

I — 4 板厚を離散変数とする格子構造物の最小重量設計について

室蘭工業大学 学生員 吉岡 修治
 室蘭工業大学 正 員 杉本 博之
 室蘭工業大学 正 員 菅田 紀之
 室蘭工業大学 正 員 尾崎 詔

1. まえがき

構造物の設計問題はすべて、設計変数とその関数である目的関数、制約条件式で表現されており、その最適設計においては、設計変数による目的関数および制約条件式の1階の微係数が必要とされている。その微係数は一般に差分によって求められ、1組の微係数の値を求めるには、(設計変数+1)回の構造解析が必要となる。よって、いかに設計変数の数を少なくできるかが、最適設計の効率化において重要な問題となる。

また、これまでの最適設計法は、そのほとんどが連続な設計変数を対象としている。しかし実際の設計においては、mm単位あるいはcm単位の断面寸法を用いるのが普通である。従って、部材断面寸法に離散変数を扱うことのできる最適設計法は、実設計において適当であり、かつその有効な方法の開発が望まれている。

トラス構造物においては、サブオプティミゼーションの概念¹⁾を用いることにより、任意鋼種および数種の断面形式において設計変数を部材断面寸法から部材断面積に変換することができ、さらに板厚を離散変数として扱えることができるなど²⁾、最小重量設計として実用性の高いことが示された。

一方、格子構造物においては、トラス構造物のような有効なサブオプティミゼーションの研究はなく、何等かの仮定を設けるか、あるいは一般には部材断面寸法をそのまま設計変数として最小重量設計が行われていた。

しかし、筆者の一人がすでに発表しているように³⁾、ねじり剛性を無視できる格子構造物の最小重量設計に、2段階最適化手法を応用することによって、設計変数を各部材の断面2次モーメントのみに変換することができ、最小重量設計法の効率化が示された。また、板厚を離散変数として扱えることも示唆された。しかしここでは、許容応力度は一定であり、腹板高は通常リンクして一定とされるところを各部材毎に最適値を選んで異なっているなど、実設計としては不十分であった。

本研究では上述の理論をさらに発展させて⁴⁾、許容応力度が部材断面寸法の関数であり、部材の腹板高が設計変数として独立する場合(例えば、変断面位置に関係なく腹板高一定)の格子構造物の最小重量設計法を、2部材からなる格子構造物、68部材の連続格子構造物に適用し、その精度および効率について検討を行った。また、本研究は板厚を離散変数として扱うことが可能であるので、板厚を離散変数とした場合と連続変数とした場合の比較も行った。

2. 格子構造物の最小重量設計の定式化

ねじり剛性を無視できる、図-1のような上下、左右対称のI形部材断面から構成される格子構造物の最小重量設計は以下のように定式化される。

ただし、腹板高 h は、設計変数として独立しているので、フランジ幅 b およびフランジ厚 t とは別々にリンクされ、その設計変数としての数は任意とされる。本論文では腹板高として、主桁の腹板高 h_g 、横桁の腹板高 h_v の2種類のみについて考慮している。

$$\begin{aligned}
 & \text{目的関数} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^n \rho \cdot l_i \cdot A_i(b_i, t_i, h_i) \longrightarrow \min \quad (1) \\
 & \text{制約条件式} \quad ; \quad \left. \begin{aligned} g^{(1)}_{ik} &= \sigma_{ik} - \sigma_{ai} \leq 0 \quad (k=1 \sim K) \\ g^{(2)}_i &= b_g - b_i \leq 0 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

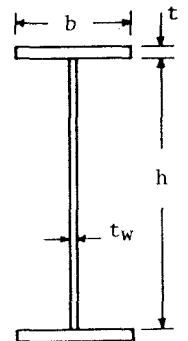


図-1 I形断面

$$\left. \begin{aligned} g^{(3)}_i &= b_i / 32 - t_i \leq 0 \\ t_l &\leq t_i \leq t_u \\ h_l &\leq h_g \leq h_u \\ h_l &\leq h_v \leq h_u \end{aligned} \right\} \quad (i = 1 \sim n) \quad (2)$$

$$g^{(4)}_{jk} = \delta_{jk} - \delta_a \leq 0 \quad (j = 1 \sim J, k = 1 \sim K) \quad (3)$$

