

I-13 選点法による円板の非線形曲げ解析

北海道大学工学部

正会員 芳村 仁

北海道大学工学部

正会員 三上 隆

北海道開発コンサルタント

正会員 工藤 浩史

1. はじめに

円板の大たわみ問題は、非線形微分方程式で記述される非線形境界値問題であり、その解を厳密に求めることは不可能に近く、通常は Ritz 法、摂動法および差分法、有限要素法に代表される数値計算手法によらなければならない。本報告は、選点の取り方によっては解の高精度化および未知数の減少などの利点を有する選点法を円板の幾何学的非線形問題に適用し、その有効性の確認を目的としたものである。さらに、円板の大たわみ問題の一解析的手法として、簡便性からしばしば用いられる Berger の方法¹⁾の妥当性について、数値計算を通じて検討したものである。

2. 基礎方程式

等分荷重を受け、等厚等質な一様な厚さの円板の支配方程式は、von Kármán による板の大変形理論によれば次のように与えられる。²⁾

$$\rho^2 \frac{d^2 \psi^*}{d\rho^2} + \rho \frac{d\psi^*}{d\rho} - \psi^* + \frac{1-\nu^2}{2} \rho \left(\frac{dW^*}{d\rho} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\rho^3 \frac{d^4 W^*}{d\rho^4} + 2\rho^2 \frac{d^3 W^*}{d\rho^3} - \rho \frac{d^2 W^*}{d\rho^2} + \frac{dW^*}{d\rho} - 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \rho^2 \left(\frac{dW^*}{d\rho} \frac{d\psi^*}{d\rho} + \psi^* \frac{d^2 W^*}{d\rho^2} \right) = \rho^3 p \quad (2)$$

ただし、 $\rho = r/a$, $W^* = W/a$, $p = q a^3 / D$, $\psi^* = (1-\nu) \psi / E h a$, r = 半径方向座標, a = 半径, W = たわみ, q = 荷重強度, D = 板剛性, ν = ポアソン比, E = 弾性係数, h = 厚さ。 ψ は半径方向合応力 N_r , 周方向合応力 N_θ と次の関係式が成立する応力変数である。

$$N_r = \psi / r, \quad N_\theta = d\psi / dr \quad (3)$$

数値解で考慮した境界条件 ($\rho = 1$) は次のようなものである。

Rigidly clamped edge (半径方向に動かない周)

$$W^* = dW^*/d\rho = 0, \quad \rho d\psi^*/d\rho - \psi^* = 0 \quad (4.a)$$

Loosely clamped edge (半径方向に動く周)

$$W^* = dW^*/d\rho = \psi = 0 \quad (4.b)$$

Hinged edge (半径方向に動かない周)

$$W^* = 0, \quad \rho^2 dW^*/d\rho^2 + \nu dW^*/d\rho = 0, \quad \rho d\psi^*/d\rho - \psi^* = 0 \quad (4.c)$$

Simply supported edge (半径方向に動く周)

$$W^* = \psi^* = 0, \quad \rho^2 dW^*/d\rho^2 + \nu dW^*/d\rho = 0 \quad (4.d)$$

以下では、式 (4.a) ~ (4.d) で規定される境界条件をそれぞれ、R.C., L.C., H.H. および S.S. と略記する。円板の中央 ($\rho = 0$) で成立する条件は次式である。

$$dW^*/d\rho = \rho^2 N^*/d\rho = \psi^* = 0 \quad (5)$$

3. 定式化

未知関数 W^* と ψ^* を次のべき級数で仮定する。

$$W^* = \sum_{i=1}^{M+1} a_i \rho^{i-1}, \quad \psi^* = \sum_{i=1}^{M+2} b_i \rho^{i-1} \quad (6)$$

