

I-14 選点法を応用した四辺固定 Mindlin 板の固有振動解析

北海道大学工学部 正会員 三上 隆
 北海道大学工学部 正会員 芳村 仁
 青木 建設 長谷川 康也
 北海道大学工学部 大場 誠道

1. はじめに

Mindlin 板の動的特性に関する研究は、従来より数多くの論文が発表され、それに関する優れた Review が Leissa らにより報告されている¹⁾。ところで、Mindlin 板の固有振動問題は 4 辺単純支持の場合を除いて解析的取り扱いがしばしば困難となるため、有限要素法、有限差分法および Rayleigh-Ritz 法などの多くの近似解法が提案されている。着者らも選点法を相対する 2 辺が単純支持、他の 2 辺が任意支持の板に適用し、選点の選択によっては少ない自由度で高精度の解が得られる効率のよい解法であることを指摘した²⁾。

本報告では、境界条件の異なるより広範囲の問題に適用できる解法の確立を目的に、既に提案した選点法と Kantorovich の方法の結合による近似手法を構成する。すなわち解析過程は、2 つの独立変数に関する偏微分方程式に Timoshenko 梁の振動形を試験関数とする Kantorovich の方法を用いて常微分方程式に変換した後、それに選点法を適用し代数方程式に帰着させるものである。以下では、具体例として 4 辺固定板を取り上げ、解析過程を記述することにする。

2. Mindlin 板の基礎方程式

解析の対象とする Mindlin 板は、等方等質で一様な厚さの矩形板 ($L \times B, h$) とする (図-1)。

独立変数 x, y を無次元化した $\xi = x/L, \eta = y/B$ で表すことにし、たわみを w , x および y 方向の回転角を ψ_x, ψ_y と記せば、Mindlin 板の運動方程式は以下のようなになる³⁾。

$$\left. \begin{aligned} L_1 &\equiv L_1^* - (\rho h) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ L_2 &\equiv L_2^* - (\rho h^3/12) \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0 \\ L_3 &\equiv L_3^* - (\rho h^3/12) \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

ここに、 ρ = 密度、 t = 時間であり、 $L_1^* \sim L_3^*$ は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} L_1^* &= K G h (\nabla^2 w + \phi) \\ L_2^* &= \frac{E}{12} (1-\nu) \nabla^2 \psi_x + \frac{E}{12} \psi_x' + K G h (\frac{w}{h} - \psi_x) \\ L_3^* &= \frac{E}{12} (1-\nu) \nabla^2 \psi_y + \frac{E}{12} \psi_y' + K G h (\frac{w}{h} - \psi_y) \end{aligned} \right\} \text{--- (2)}$$

ここに、 $D = E h^3 / 12(1-\nu^2)$, E = 弾性係数
 ν = ポアソン比, K = セン断補正係数,
 G = セン断弾性係数, $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial \xi$, $(\cdot)'' = \partial^2(\cdot)/\partial \xi^2$,
 $\phi = \frac{\psi_x^2}{L} + \frac{\psi_y^2}{B}$, $\nabla^2 = (\partial^2/L^2) + (\partial^2/B^2)$

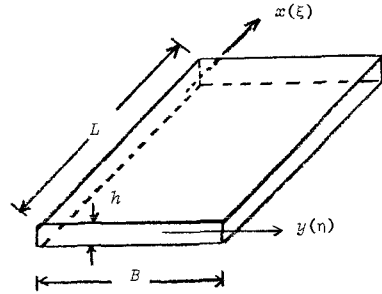


図-1 Mindlin 板の座標系

3. 両端固定の Timoshenko 梁の固有振動数および固有振動形

$\xi = 0$ と $\xi = 1$ で完全固定された Timoshenko 梁の固有振動数 ω とたわみ w および回転角中の振動形は次のように与えられる⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} W &= \delta \sinh b \xi + \cosh b \xi - K^* \delta \sinh b \xi - \cosh b \xi \\ \phi &= \delta b \cosh b \xi - b \delta \sinh b \xi - b \delta \cosh b \xi - b \delta \sinh b \xi \end{aligned} \right\} \text{--- (3)}$$

固有振動数 ω は次の振動数方程式より得られる。

$$2 - 2 \cosh b\alpha \cosh b\beta + \frac{b}{1-b^2\gamma^2} [b^2(r^2-s^2)+3s^2-r^2] \times \sinh b\alpha \cdot \sin b\beta = 0 \quad (4)$$

式(3), (4)に現われる諸量は次のように与えられる。

$$b^2 = \omega^2 \rho A L^2 / EI \quad (5)$$

ただし, A = 断面積, I = 断面2次モーメント

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{(r^2-s^2)+4/b^2} + (r+s)]^{1/2} \quad (6)$$

$$k_1 = b(\beta^2-s^2)/\beta L, \quad k_2 = b(\alpha^2+s^2)/\alpha L \quad (7)$$

$$k^* = k_1/k_2$$

$$r^2 = I/AL^2, \quad s^2 = EI/KAGL^2 \quad (8)$$

4. 常微分方程式への変換 (Kantrovich の方法)