設計変数 ; $b_i, t_i (i = 1 \sim n), h_g, h_v$

ここで、 ρ : 単位体積重量、 l_i : i 部材の部材長、 A_i : i 部材の断面積、 $g^{(1)}$: 応力に関する制約条件式、 $g^{(2)}$: 最小フランジ幅に関する制約条件式、 $g^{(3)}$: 自由突出板の最小板厚に関する制約条件式、 $g^{(4)}$: たわみに関する制約条件式、 σ_{ik} : k 番目の荷重条件における i 部材の応力度、 σ_{ai} : i 部材の許容曲げ圧縮応力度、 b_l : フランジ幅の下限値、 t_u, t_l : それぞれフランジ厚の上・下限値、 h_u, h_l : それぞれ腹板高の上・下限値、 δ_{jk} : k 番目の荷重条件における節点 j のたわみ量、 δ_a : 許容たわみ量、 K : 荷重条件数、 J : たわみを制限する節点の数、 N : 部材数である。

上式を原問題として最小重量設計を行った場合、構造物が大きくなるに従い、設計変数、制約条件式の数が多くなり実用的ではない。そこで以下に説明する 2 段階最適化手法を応用するのが適当と考えられる。

3. 2 段階最適化手法による格子構造物の最小重量設計

2 段階最適化手法は、原問題を構造レベルの最適化と部材断面レベルの最適化の 2 段階に分割する方法で、その部材断面レベルの最適化を、断面 2 次モーメントおよび腹板高一定下における最適化問題と定式化することによって、構造レベルの最適化における設計変数を、各部材の断面 2 次モーメントおよび腹板高のみとすることができる。以下に構造レベルの最適化と部材断面レベルの最適化の定式化について説明する。

(1) 構造レベルの最適化の定式化

$$\text{目的関数 ; } W = \sum_{i=1}^n \rho \cdot l_i \cdot A_i (I_i, h_i) \longrightarrow \min \quad (4)$$

$$\text{制約条件式 ; } g_i \leq 0 \quad (i = 1 \sim n) \quad (5)$$

$$h_l \leq h_g \leq h_u \quad (6)$$

$$h_l \leq h_v \leq h_u \quad (7)$$

$$g^{(4)}_{jk} = \delta_{jk} - \delta_a \leq 0 \quad (j = 1 \sim J, k = 1 \sim K) \quad (8)$$

設計変数 ; $I_i (i = 1 \sim n), h_g, h_v$

ここで、 I_i は i 部材の断面 2 次モーメント、 g_i は各部材毎に部材断面レベルの最適化で計算される制約条件式の値である。

2 段階最適化手法において、構造解析がこの構造レベルの最適化で計算されることを考慮すると、上述のように設計変数の数が減少することは、効率の面において効果が大きいと言える。

(2) 部材断面レベルの最適化の定式化

部材断面レベルの最適化は、各部材毎に行われ、フランジ幅 b を

$$b = (12 \cdot I - t_w \cdot h^3) / 6 t (h + t)^2 \quad (9)$$

で表現することにより、その定式化は以下になる、なお、部材番号を示す添字 i は省略する。

$$\begin{aligned} \text{目的関数 ; } A &= 2 \cdot b \cdot t + t_w \cdot h \\ &= (12 \cdot I - t_w \cdot h^3) / 3 t (h + t)^2 + t_w \cdot h \longrightarrow \min \end{aligned} \quad (10)$$

制約条件式 ; $I, h \longrightarrow \text{given}$

$$g^{(1)} = \max(\sigma_k) - \sigma_a \leq 0 \quad (11)$$

$$g^{(2)} = b_k - b \leq 0 \quad (12)$$

$$g^{(3)} = b / 32 - t \leq 0 \quad (13)$$

$$t_l \leq t \leq t_u \quad (14)$$

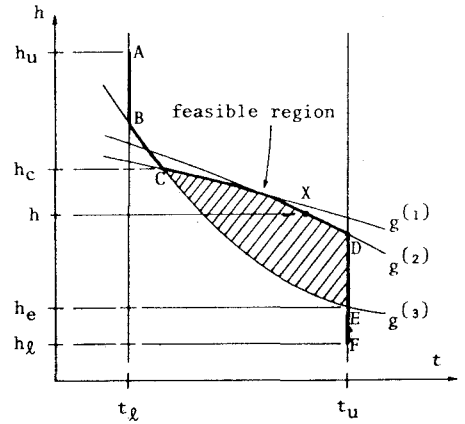
設計変数 ; b, t

部材断面レベルの最適化においては、断面2次モーメント I 、腹板高 h 、腹板厚 t_w が一定であるので、断面積 A は、フランジ厚 t_f だけの関数となり、また t の減少関数となる。従って、断面積を最小にするフランジ厚は許される最大値となる。これを図-2の設計空間で示すと、腹板高 h が与えられれば最適解は X となる。ここで斜線の領域は、式(11)～式(14)で構成される実行可能領域である。