ここで、 a_i, b_i = 未知係数, M = 内部選点数

式 (6) に含まれる $2M+5$ 個の未知係数を定めるための条件式は、支配方程式 (1), (2) の内部選点 ρ_i ($i=1 \sim M$) における残差条件 ($2M$ 個) および式 (4) と式 (5) から得られる 6 個の条件で与えられる。その際、式 (1), (2) に現れる導関数を、 $\rho = 0, 1$ および内部選点における関数値 (W^*, ψ^*) で表わし、考察している問題を内部選点における関数値を未知量とする連立方程式系で表わす。なお、得られる方程式系は非線形なので、次のような手順で逐次近似解を求める。1 ステップにおける支配方程式 (1), (2) を次のように表わす。

$$\rho^2 \left(\frac{d^2 \psi^*}{d\rho^2} \right)_j + \rho \left(\frac{d\psi^*}{d\rho} \right)_j - (\psi^*)_j + \frac{1-\nu^2}{2} \rho \left(\frac{dW^*}{d\rho} \right)_j \left(\frac{dW^*}{d\rho} \right)_{j-1} = 0 \quad (1)'$$

$$\rho^3 \left(\frac{d^4 W^*}{d\rho^4} \right)_j + 2\rho^2 \left(\frac{d^3 W^*}{d\rho^3} \right)_j - \rho \left(\frac{d^2 W^*}{d\rho^2} \right)_j + \left(\frac{dW^*}{d\rho} \right)_j - 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \rho^2 \left\{ \left(\frac{d\psi^*}{d\rho} \right)_j \left(\frac{dW^*}{d\rho} \right)_{j-1} + (\psi^*)_j \left(\frac{d^2 W^*}{d\rho^2} \right)_{j-1} \right\} = \rho^3 p \quad (2)'$$

(a) 第 1 ステップ ($j = 1$)

式(2)'の下線部分を無視して、線形解 $\{W^*_{j1}\}$ を次式より求める。

$$[K]_1 \{\delta f_1\} = \{F\}_1 \quad \text{-----}(7)$$

ここで、 $[K]_1 = (M \times M)$ の係数マトリックス、 $\{F\}_1 = (M \times 1)$ の荷重ベクトル、 $\{\delta f_1\}^T = \{W^*(p_1), W^*(p_2), \dots, W^*(p_M)\}$ 。

(b) 第2ステップ ($j \geq 2$)

近似解 $\{\delta f_1\}$ を式(2)'の下線部分に用いて、式(1)', 式(2)'より第2近似解 $\{\delta f_2\}$ を次式より求める。

$$[K]_j \{\delta f_j\} = \{F\}_j \quad \text{-----}(8)$$

ここで、 $[K]_j = (2M \times 2M)$ の係数マトリックス、 $\{F\}_j = (2M \times 1)$ の荷重ベクトル、 $\{\delta f_j\}^T = \{W^*(p_1), W^*(p_2), \dots, W^*(p_M), \psi^*(p_1), \psi^*(p_2), \dots, \psi^*(p_M)\}$ 。

以下、第2ステップの手順を所要の精度の解が得られるまで繰り返す。その際、次式を用いて解の収束を早める。⁴⁾

$$\{\delta f_j\} = (1 - \beta) \{\delta f_{j-1}\} + \beta \{\delta f_j\} \quad (j \geq 2) \quad \text{-----}(9)$$

ここで、 β = 加速係数。

4. 数値計算例

ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、式(9)の加速係数 β は種々の荷重強度および境界条件に対する計算結果より判断して、 $\beta = 0.75$ とした。この値で十数回の繰り返し演算で収束解が得られる。解の収束判定は次式による。

$$|(W_0)_j - (W_0)_{j-1}| / (W_0)_{j-1} < 10^{-8} \quad \text{-----}(10)$$

ここで、 W_0 = 円板中央でのたわみ。

(1) 選点の取り方の解の精度に及ぼす影響

表-1は、内部選点に shifted Legendre 多項式の零点 (L-選点) と shifted Chebyshev 多項式の零点 (C-選点) を用い、数種の内部選点数 M ($= 6 \sim 11$) による条件 R.C. の板中央のたわみ (W_0) を示したものである。表の各ブロックで、上段の数値は L-選点、下段のそれは C-選点の結果である。これによると、L-選点の結果は内部選点数 M および荷重強度 qa^4/Eh^4 によらず一定値を示し、一方 C-選点の結果は、内部選点数が大きくなれば

