

I — 12 構造的に曲線直交異方性をもつ円板の対称曲げ

北大工学部	正会員	荏澤憲吉
北大工学部	正会員	芳村 仁
北大工学部		野口 浩

1. まえがき

円板が半径方向と円周方向に多数のリブ（スティフナーまたはストラップ）によって補剛される場合、その板としての曲げ剛性は主として補剛材としてのリブの剛性で代表されることが多い。したがって、このような板は、力学的に半径方向と円周方向の直交二方向に異なる剛度をもつ曲線直交異方性を示す。さらに、リブの放射状配置のために、半径方向の剛度が半径の逆数に比例して変化する半径方向変剛度板となる。このような力学的性質は、また、曲線格子構造の全体的な挙動においても見られることである。

本報告では、そのような構造的に曲線直交異方性を示す円板に横荷重が作用する時の対称曲げについて、変形と応力特性を明らかにする。

図1に、各種の円板の直交2方向の曲げ剛度の分布図を示す。半径方向、円周方向座標をそれぞれ r 、 θ として、その方向の曲げ剛性 D_r 、 D_θ の大きさが半径方向にどのように変化していくかをグラフで表わした。

等厚等方性板では D_r と D_θ はともに等しくかつ一定である。変厚板では D_r 、 D_θ は半径方向に変化するがどこでもつねに $D_r = D_\theta$ である。また、一般に曲線直交異方性といわれている板の場合は、 D_r と D_θ は異なるが半径方向には一定であると考えることが多く、したがって材料的異方性ということができる。これに対して、円周方向の剛度 D_θ は一定であるが、半径方向には剛度 D_r が $1/r$ に比例する性質を持つのが、構造的に曲線直交異方性をもつ円板である。すなわち、材料的な異方性と構造的な異方性とは、曲線座標においては、半径方向の剛度 D_r が、 r に関係するか否かに大きな相違がある。

これらの力学的に異なる性質を持つ円板の変形と応力分布の違いなどについては文献1)において既に明らかにした。

2. 構造的曲線直交異方性円板の基礎方程式とその解

補剛板が曲げをうける場合、互いに直交する補剛材において、それぞれに生じる縦ひずみは互いに影響を及ぼさないの、ポアソン比は0とすることができる。対称曲げをうける円板のたわみを w とすると、半径方向と円周方向の曲げモーメント、さらにそれらと半径方向せん断力との関係式が次のように表わされる。

$$M_r = -D_r \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad M_\theta = -D_\theta \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad Q_r = \frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) \quad \dots\dots (1)_{1,2,3}$$

いま一様な分布荷重 p が円板の全域に作用している場合を考えると、つりあいからせん断力 Q_r は荷重強度 p によって表わされる。(1)式から M_r と M_θ を消去した式にそれを考慮すると、次式となる。

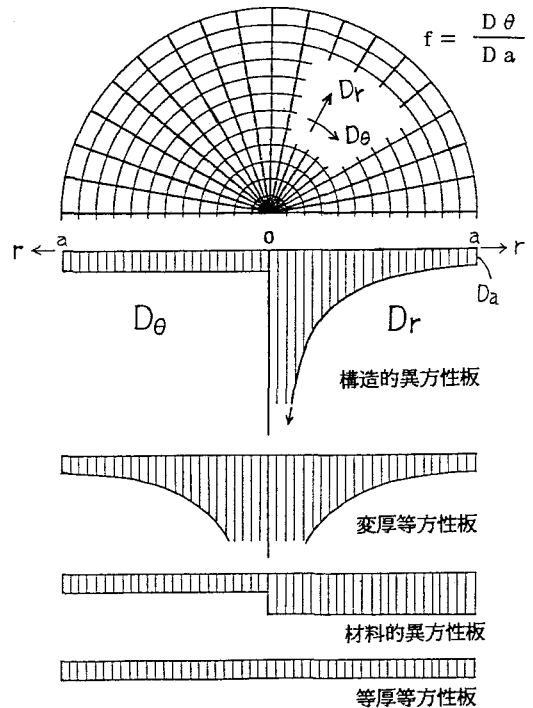


図1 各種の円板の直交2方向の剛度

$$D_r \frac{d^3 W}{dr^3} + \left(\frac{dD_r}{dr} + \frac{D_r}{r} \right) \frac{d^2 W}{dr^2} - D_\theta \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} = -Q_r = \frac{r}{2} p \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、半径方向剛度 D_r が r の関数で $1/r$ に比例することから、 $D_r = (a/r) D_a$ (ここに a は円板の半径で、 D_a はその外縁 $r=a$ における半径方向曲げ剛度) と表わして代入し、無次元座標 $\rho = r/a$ を定義して導入すれば、

