

Ⅰ—Ⅱ 平行四辺形板の有限要素法による曲げ解析と実験

北海道大学工学部	正 員	渡辺 昇
北海道大学工学部	正 員	佐藤 浩一
北海道大学工学部	正 員	林川 俊郎
北海道大学大学院	学生員	上田 裕志

1 解析理論

1.1 要素の接点力と接点変位

要素面をx-y面となるように座標系を決める。接点は1次外接点1、2、3と2次外接点4、5、6の6つの接点を考える。変位はZ方向のたわみ w_i 、スロープ θ_{xi} 、 θ_{yi} 、自由度は合計9である。2次外接点についてはスロープ θ_i 、自由度は合計3である。接点変位ベクトル $\{\delta_e\}$ 、接点外力ベクトル $\{f_e\}$ はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \{\delta_e\} &= [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}]^T \\ \{f_e\} &= [z_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ z_2 \ M_{x2} \ M_{y2} \ z_3 \ M_{x3} \ M_{y3}]^T \end{aligned}$$

図1に示す三角形要素をコンブレートエレメントとよび、それを図2のようにさらに3つに分けた要素をサブエレメントとよぶ。サブエレメントの内部の境界辺の連続性を満足させるために辺の中央に接点7、8、9を考える。サブエレメント3についての接点変位ベクトル $\{\delta_s\}$ は次のようになる。

$$\{\delta_s^{(3)}\} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_0 \ \theta_{x0} \ \theta_{y0}]^T$$

1.2 サブエレメントの変位関数

サブエレメントの変位関数は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_e^{(1)} \\ \phi_e^{(2)} \\ \phi_e^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0^{(1)} \\ \phi_0^{(2)} \\ \phi_0^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta_0 \end{Bmatrix}$$

ここで

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \delta_0 \end{Bmatrix} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ w_0 \ \theta_{x0} \ \theta_{y0}]^T$$

図2の要素内で仮定された0点の変位 w_0 、 θ_{x0} 、 θ_{y0} はそれぞれの外接点の変位で表すことができ、最終的には変位の自由度は12となる。したがって変位関数は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ w^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_e^{(1)} \\ \phi_e^{(2)} \\ \phi_e^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \phi_0^{(1)} \\ \phi_0^{(2)} \\ \phi_0^{(3)} \end{Bmatrix} [L] \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \\ \phi^{(3)} \end{Bmatrix} \{\delta\}$$

1.3 剛性マトリックス

板の曲げ問題においては、板のひずみ $\{\epsilon^{(i)}\}$ は次のように表せる。

$$\{\epsilon^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [T^{(i)}] \{\delta\} \quad \text{ここで、} \quad [T^{(i)}] = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 \phi^{(i)}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

したがって、接点のひずみを $\{\epsilon_n^{(i)}\}$ と表すならば、

$$\{\epsilon_n^{(i)}\} = [T_n^{(i)}] \{\delta\}$$

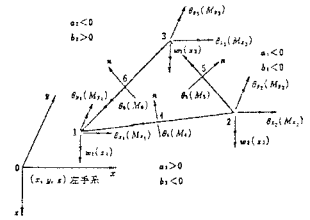


図 1

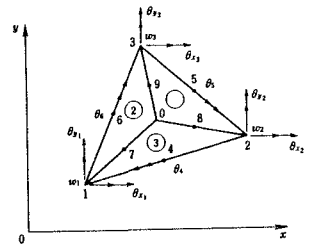


図 2

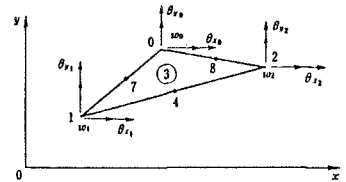


図 3

サブエレメント内における線形ひずみ変化は ϕ_x という線形補間関数によってつぎのように表される。

$$\{\varepsilon^{(a)}\} = \begin{bmatrix} \phi_x & 0 & 0 \\ 0 & \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & \phi_x \end{bmatrix} \{\varepsilon_n^{(a)}\} = [\phi_x] \{\varepsilon_n^{(a)}\} \quad [\phi_x] = \begin{bmatrix} \phi_x & 0 & 0 \\ 0 & \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & \phi_x \end{bmatrix}, \quad \phi_x = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]$$

ひずみエネルギーはモーメントと曲率またはねじり率の積を積分したものである。

$$U^{(a)} = \frac{1}{2} \int_A \{m^{(a)}\}^T \{\varepsilon^{(a)}\} dA$$

内部モーメントは

[D] は剛性マトリックスで等方弾性体では、

$$\{m^{(a)}\} = \begin{Bmatrix} m_x^{(a)} \\ m_y^{(a)} \\ m_{xy}^{(a)} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon^{(a)}\} \quad [D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