L-選点の結果と一致するが、内部選点数が小さい場合また荷重強度が大きくなれば精度は幾分悪くなる。以下では、L-選点、 $M = 11$ を採用する。

(2) 振動解との比較

図-1は、条件 R.C. の板中央におけるたわみ W_0 を振動解 (第1近似)²⁾ と比較したものである。本解析結果と第1近似振動解は、荷重強度の小さい領域ではほぼ完全に一致しているが、荷重強度が大きくなるにつれて、両者の差が大きくなる傾向にある ($qa^4/Eh^4 = 30$ で誤差 2%)。図には参考のために、第2近似振動解も併記した。これによれば、第2近似振動解は本解析結果により近いものとなっている ($qa^4/Eh^4 = 30$ で誤差 0.9%)。なお、各振動解は次式より求められる。

第1近似振動解²⁾;

$$qa^4/Eh^4 = 5.86089(W_0/h) + 3.19788(W_0/h)^3 \quad \text{-----}(11.a)$$

第2近似振動解;

$$qa^4/Eh^4 = 5.86089(W_0/h) + 3.19788(W_0/h)^3 + 0.22514(W_0/h)^5 \quad \text{-----}(11.b)$$

図-2は、条件 R.C. の板周辺における半径方向膜応力 σ_r^m と曲げ応力 σ_θ^b を振動解と比較したものである。これによると、手法の相違の解に及ぼす影響はたわみの場合に類似であることがわかる。振動解を表示すれば以下となる。

第1近似振動解²⁾;

$$\begin{aligned} \sigma_r^m a^2/Eh^2 &= 0.97619(W_0/h)^2 - 0.029026(W_0/h)^4 \\ \sigma_\theta^b a^2/Eh^2 &= 2.85714(W_0/h) - 0.48079(W_0/h)^3 \end{aligned} \quad \text{-----}(12.a)$$

第2近似振動解;

表-1 選点の取り方の解(W_0/h)に与える影響

qa^4/Eh^4	W_0/h					
	$M=6$	$M=7$	$M=8$	$M=9$	$M=10$	$M=11$
5	0.6796	0.6796	0.6796	0.6796	0.6796	0.6796
	0.6796	0.6796	0.6796	0.6796	0.6796	0.6796
10	1.0520	1.0520	1.0520	1.0520	1.0520	1.0520
	1.0518	1.0520	1.0520	1.0520	1.0520	1.0520
20	1.4938	1.4938	1.4938	1.4938	1.4938	1.4938
	1.4932	1.4937	1.4938	1.4938	1.4938	1.4938
30	1.7862	1.7862	1.7862	1.7862	1.7862	1.7862
	1.7850	1.7860	1.7862	1.7862	1.7862	1.7862
40	2.0115	2.0115	2.0115	2.0115	2.0115	2.0115
	2.0097	2.0112	2.0115	2.0115	2.0115	2.0115
50	2.1980	2.1980	2.1980	2.1980	2.1980	2.1980
	2.1954	2.1975	2.1979	2.1980	2.1980	2.1980

Roots of shifted Legendre polynomial
Roots of shifted Chebyshev polynomial

$$\begin{aligned} \sigma_r^m a^2 / E h^2 &= 0.47619 (W_0/h)^2 + 0.03164 (W_0/h)^4 - 0.001301 (W_0/h)^6 \\ \sigma_r^b a^2 / E h^2 &= 4.39560 (W_0/h) + 1.11270 (W_0/h)^3 - 0.005722 (W_0/h)^5 \end{aligned} \quad (12.b)$$

(3) Berger理論の妥当性の検討

円板に対する Berger の支配方程式は次のようである。¹⁾

$$\nabla^4 w - \alpha^2 \nabla^2 w = q/D \quad (13)$$

$$\text{ここで, } \nabla^2 = d^2/dr^2 + d/r dr \quad (14), \quad \alpha^2 = (12/h^3) \{ du/dr + u/r + (dw/dr)^2/2 \} \quad (15)$$