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d^3 W}{d\rho^3} - \frac{f}{\rho^3} \frac{dW}{d\rho} = \frac{p a^4}{2 D_a} \quad \dots\dots\dots (3)$$

この (3) 式が基礎方程式である。この式の中における f は、 $f = D_\theta/D_a$ で定義される直交二方向の剛比を表わす。(このような板の場合、半径方向に剛比が変化しているため、外縁の位置 $r=a$ における剛比を基準とした。) この基礎方程式は係数が変数である微分方程式であるので、無限級数形式の解となる。

この基礎方程式において、 $\rho=0$ は微分方程式の確定特異点である。この確定特異点のまわりで、この方程式の級数解を得るためにまず、Frobenius の方法を用いる。(3) 式の解を、余解と特解に区別して、そのうちの余解を、 $W_0 = \rho^m (a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 + \dots) = \rho^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ と仮定して代入すると、インディシャル方程式より $m=0$ が得られ、各べきの係数が 0 でなければならないことから、級数の各係数が求まる。また特解も同様に級数解に仮定し、方程式に代入して各係数を定めることによって得られる。その一般解は次のようになる。

$$W = W_0 + W_p = \frac{p a^4}{D_a} \left[A_0 + A_2 \rho^2 + \sum_{n=3}^{\infty} A_n \rho^n + \sum_{n=5}^{\infty} P_n \rho^n \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 A_0 と A_2 は任意定数で、三項目の係数 A_n と特解項の係数 P_n は順次前の項の係数によって決められる係数で、次のように与えられる。

$$A_{n+1} = \frac{f}{(n+1)(n-1)} A_n \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots\dots (5)_{1,2,3}$$

$$P_5 = \frac{1}{120}, \quad P_{n+1} = \frac{f}{(n+1)(n-1)} P_n \quad (n \geq 5)$$

このとき、半径方向と円周方向の曲げモーメントの表現式は次のようになる。

$$M_r = p a^2 \left[-2 \cdot 1 A_2 \frac{1}{\rho} - \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) A_n \rho^{n-3} - \sum_{n=5}^{\infty} n(n-1) P_n \rho^{n-3} \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$M_\theta = p a^2 f \left[-2 A_2 - \sum_{n=3}^{\infty} n A_n \rho^{n-2} - \sum_{n=5}^{\infty} n P_n \rho^{n-2} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

つぎに、別の形の解として、 $\rho=1$ のまわりでこの方程式の級数解を得るには、まず、方程式の係数を $\rho=1$ において Taylor 展開する。すなわち、

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)^k, \quad \frac{1}{\rho^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-\rho)^k, \quad \frac{1}{\rho^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)}{2!} (1-\rho)^k \quad \dots\dots\dots (8)_{1,2,3}$$

そこに余解を、 $W_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-\rho)^n$ のように仮定して方程式に代入し、各係数の満たすべき関係を誘導する。また特解においても同様である。そのときの一般解は、次のようになる。

$$W = W_0 + W_p = \frac{p a^4}{D_a} \left[A_0 + A_1 (1-\rho) + A_2 (1-\rho)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (A_n + P_n) (1-\rho)^n \right] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここにおいて、 A_0 、 A_1 および A_2 は任意の定数で、それ以降の A_n および特解項の係数 P_n は次の様に与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{f}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-2} k A_k \quad (n \geq 2), & P_3 &= -\frac{1}{12}, & P_4 &= \frac{1}{24} \\ P_n &= -\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left[\sum_{k=3}^{n-1} k(k-1)(k-2)(n-k+1) P_k - \frac{f}{2} \sum_{k=3}^{n-2} k(n-k)(n-k-1) P_k \right] \quad (n \geq 5) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)_{1,4}$$

この解の場合の曲げモーメントは、次のような式になる。

$$M_r = p a^2 \frac{1}{\rho} \left[-2 A_2 - \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) (A_n + P_n) (1-\rho)^{n-2} \right] \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$M_\theta = p a^2 \frac{f}{\rho} \left[A_1 + 2 A_2 (1-\rho) + \sum_{n=3}^{\infty} n (A_n + P_n) (1-\rho)^{n-1} \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