これより

$$U^{(a)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K^{(a)}] \{\delta\} \quad \text{ここで}$$

$$[K^{(a)}] = [T_n^{(a)}]^T [G^{(a)}] [T_n^{(a)}], \quad [G^{(a)}] = \int_A [\phi_x]^T [D^{(a)}] [\phi_x] dA$$

ある1つのコンブレートエレメントの剛性マトリックスはサブエレメントの剛性マトリックスの和として求められるので、次のように表される。

$$[K_N] = [K^{(1)}] + [K^{(2)}] + [K^{(3)}]$$

1.4 要素モーメント、接点モーメントの計算

剛性方程式を解いた結果からえられた接点変位 $\{\delta_g\}$ より、各サブエレメントに関する接点ひずみは次式からもとめられる。

$$\{\varepsilon_n^{(a)}\} = [T_n^{(a)}] \left[\frac{I}{H} \right] \{\delta_g\}$$

接点ひずみから接点モーメントが得られる。

$$\{m_n^{(a)}\} = [D'] \{\varepsilon_n^{(a)}\}$$

各サブエレメントで求められた接点モーメント $\{m_n^{(1)}\}$ 、 $\{m_n^{(2)}\}$ 、 $\{m_n^{(3)}\}$ より、コンブレートエレメントに関する接点モーメントは次のように求める。

$$\{m_n\} = \frac{1}{2} [\{m_n^{(1)}\}' + \{m_n^{(2)}\}' + \{m_n^{(3)}\}']$$

$$\{m_n\} = \{m_{1x} \quad m_{1y} \quad m_{1xy} : m_{2x} \quad m_{2y} \quad m_{2xy} : m_{3x} \quad m_{3y} \quad m_{3xy}\}$$

要素内のモーメントとしてはサブエレメントで計算された $\{m_{0x} \quad m_{0y} \quad m_{0xy}\}$ を用いればよい。また、構造全体の接点モーメントとしては、各要素で計算された接点モーメント式を全て重ね合わせ、要素数で割ったものを用いればよい。すなわち

$$\{m_p\} = \sum_{i=1}^n \{m_p\}_i / n$$

要素の最大応力は板の中立面から最も遠い板表面に現れる。曲げモーメント m と応力度 σ との関係は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6}{t^2} m_x \\ \sigma_y &= \frac{6}{t^2} m_y \\ \tau_{xy} &= -\frac{6}{t^2} m_{xy} \end{aligned} \right\}$$

2 解析モデルと実験

実験には図4に示す供試体を用いた。縁端にはボルト孔を長辺で12.5cm 短辺で15cm間隔で開けてある。境界条件は四辺固定、二辺固定二辺単純支持、四辺単純支持、二辺固定二辺自由の4種類とした。荷重方法は、板の縁端に木枠を巡らしその中に水を入れることにより四辺形板に等分布荷重を与えた。荷重強度は水深によって知ることができる。例えば水深10cmのときは $q = 0.01 \text{ kg/cm}^2$ の等分布荷重を載荷したのと同じ。

解析モデルは図5に示すように供試体の板（板厚 $t = 6 \text{ mm}$ ）の部分のみを三角形要素に分割したものをを用いた。

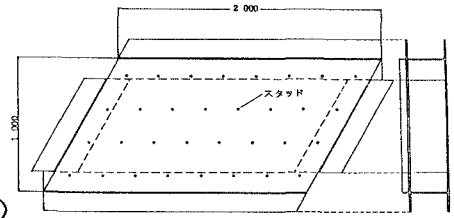


図 4

3 数値解析と実験結果

実験、解析に用いた境界条件は次のとおりである。

- 1 四辺固定：四辺全てをボルトで締め付ける。
- 2 二辺固定二辺単純支持：長辺二辺をボルトで締め
短辺はH型鋼のみの支持とする。
- 3 四辺単純支持：四辺全てをH型鋼のみの支持とする。
- 4 二辺固定二辺自由：長辺二辺をボルトで締め短辺下のH型鋼は取り除く。