式(1)に関する偏微分方程式(1)を η に関する常微分方程式に変換するため, 式(3)を試験関数とする Kantrovich の方法を適用する。式(1)の解は, 鋼板振動, 前提のもとに時間変数 t を分離し, $\tau = 0, 1$ で固定の条件を満たす Timoshenko 梁の振動形を用いて次のように表す。

$$\left. \begin{aligned} w &= L W(\xi) f_1(\eta) e^{i\omega t} \\ \psi &= \psi(\xi) f_2(\eta) e^{i\omega t} \\ \psi &= W(\xi) f_3(\eta) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)を式(1)に代入し, Kantrovich の方法

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 L_1 W(\xi) d\xi &= 0 \\ \int_0^1 L_2 \psi(\xi) d\xi &= 0 \\ \int_0^1 L_3 W(\xi) d\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を適用すると, $f_1(\eta), f_2(\eta)$ および $f_3(\eta)$ に関する常微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 f_1(\eta) + a_2 f_1'(\eta) + a_3 f_2(\eta) + a_4 f_2'(\eta) + \Omega^2 f_1(\eta) &= 0 \\ a_5 f_2(\eta) + a_6 f_2'(\eta) + a_7 f_3(\eta) + a_8 f_1(\eta) + a_9 f_2(\eta) + \Omega^2 f_2(\eta) &= 0 \\ a_{10} f_3(\eta) + a_{11} f_3'(\eta) + a_{12} f_2(\eta) + a_{13} f_1(\eta) + a_{14} f_3(\eta) + \Omega^2 f_3(\eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで, 固有振動数パラメータ Ω^2 は,

$$\Omega^2 = 2(1+\nu) \rho \omega^2 L^2 / E = \rho \omega^2 L^2 / G \quad (12)$$

であり, 係数 a_i ($i=1 \sim 14$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= K C_4 / C_5, \quad a_2 = K(L/B)^2, \quad a_3 = -K C_6 / C_5, \quad a_4 = -K(L/6) \\ a_5 &= \frac{2}{7} (C_1/C_2), \quad a_6 = (L/B)^2, \quad a_7 = \frac{1}{2} (1/6) (C_3/C_2), \\ a_8 &= -12K(L/6)^2 (C_4/C_2), \quad a_9 = -12K(L/6)^2, \quad a_{10} = C_4/C_5 \\ a_{11} &= \frac{2}{7} (1/6)^2, \quad a_{12} = \frac{1}{2} (1/6) (C_4/C_5) \\ a_{13} &= 12K(L/6)^2 (1/6)^2, \quad a_{14} = -12K(L/6)^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 \psi^2 d\xi, \quad C_2 = \int_0^1 \psi'^2 d\xi \\ C_3 &= \int_0^1 W^2 d\xi, \quad C_4 = \int_0^1 W' W d\xi \\ C_5 &= \int_0^1 W^2 d\xi, \quad C_6 = \int_0^1 \psi' W d\xi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

5. 選点法による離散化の続き

式(11)の選点法による離散化過程は文献(2)に従うのでここでは, 後の展開に必要なことのみ記す。

①内部選点と端点: η 方向に $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_M < \eta_{M+1} = 1$ の $M+2$ 個の点を配置する。内部選点 η_i ($i=1 \sim M$, M = 内部選点数) には, 区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre 多項式の選点を採用する。 $\eta_0 = 0$ と $\eta_{M+1} = 1$ は境界条件が指定される点に配置されるもので, 端点と呼ぶことにする。

②マトリックス $[A]$ と $[B]$: η に関する 1, 2 階微分を内部選点と端点における関数値 f_i ($i=1 \sim M$) の値) に結びつける $(M+2) \times (M+2)$ 次の行列である。

$$[f_i] = [A] \times [f_1] \quad (i=1 \sim M) \quad (15.a)$$

$$[f_2] = [B] \times [f_1] \quad (i=1 \sim M) \quad (15.b)$$

ここに, $(M+2) \times 1$ 次のベクトル, たとえば $[f_1]$ は次のようなものである。

$$[f_1]^T = (f_1(\eta_0), f_1(\eta_1), \dots, f_1(\eta_{M+1})) \quad (16)$$

③ $[f_2, a]$ と $[f_2, b]$: 式(11)は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下では, これらを分離し, 内部選点に関するものには添字 C を, 端点のそれには添字 E を付して表す。

$$[f_{2,C}]^T = (f_2(\eta_1), f_2(\eta_2), \dots, f_2(\eta_M)) \quad (17)$$

$$[f_{2,E}]^T = (f_2(\eta_0), f_2(\eta_{M+1})) \quad (i=1 \sim 3)$$

以上の準備のもとに, 考察している問題を定義するのに必要な $3(M+2)$ 個の未知数に対する条件は次のように与えられる。

a) 微分方程式の残差の条件 (3M 個の条件)