Berger の方法は、半径方向ひずみと円周方向ひずみの和に相当する α^2 が曲がらぬ板の中央曲面中で定数を保つものと仮定し、定数 α^2 とともに式(13)の積分定数を板の境界上で規定されるすべての条件を満たすようにするものである。

さて、Berger の方法を可動周の円板(L.C. および S.S.)に適用すれば、解の信頼性が失われることが知られている⁵⁾。図-3は、再確認の意味で、条件 R.C. および L.C. の場合の板中心のたわみ W_0 を、本解析法と Berger の方法により求め比較したものである。図より明らかに、両手法の差は、周方向に動く条件(L.C.) および荷重強度が大さくなる程、著しくなっている(条件 S.S. および H.H. の場合も同様である)。

図-4および図-5はそれぞれ、条件 R.C., L.C. および条件 H.H., S.S. に対して、Berger 理論で用いられている第1不変量 α^2 (式(15))の値を本解析法により得られる結果に基づき算定し、その半径方向 ρ の変化を示したものである。これによると、条件 R.C. および H.H. に対しては、 α^2 は荷重強度によらず正の値を示すが、荷重強度が大さくなれば一定とはいえない。一方条件 L.C. および S.S. に対しては、荷重強度によらず α^2 の値は正、負の値をとり、Berger 理論における第1不変量 α^2 の仮定が成立しえない分布形状になっている。

5. まとめ

本報告は、円板の幾何学的非線形問題に対する選点法の適用可能性を検討するとともに、提示した手法を用い

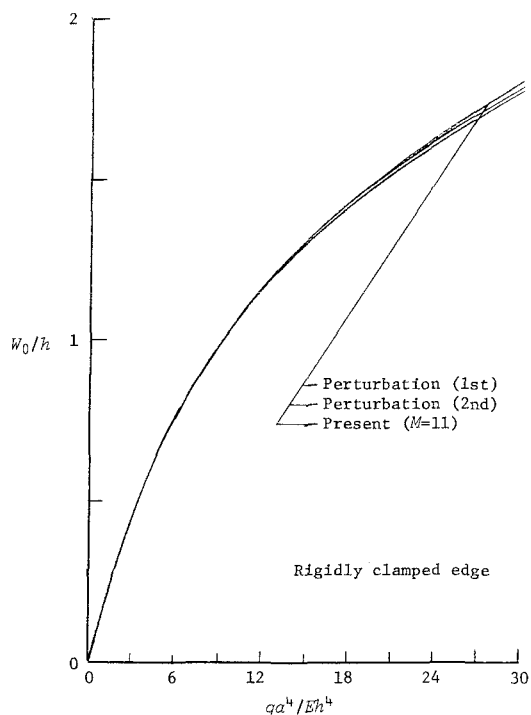


図-1 本解析結果と摂動解の比較(板中央の W_0)

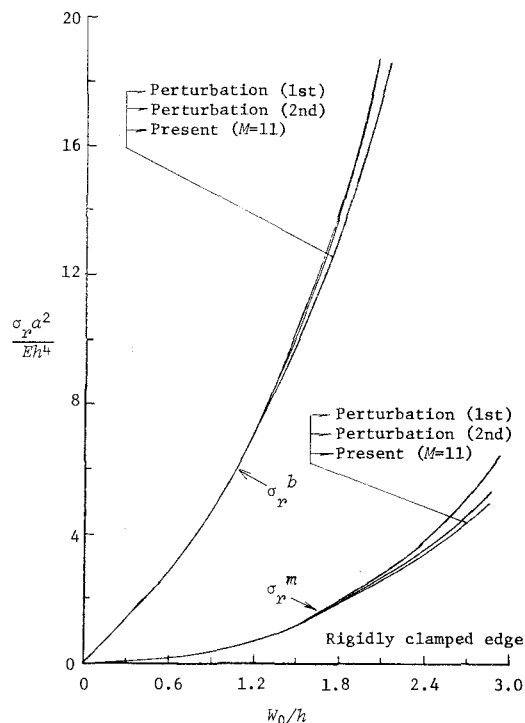


図-2 本解析結果と摂動解の比較(板周縁の σ_r)