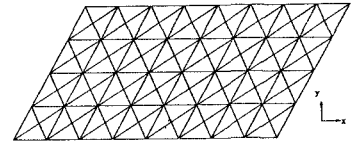
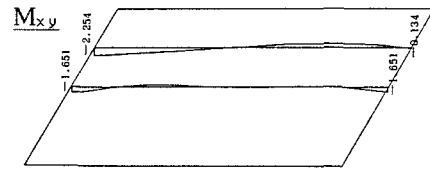
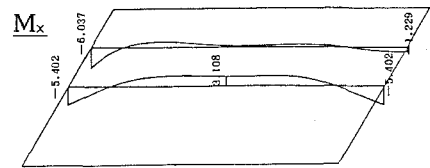
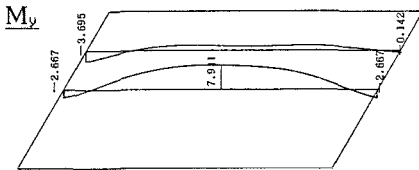
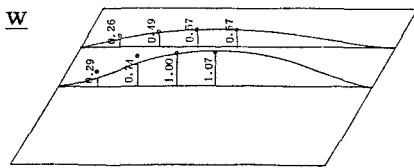
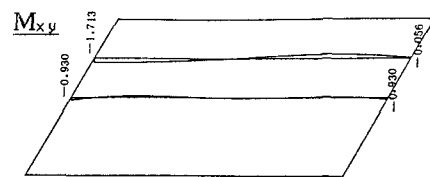
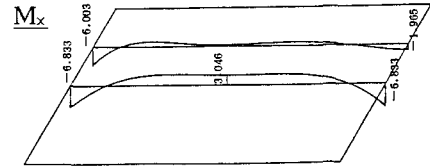
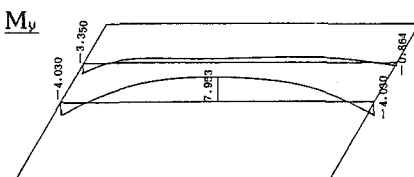
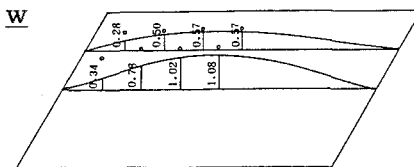


図 5

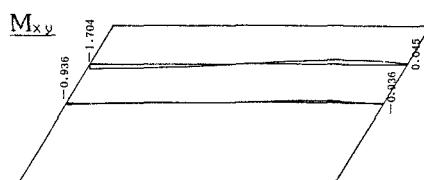
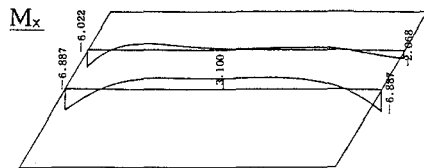
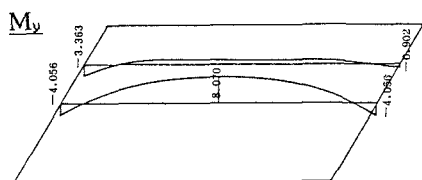
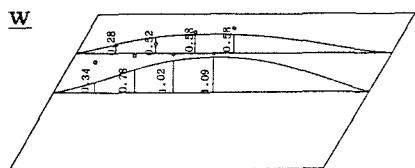
(1) 四辺固定



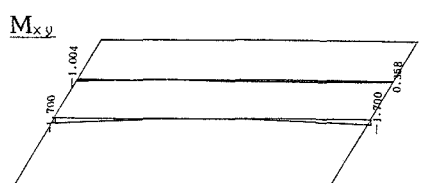
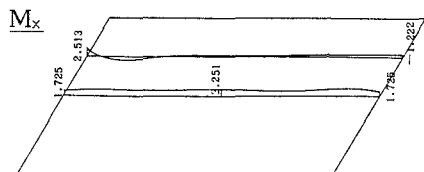
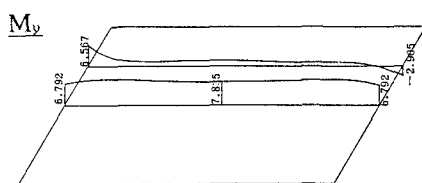
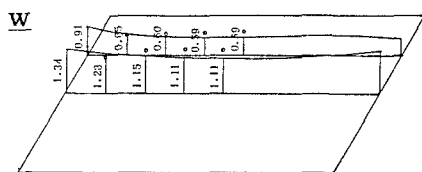
(2) 二辺固定二辺単純支持



(3) 四辺単純支持



(4) 二辺固定二辺自由



※図中の数値は $q = 0.02 \text{ kg/cm}^2$ (水深 20 cm) の等分布荷重を載荷した場合の値である。

○印は実験値を示す。

4 あとがき

有限要素法による数値解析結果と実験値を比較すると良く一致した。また本方法は、任意の形状、境界条件のもとでも使用することができ、非常に汎用性が高いものであるといえる。

(参考文献) 小堀為雄・吉田 博：有限要素法による構造解析プログラム、丸善