以上で、基礎方程式の解を二つ誘導した。それぞれ $\rho = 0$ および $\rho = 1$ のまわりの級数解であるが、(4)式は、 $\rho = 0$ において、たわみ角 $(dw/dr) = 0$ を自動的に満たしている解であるため、任意定数が (9) 式に比べてひとつ少ないことになる。解析においては、それぞれの解における任意定数は、その円板の支持条件を満足するように定められることになる。

3. 構造的曲線直交異方性円板の変形と応力分布

構造的曲線直交異方性円板の変形について、等分布荷重が満載したときの、円板中央に生じる最大たわみ $w_{\max}$ を、周辺固定円板と周辺単純支持円板の場合について図2に示す。縦軸がたわみで、横軸が剛比 f である。剛比 f が大きいということは、半径方向剛性に比べて、円周方向剛性が強いということであり、逆に剛比 $f = 0$ とは円周方向剛性が0と考えられる場合である。細長板の円筒曲げの場合では支持辺と平行な方向の剛性は変形には関係しないが、円板（またはリング板）の場合には、円周方向の剛性の影響を受け、剛比 f が大きい円板ほど変形が小さくなることがわかる。

等分布荷重を受ける構造的曲線直交異方性円板の応力分布として、半径方向と円周方向の曲げモーメント M_r および M_θ の分布図を図3に示す。横軸が円板の中央0から外縁Aまでの位置であり、縦軸がモーメントの大きさである。破線で等方性板の場合も示してあるが、 M_r の分布において、構造的曲線直交異方性円板の場合では中心0の近傍において急激に大きくなり無限大になることが特徴的である。これは、このよう

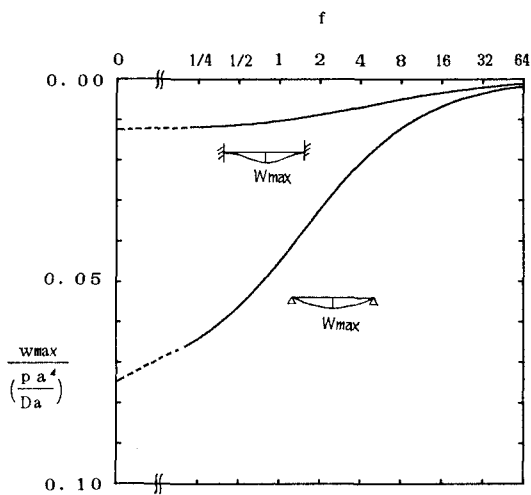


図2 構造的曲線直交異方性円板の最大たわみと剛比の関係

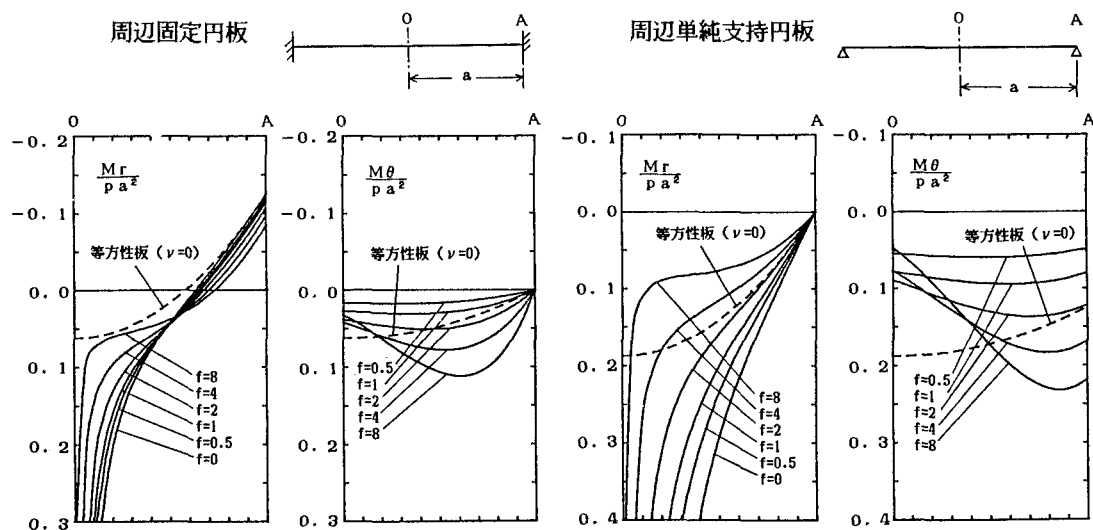


図3 構造的曲線直交異方性円板の曲げモーメント分布

な円板の場合、半径方向剛性が中心において無限大となることによる（図1）。図3において、モーメント分布は、変形と同様に剛比 f の大きさによって異なっている。そして剛比 f が大きくなるほど分布形が変化し、 M_θ においては最大モーメントの位置が円板中央から外縁の方に移っていくことが認められる。