また、最適解 X からフランジ厚を下げてゆき、 X 近傍の離散変数としての最大のフランジ厚も容易に求めることができるので、フランジ厚を離散変数として扱うことも可能である。

構造レベルの最適化に返す制約条件式の値は、以下のよう

に計算される。またここでは、制約条件式間に矛盾が生じ、実行可能領域が全く存在しない場合についても対処している。図-2 部材断面レベルの最適化の設計空間



(A) 実行可能領域がある場合

腹板高 h の値が $h_c \leq h \leq h_u$ あるいは $h_l \leq h \leq h_e$ の場合においては、 h に対応する図-2の ABC 上あるいは EF 上の設計をとりあえずの設計とする。これらは実行可能領域内ではないので、構造レベルの最適化に返す制約条件式の値は、満足していない制約条件式だけ注目し次式とする。

$$g_i = \max [g^{(1)}, 0] + \max [g^{(2)}, 0] + \max [g^{(3)}, 0] \quad (15)$$

腹板高 h の値が実行可能領域内である $h_e \leq h \leq h_c$ の場合においては、 CDE 上が設計点となり、また構造レベルの最適化に返す制約条件式の値は、満足されているすべての制約条件式の中で最大の制約条件式だけ注目し次式とする。

$$g_i = \max [g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}] \quad (16)$$

(B) 実行可能領域が全く存在しない場合

(A) の実行可能領域内の設計にならない場合と同様で、式(15)によって計算される。

4. 板厚を離散変数とした場合の収束性について

ここでは、板厚を離散変数とした場合の最適解への収束性について考える。

板厚を離散変数にして部材断面レベルの最適化を行い、腹板高 h と部材断面積 A の関係を示したのが図-3である。ここで、パラメーターは断面2次モーメント、作用曲げモーメント $100t \cdot m$ 、 $t_l = 1.0cm$ 、 $t_u = 3.8cm$ である。また、黒丸は非実行可能な設計を示したものである。

ある断面2次モーメント、例えば曲線 ABC に注目すると、最適解は点 B となる。今、点 A と点 C をそれぞれ初期値にしその両者を比較すると、前者は、最適解の方向に断面積が小さくなる曲線の勾配を持っている。それに対し後者は、最適解の方向に断面積が大きくなる曲線の勾配を持ち、その勾配は前者に比べてかなり小さくなっている。従って板厚を離散変数とした場合、断面2次モーメントの値が同一であるならば、

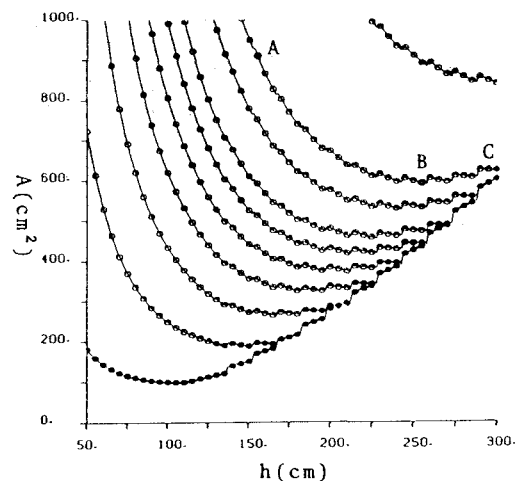


図-3 部材断面レベルの最適化の $h-A$ 曲線

腹板高の初期値を小さくした方が、この曲線の非連続性をカバーし、最適解に収束しやすいと言える。

なお、パラメーターである断面2次モーメントの値は、左下から 0.001、0.005、0.01、0.015、0.02、0.025、0.03、0.04、0.05、0.1 (m^4) である。

5. 数値計算例

数値計算例においては、格子構造物の最小重量設計を、本論文の方法と断面寸法をすべて設計変数として原問題をそのまま解く方法との両方で行い、その結果を比較した。さらに板厚を離散変数とした場合と連続変数とした場合の比較も行った。計算例は、2部材からなる格子構造物と68部材の連続格子構造物である。

