）を、Euler 荷重（ $P_{cr} = \pi^2 EI / 4L^2$ ， $q_{cr} = 7.837 EI / L^3$ ）で正規化したもので整理した。

1). 集中荷重を受ける棒（図-1(b)）

表-1 は $\delta = 60^\circ, 160^\circ$ に対する P/P_{cr} の収束性に与える内部選点数 M の影響をみたもので、これによると $M \geq 5$ で一定値に収束し、収束値は積分によって算定される正解²⁾ に完全に一致している。

以下では $M = 11$ とする。

図-2 は $\delta = 60^\circ, 160^\circ$ に対するたわみ曲線に与える計算の反復回数 n の影響を示したものである。これによると、いずれの δ に対しても数回の反復計算で正解と一致していることがわかる。図中には参考のため、9 ステップ目の自由端の位置 (x_L, y_L) を示した。

表-2 に、先端角 δ に対する P/P_{cr} の値

および自由端のたわみデータ (x_L, y_L) を正解²⁾ とともに整理した。これによると、いずれの δ に対しても正解と一致しており、本手法は高い非線形を有する場合にも極めて有効であることが理解できる。

表-2. 先端角 δ に対応する荷重 (P/P_{cr}) と自由端のたわみデータ (x_L, y_L) ，（集中荷重）

δ		0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
P/P_{cr}	Present	1	1.015	1.064	1.152	1.294	1.518	1.885	2.542	4.030	9.116
	Exact	1	1.015	1.063	1.152	1.293	1.518	1.884	2.541	4.029	9.116
x_L/L	Present	1	0.970	0.881	0.741	0.559	0.349	0.123	-0.107	-0.340	-0.577
	Exact	1	0.970	0.881	0.741	0.560	0.349	0.123	-0.107	-0.340	-0.577
y_L/L	Present	0	0.219	0.422	0.593	0.719	0.792	0.803	0.750	0.625	0.421
	Exact	0	0.220	0.422	0.593	0.716	0.792	0.803	0.750	0.625	0.421

図-2. 反復計算回数 n の棒のたわみ形状に及ぼす影響

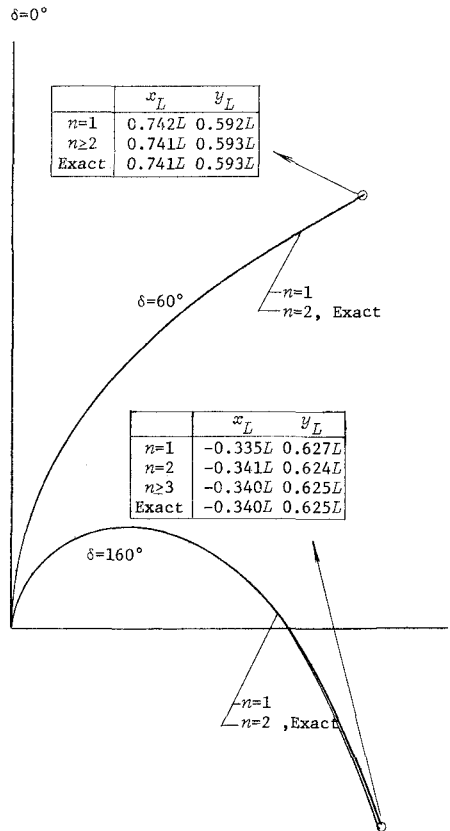


表-1. 内部選点数 M の P/P_{cr} に及ぼす影響

M		3	5	7	9	11	Exact
P/P_{cr}	$\delta = 60^\circ$	1.151	1.152	1.152	1.152	1.152	1.152
	$\delta = 160^\circ$	4.079	4.029	4.030	4.030	4.030	4.030

表-3. 先端角 δ に対応する荷重(q_L/q_{Lcr})と自由端のたわみデータ(x_L, y_L), (一様分布荷重)

δ	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
q_L/q_{Lcr}	1	1.014	1.058	1.137	1.264	1.463	1.783	2.346	3.590	7.701
x_L/L	1	0.963	0.856	0.688	0.473	0.228	-0.028	-0.276	-0.508	-0.709
y_L/L	0	0.247	0.473	0.658	0.786	0.846	0.831	0.739	0.566	0.330

図-3は表-2における δ に対応するたわみ曲線を示したもので、この結果も本手法により複雑な非線形挙動の追跡が可能であることを示している。

2). 一様分布荷重を受ける棒 (図-1(c)).

表-3に先端角 δ に対応する q_L/q_{Lcr} の値および自由端の位置(x_L, y_L)を示した。この問題については、現段階では解析解がないので直接的に精度を検討することができないが、 $\delta = 60^\circ$ に対する級数解法の結果³⁾ ($q_L/q_{cr} = 1.137$, $x_L = 0.691L$, $y_L = 0.665L$)との比較および1)の例からみて、本結果は十分精度がよいと思われる。

5. まとめ

以上に、直交多項式の零点を選点とする選点法による棒のエラスティカ問題の解析過程を提示し、具体的な計算例を通じて提案する解法の特徴および有効性を明らかにした。

本解法の基礎的な特性を要約すると以下となる。

- 1) 少ない内部選点数と少ない反復計算回数で、高精度の解が得られる効率のよい解法である。
- 2) 特別な工夫を要することなく、複雑な形状変化を伴う高い非線形を有する問題の解析が可能である。

参考文献

- 1) 三上・芳村, 選点法による回転殻の固有振動数の解析 (土木学会論文報告集, No.335, pp.69-78, 1983), 空間領域に選点法を用いた回転殻の静的および動的問題の解析 (土木学会論文報告集, No.341, pp.69-78, 1984), 選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析 (土木学会論文集, No.374/I-6, pp.319-328, 1986)

2) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, Second Edition, McGraw-Hill, 1961.

3) Wang, T.M., Postbuckling of column under distributed axial load, Proc. of ASCE, Vol.97, No. EM4, pp.1323-1327.

図-3. 先端角 δ に対する棒のたわみ形状.