この条件は, 式(11)の内部選点における残差条件より求められる。これをマトリックス表示すれば次式となる。

$$[\alpha_C] \{ \delta_C \} + [\alpha_E] \{ \delta_E \} + \Omega^2 [I] \{ \delta_C \} = \{ 0 \} \quad (18)$$

ここに, ベクトル δ の内容を式(17)の表し方に従って示すと次式となる。

$$\{\delta_i\}^T = \{\{f_{1,c}\}^T, \{f_{2,c}\}^T, \{f_{3,c}\}^T\} \quad (19)$$

$$\{\delta_e\}^T = \{\{f_{1,e}\}^T, \{f_{2,e}\}^T, \{f_{3,e}\}^T\}$$

さらに、 $[\alpha_c]$ と $[\alpha_e]$ は、式(19)に現われる η の微分階数に応じて、式(15)のマトリックス $[A]$ と $[B]$ の成分で構成されるそれぞれ、 $3M \times 3M$ と $3M \times 6$ 次のマトリックスであり、 $[I]$ は $3M \times 3M$ 次の単位マトリックスである。

b)境界条件式 (6個の条件)

6個の条件は、 $u_0 = 0$ と $u_{n+1} = 1$ で規定される境界条件より定まる。

後の数値例で扱う固定および単純支持は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{固定;} w = v = \psi = 0 \\ \text{単純支持;} w = v = M_\psi = 0 \end{array} \right\} \quad (20)$$

ここで、曲げモーメント $M_\psi = D[\frac{\psi}{\Delta x} + \nu \frac{\psi}{\Delta x}]$

式(20)は式(19)を用いて、次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{固定;} f_1(\eta) = f_2(\eta) = f_3(\eta) = 0 \\ \text{単純支持;} f_1(\eta) = f_2(\eta) = f_3(\eta) = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

従って、固定と単純支持の組み合わせに対して得られる6個の条件は、式(15d)、式(21)より次のマトリックスで表示される。

$$[\beta_c]\{\delta_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad (22)$$

ここで、 $[\beta_c]$ と $[\beta_e]$ はそれぞれ、 $6 \times 3M$ と 6×6 次のマトリックスである。

以上、式(18)と式(22)によってすべての条件が表わされた。これら2つの式から $\{\delta_e\}$ を消去すれば、次式で表わされる固有値問題となる。

$$[\alpha]\{\delta_c\} + \alpha[I]\{\delta_c\} = \{0\} \quad (23)$$

ここに、 $3M \times 3M$ 次のマトリックス $[\alpha]$ は次のようである。

$$[\alpha] = [\alpha_c] - [\alpha_e][\beta_e]^{-1}[\beta_c] \quad (24)$$

6. 数値計算例

数値例は、せん断補正係数 $K = \pi/32$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。なお、境界条件は次のように表わす。例えばCCCCは、辺 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $x=L$ および $y=B$ の順にそれぞれ、固定、固定、固定および単純支持を表わす。

1)内部選点数 M の解の収束性に与える影響

表-1に4辺固定(CCCC)の正方形板($L/B=1$ 、 $h/L=0.1$)に対する収束性の検討を示す。結果は $M \geq 9$ について示したが、 x 、 y 方向の半波形の数 m 、 n のいずれの組み合わせに対して良好な収束性が認められる。なお、表には参考のために、Daweら²⁰⁾によるRayleigh-Ritz法の結果およびそれに対する本計算値の相対誤差(%)を併せて示した。Rayleigh-Ritz法の結果は厳密解の上界値を与えることおよび本計算値の相対誤差が $\approx 0.40\%$ の範囲にあることから、選点法とKantorovichの方法の組み合わせよりなる本解析法の結果は、厳密解の上界をほぼ与えている。

表-1 解 Ω の収束性の検討 (CCCC, $L/B=1$, $h/L=0.1$)

Ω		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	ϵ
		Present				Dawe	$\epsilon = \frac{(5)-(4)}{(5)} \times 100$
Mode	$m \quad n$	$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$		
1	1	1.593	1.593	1.593	1.593	1.588	0.31%
2	1	3.042	3.042	3.042	3.042	3.029	0.40%
1	2	3.031	3.031	3.031	3.031	3.029	0.00%
2	2	4.260	4.260	4.260	4.260	4.256	0.09%
1	3	5.038	5.038	5.038	5.038	5.040	0.04%