その比較においては、同一の初期値に対する目的関数（総体積）と構造解析回数を考慮している。ただし板厚を離散変数とした場合は、腹板高の初期値を小さくした時の結果と比較し、目的関数の値が少ない方を採用している。また構造解析回数においては、関数の微係数を差分で求める時の回数も含まれている。最適化手法としては、汎用最適化プログラムADS⁵⁾中の逐次2次計画法(SQP)と逐次線形計画法(SLP)を用いた。

鋼材はSS41を使用し、水平補剛材は無いことを仮定しているので、腹板厚 t_w は、 $t_w = \max(h/152, 0.9)\text{cm}$ で計算される。また、 $t_g = 1.0\text{cm}$ 、 $t_u = 3.8\text{cm}$ 、 $b_g = 10.0\text{cm}$ 、フランジ固定間距離 = 300cmとする。なお、許容応力度は道路橋示方書に従った。

(1) 2部材からなる格子構造物

図-4に構造と荷重系を示す2部材の格子構造物の例である。腹板高の設計変数は2部材をリンクして1種類(h_g)としている。なお、図に付してある数字は部材番号を示したものである。

ここでは、初期値と最適化手法を種々変えて、全部で6ケースの計算を行い、目的関数と構造解析回数の結果を表-1に、またcase2の各部材の断面寸法の値を表-2に示した。なお、これらの表のtypeの欄で、discreteは板厚を離散変数とした場合、continuousは板厚を連続変数とした場合を示す。これは次の例題でも同じである。

本論文の方法と従来の方法を、板厚を連続変数として比較すると、目的関数の値は両者ほぼ一致している。構造解析回数は本論文の方法の方が1例を除いてすべて減少しており、平均するとSQPで9割程度、SLPで6割強に減少している。断面寸法はほぼ一致している。

板厚を離散変数とした場合と連続変数とした場合とを、本論文の方法において比較すると、目的関数の値は両者ほとんど差が見られない。構造解析回数は1例を除いてほぼ一致している。

(2) 68部材の連続格子構造物

図-5に構造と荷重系を示す68部材の連続格子構造物の例である。主桁断面は中間支点に関して対称であり、幅員方向に対しても対称である。横桁においては、すべて同一断面としている。また腹板高の設計変数は、主桁の腹板高(h_g)と横桁の腹板高(h_v)を考慮している。なお、図に示された細線と太線はリンクされている部材の関係を示し、それらに付してある数字は断面の種類番号を示したものである。

荷重条件は3つ考慮している。荷重条件1は、図-5のように主桁に等分布荷重が載荷され、さらに左から右へ移動する連行荷重が載荷される。荷重条件2および荷重条件3は、等分布荷重の大きさ、作用位置および連行荷重の大きさは荷重条件1と同じで、連行荷重の作用位置が荷重条件2で節点Aから、荷重条件3で節点Bから始まる。

ここでは、応力だけの制約条件の場合と、応力と各主桁においてスパンセンターのたわみを10cm以下に制約した場合とを考慮し、さらに初期値と最適化手法を種々変えて、全部で12ケースの計算を行い、目的関数と構造解析回数の結果を表-3に、またcase3の各部材の断面寸法の値を表-4に示した。

本論文の方法と従来の方法を、板厚を連続変数として比較すると、応力だけの制約条件の場合、目的関数の値はほぼ一致している。構造解析回数は本論文の方法の方が全体に渡って少なくなっており、平均すると

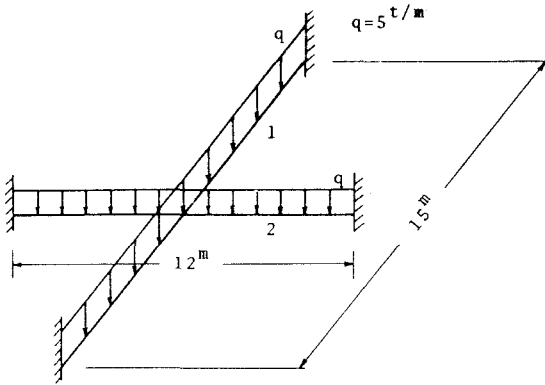


図-4 2部材からなる格子構造物

表-1 目的関数と構造解析回数 (2部材)

method		proposed method		primal problem
type		discrete	continuous	continuous
S Q P	CASE 1	0.457 m ³ [141]	0.456 m ³ [81]	0.458 m ³ [109]
	CASE 2	0.458 m ³ [65]	0.456 m ³ [66]	0.457 m ³ [79]
	CASE 3	0.458 m ³ [64]	0.457 m ³ [86]	0.458 m ³ [74]
S L P	CASE 4	0.459 m ³ [64]	0.458 m ³ [76]	0.457 m ³ [108]
	CASE 5	0.457 m ³ [60]	0.457 m ³ [44]	0.457 m ³ [96]
	CASE 6	0.458 m ³ [60]	0.457 m ³ [76]	0.458 m ³ [90]