て Berger 理論の妥当性について調べたものである。
得られた主な成果を要約するに以下のようになる。

(1) 提示した手法は、比較的少ない自由度で高精度の解析が可能である。

(2) Berger 理論に用いられる第1不変量の仮定は、可動周および荷重強度が大きくなる場合には成立しない。

参考文献

1) H.M. Berger, A new approach to the analysis of large deflections of plates, ASME J. Appl. Mech., Vol. 22, pp. 465~472, 1955.

2) C.Y. Chia, Nonlinear Analysis of Plates, McGRAW-HILL, 1980.

3) 三上 隆・荻村 仁, 変位法による回転殻の固有振動数の解析, 土木学会論文報告集, 第335号, pp. 69~78, 1983.

4) J.L. Nowinski and H. Ohnabe, On certain inconsistencies in Berger equations for large deflections of elastic plates, Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, pp. 165~170, 1972.

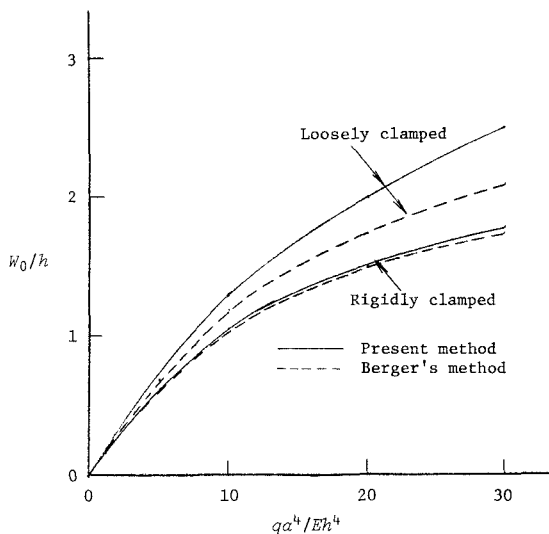


図-3 本計算値と Berger の解の比較

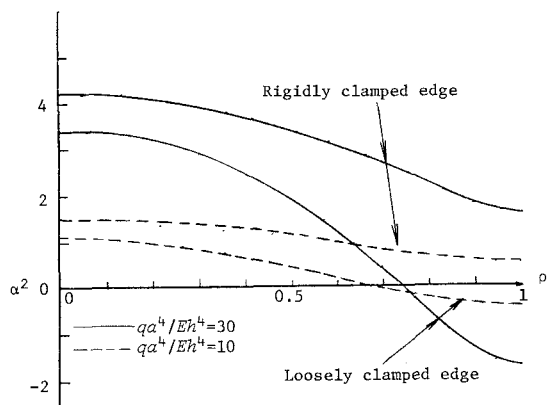


図-4 R.C.とL.C.条件に対する Berger 理論の第1不変量の分布状況

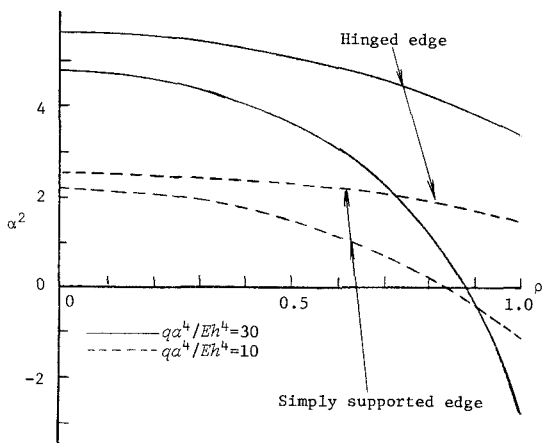


図-5 H.H.とS.S.条件に対する Berger 理論の第1不変量の分布状況