表-2 解 Ω の既往研究との比較 (CSCS, $L/B=1.0$)

h/L	Mode $m \quad n$	Solution procedure			
		Collocation method		F.S.M.	
		Present	Ref.2)		
0.1	1 1	1.308	1.300	1.300	
	2 1	2.420	2.394	2.394	
	1 2	2.893	2.884	2.885	
	2 2	3.870	3.839	3.839	
	3 1	4.269	4.231	4.232	
	1 3	4.943	4.935	4.936	
0.01	1 1	0.1414	0.1411	0.1411	
	2 1	0.2683	0.2668	0.2668	
	1 2	0.3378	0.3376	0.3376	
	2 2	0.4618	0.4604	0.4608	
	3 1	0.5008	0.4977	0.4977	
	1 3	0.6279	0.6279	0.6279	

表-3 解 Ω の既往研究との比較 (CCCS, $L/B=1.0$)

h/L	Mode $m \quad n$	Solution procedure	
		Present	F.S.M.
0.1	1 1	1.429	1.423
	2 1	2.720	2.705
	1 2	2.954	2.953
	2 2	4.055	4.054
	3 1	4.978	4.976

2) 本解析法の精度の検討 (他の解法との比較)

本解析法の精度を再度確認する意味で、単純支持とれた相対する2辺の方向の解に Levy 型の解を採用した選点法²⁾と有限帯板法(F.S.M.)⁴⁾との比較を、 $h/L=0.1$ と0.01の条件C.S.C.S.の正方形板をモデルに行う。

表-2に $M=11$ を用いた数種の m, n の組み合わせに対する固有振動数を示す。文献2)および文献6)の結果はほぼ同一であるので、これらを厳密解とみなせば、本解析値は厳密解の上界を与え、相対誤差は0.00~1.00%の範囲である。

表-3は、同様な目的から、条件C.C.C.S.の正方形板($h/L=0.1$)に対する本解析値をF.S.M.⁴⁾の結果とともに整理したものである。得られた解の傾向は、先の条件C.C.C.C.およびC.S.C.S.の場合に同様である。

以上のことから、本手法により算定した固有振動数は、厳密解の上界値を与えるものと思われる。

3) 各種の L/B と h/L を持つ4辺固定Mindlin板の固有振動数

表-4に、 $L/B=2.0, 1.0, 0.5$ および $h/L=0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ の4辺固定板の固有振動数を示す。計算には、 $M=11$ を用いた。

7. まとめ

以上に、選点法とKantorovichの方法の結合によるMindlin矩形板の固有振動解析法を提示し、4辺固定板を含む数値例を通じて提示した解法の特徴および有効性を明らかにした。本解法の基礎的な特性を要約すると次のようになる。

本解析法は、比較的少ない内部選点数により十分高精度の解(既往の研究結果と比較して、相対誤差1%以内)を与える。また、得られた解は数値例より判断する限り、厳密解の上界である。

参考文献

- 1) Leissa, A.W., Vibration of plates, NASA SP-160, U.S. Govt. Printing Office, 1969.; Recent research in plate vibrations. 1973-1976: complicating effects, Shock Vib. Dig., Vol. 10, pp. 21-35, 1978.; Plate vibration research, 1976-1980: complicating effects, Shock Vib. Dig., Vol. 13, pp. 19-36, 1981.
- 2) Mikami, T. and Yoshimura, J., Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates, Comput. Struct., Vol. 18, pp. 425-431, 1984.
- 3) Mindlin, R.D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- 4) Huang, T.C., The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple conditions, J. Appl. Mech., Vol. 28, pp. 579-584, 1961.
- 5) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L., Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, J. Sound Vib., Vol. 69, pp. 345-359, 1980.
- 6) Dawe, D.J., Finite strip models for vibration of Mindlin plates, J. Sound Vib., Vol. 59, pp. 441-452, 1978.
- 7) Roufaeil, O.L. and Dawe, D.J., Vibration analysis of rectangular Mindlin plates by the finite strip method, Comput. Struct., Vol. 12, pp. 833-842, 1980.

表-4 種々の L/B と h/L に対する $\Omega(C.C.C.C)$

L/B	Mode		h/L				
	m	n	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
2.0	1	1	0.4794	2.223	3.758	4.654	5.181
		2	1.243	5.373	8.095	9.304	9.897
	2	1	0.6200	2.851	4.730	5.810	6.440
		2	1.382	5.921	8.868	10.20	10.88
1.0	1	1	0.1758	0.8559	1.593	2.167	2.594
		2	0.3589	1.713	3.042	3.940	4.527
	2	2	0.5281	2.478	4.260	5.374	6.065
		3	0.8057	3.688	6.073	7.416	8.198
0.5	1	1	0.1199	0.5880	1.113	1.544	1.879
		2	0.1554	0.7602	1.429	1.964	2.374
	2	1	0.3117	1.495	2.682	3.500	4.040
		2	0.3463	1.657	2.954	3.841	4.425