表-2 部材断面寸法 (2部材)

method		proposed method		primal problem
type		discrete	continuous	continuous
b1	(cm)	25.78	26.26	25.92
b2	(cm)	35.83	36.38	35.99
t1	(cm)	1.00	1.00	1.00
t2	(cm)	1.30	1.31	1.30
hg	(cm)	110.37	108.01	110.04
twe	(cm)	0.90	0.90	0.90

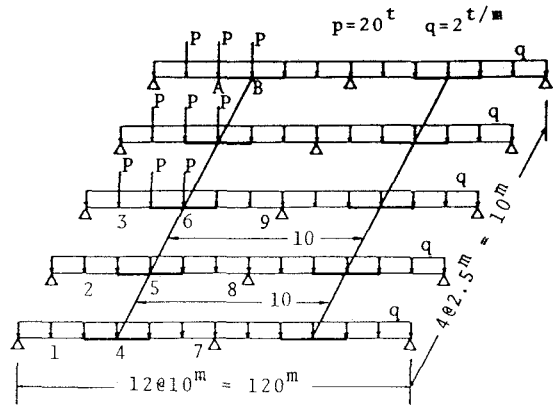


図-5 68部材の連続格子構造物

表-3 目的関数と構造解析回数 (68部材)

constraint		stress only		primal problem
method		proposed method		continuous
type		discrete	continuous	continuous
S Q P	CASE 1	55.00 m ³ [162]	54.66 m ³ [196]	55.08 m ³ [711]
	CASE 2	55.13 m ³ [307]	55.05 m ³ [139]	57.93 m ³ [276]
	CASE 3	54.85 m ³ [179]	54.63 m ³ [144]	54.76 m ³ [473]
S L P	CASE 4	55.66 m ³ [169]	55.13 m ³ [247]	54.96 m ³ [391]
	CASE 5	55.80 m ³ [286]	55.23 m ³ [156]	55.54 m ³ [345]
	CASE 6	55.92 m ³ [247]	55.01 m ³ [143]	54.92 m ³ [230]
constraint		stress + displacement		primal problem
method		proposed method		continuous
type		discrete	continuous	continuous
S Q P	CASE 1	60.86 m ³ [178]	60.34 m ³ [211]	64.02 m ³ [385]
	CASE 2	60.62 m ³ [165]	60.28 m ³ [146]	62.56 m ³ [459]
	CASE 3	60.64 m ³ [160]	60.32 m ³ [117]	61.01 m ³ [365]
S L P	CASE 4	61.04 m ³ [221]	61.01 m ³ [65]	62.53 m ³ [299]
	CASE 5	61.21 m ³ [169]	60.75 m ³ [234]	62.08 m ³ [184]
	CASE 6	61.17 m ³ [195]	61.09 m ³ [78]	61.10 m ³ [230]

表-4 部材断面寸法 (68部材)

constraint		stress only			stress + displacement		
method		proposed method		primal problem	proposed method		primal problem
type		discrete	continuous	continuous	discrete	continuous	continuous
b1	(cm)	84.64	65.94	75.17	60.27	60.61	73.46
b2	(cm)	64.71	66.30	63.54	50.82	53.54	58.36
b3	(cm)	54.45	58.09	55.24	49.86	48.48	43.70
b4	(cm)	89.95	83.97	81.64	117.18	115.85	105.36
b5	(cm)	51.80	50.60	60.53	37.61	40.71	64.57
b6	(cm)	52.33	38.31	35.68	37.46	32.48	40.27
b7	(cm)	99.90	89.99	88.18	64.24	64.21	88.44
b8	(cm)	65.89	74.28	70.21	61.31	63.39	75.66
b9	(cm)	54.21	60.62	63.83	61.03	43.59	59.44
b10	(cm)	23.32	44.29	40.13	58.92	49.77	59.28
t1	(cm)	3.30	3.80	3.11	3.80	3.80	2.83
t2	(cm)	2.40	2.75	2.40	2.00	1.94	2.29
t3	(cm)	2.00	2.27	2.10	1.80	1.74	1.88
t4	(cm)	3.50	3.15	3.17	3.80	3.80	3.80
t5	(cm)	3.10	3.80	2.62	3.80	3.80	3.35
t6	(cm)	2.10	3.80	3.65	3.80	3.80	2.90
t7	(cm)	3.80	3.80	3.61	3.80	3.80	3.38
t8	(cm)	3.70	3.80	3.44	2.40	2.33	2.77
t9	(cm)	3.80	3.74	3.18	2.40	3.80	2.21
t10	(cm)	3.70	1.64	1.93	2.30	2.84	2.58
hg	(cm)	258.12	256.58	270.59	300.00	300.00	294.33
h _v	(cm)	116.84	77.90	83.20	61.21	60.85	51.61
twe	(cm)	1.70	1.69	1.78	2.00	1.97	1.94
t _w	(cm)	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90