4. 半径方向リブ（スチフナー）における応力分布

構造的異方性円板の断面力が得られると、リブの応力は容易に求められる。たとえば、半径方向リブの最大曲げ応力は、

$$\sigma_{\max} = \frac{M_r \theta_0 r}{W} = \frac{p \theta_0 a^3}{W} \left(\frac{M_r}{p a^2} r \right) \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 θ_0 : リブ間隔角度、 W : リブの断面係数である。この $\sigma_{\max}$ の分布を、周辺固定円板の場合について示すと、剛比 $f = 1$ のときには図4のグラフの破線

(a)、剛比 $f = 1/2$ のときには点線 (c) のようになる。

ところで、半径方向リブは放射状配置のため、外側に向うにしたがってその間隔が広がるので、図5(b)のように外側部分を2倍に補剛することが考えられる。このような円板の場合の解析は、内側の円板と外側のリング板に分けて、その境界において、たわみ、回転角、曲げモーメントの連続条件を満たすように行われる。特にこのとき、外側リング板の解には、Taylor展開した解 (9) 式の方を用いなくてはならない。

そのようにして、半径方向 $r = a/2$ の位置において補剛配置が変わる場合 (b) を解析した結果が、図4のグラフのなかの実線である。応力の再配分が行われるためにその効果は2倍にまではならないが、 $f = 1$ の場合 (a) と比べると、外側の補剛材を増すことによって、固定辺において生じていた大きな応力がかなり減少して、 $f = 1/2$ の場合の分布に近づいていることがわかる。

5. あとがき

構造的に曲線直交異方性をもつ円板に一樣な分布荷重が作用するような対称曲げ問題について、その基礎方程式を誘導し、その解として2種類の級数解を与えた。

それらの解を用いて、構造的に曲線直交異方性をもつ円板の変形と応力についての解析を行い、そ

の結果を示した。特に、円周方向の剛性がそれらにかなりの影響を与えていることが明らかにできた。

また、リブの補剛配置が途中で変わる場合の解析結果も示し、比較検討を加えた。

(参考文献)

1) 荻澤憲吉、芳村仁：構造的に曲線直交異方性をもつ円板およびリング板の横荷重による対称曲げ，第36回応用力学連合講演会講演論文抄録集，1986.12

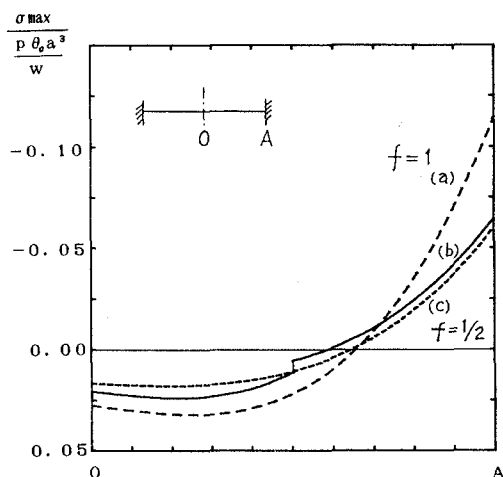


図4 半径方向リブの応力分布

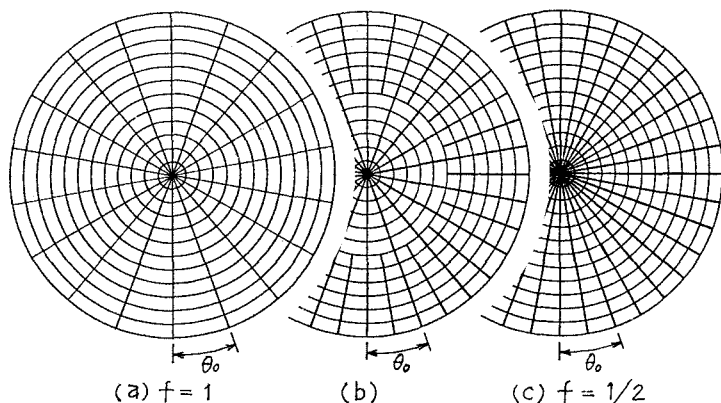


図5 半径方向補剛配置の例