SQPで3割程度、SLPで6割程度に減少している。断面寸法も両者ほぼ一致している。また、変位と応力の制約条件の場合は、目的関数の値は同じか本論文の方法の方が若干良い。構造解析回数においても本論文の方法の方が良い結果を示し、平均するとSQPで4割弱、SLPで5割程度に減少している。

板厚を離散変数とした場合と連続変数とした場合とを、本論文の方法において比較すると、板厚を離散変数とする方が全体的に構造解析回数が増加している。しかし目的関数においては、両者それほど離れた値とはなっていない。

6. 結論

板厚を離散変数として扱うことのできる格子構造物の最小重量設計を効率良く行うために、2段階最適化手法の応用を試み、数値計算例でその有効性について検討した。

本論文より得られた事項をまとめると以下になる。

- (1) ねじり剛性の無視できる格子構造物の最小重量設計問題を、構造レベルの最適化と部材断面レベルの最適化の2段階に分けた。
- (2) 構造レベルの最適化において、設計変数は、各部材の断面2次モーメントと腹板高のみとなり、制約条件式は、各部材毎に部材断面レベルの最適化で計算される制約条件と、変位などの剛性に関する制約条件のみとなる。従って、構造レベルの最適化は、部材の断面寸法すべてを設計変数とする方法に比べてはるかに問題が縮小され、効率的な最適化が可能となる。
- (3) 部材断面レベルの最適化は、各部材毎に行われ、断面2次モーメントと腹板高一定下において、応力度および断面寸法に関する制約条件を満足し、部材断面積を最小にする断面寸法の決定として定式化される。ここでは、設計変数はフランジ厚のみとなり、その最適解は許される最大値となる。

また、この部材断面レベルの最適化においては、フランジ厚を離散変数として扱うことが容易であることが示された。

- (4) 板厚を離散変数とした場合、腹板高と部材断面積の関係は、腹板厚の影響で非連続となり、収束性に難があった。しかし断面2次モーメントが同じであるならば、腹板高の初期値の低い方が収束しやすいことが示され、収束性を改善するための1つの方法として示された。
- (5) 2種類の構造物の最小重量設計に、本論文の方法と断面寸法をすべて設計変数とする方法とを適用し、目的関数の値と最適化に要した構造解析の回数で比較した。

その結果、目的関数の値は、18ケース中15ケースで本論文の方法の方が若干少なく、また構造解析回数は、18ケース中16ケースで本論文の方法の方が少なくなった。

- (6) 板厚を離散変数とした場合と連続変数とした場合とを、本論文の方法において比較した。

その結果、構造解析回数においては平均すると前者の方が多くなったが、目的関数においては両者それほど差はみられず、本論文の方法は板厚を離散変数として扱えることが示された。

- (7) 本論文の方法による設計変数の縮小およびそれに伴う構造解析回数の減少、それに板厚を離散変数として扱えるなど、本研究は格子構造物の最小重量設計を一步実用的なものへと前進させたと言える。

参考文献 1) 大久保慎二：トラス構造物の最適設計法に関する研究、土木学会論文報告集、第177号、pp.9~19、1970。 2) 杉本博之：任意形状の断面よりなるトラス構造物の最小重量設計、第9回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、pp.251~256、1985。 3) 杉本博之：格子構造の効率的な最小重量設計について、第10回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、pp.46~51、1986。 4) 杉本博之、吉岡修治：2段階最適化による格子構造の最小重量設計に関する研究、構造工学論文集、vol.33A、1987、掲載予定。 5) Vanderplaats, G.N. and Sugimoto, H.: A General-Purpose Optimization Program for Engineering Design, Journal of Computers and Structures, will be published.